نشان دهید رابطه زیر بین گشتاورهای مرتبه اول و دوم و سوم حول صفر با گشتاور مرکزی مرتبه سوم برقرار است

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

از تعریف می دانیم که:

$M_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n}$
$m_1 = \frac{\sum x_i}{n}$
$m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$
$m_3 = \frac{\sum x_i^3}{n}$

با توجه به اینکه $(x_i - \bar{x})^3 = x_i^3 - 3x_i^2\bar{x} + 3x_i\bar{x}^2 - \bar{x}^3$ و تعریف M_3:

$$M_3 = \frac{\sum x_i^3}{n} - 3\frac{\sum x_i^2\bar{x}}{n} + 3\frac{\sum x_i\bar{x}^2}{n} - \frac{\sum \bar{x}^3}{n}$$

عبارت اول، یعنی $\frac{\sum x_i^3}{n}$ مساوی است با m_3

در عبارت دوم $3\frac{\sum x_i^2\bar{x}}{n} = \frac{3\bar{x}\sum x_i^2}{n}$ کافیست به جای $\bar{x} = m_1$ و به دست می آید

$$3\frac{\sum x_i^2\bar{x}}{n} = \frac{3\bar{x}\sum x_i^2}{n} = 3\frac{\sum x_i}{n}\frac{\sum x_i^2}{n} = 3m_1m_2$$

دقت کنید که در اینجا $\bar{x}$ همانند یک ضریب عمل می کند و می تواند از سیگما بیرون بیاید.
در عبارت سوم به جای $\frac{\sum x_i}{n}$ قرار می دهیم $\bar{x}$ و لذا خواهیم داشت:

$$3\frac{\sum x_i\bar{x}^2}{n} = 3(\bar{x})\bar{x}^2 = 3\bar{x}^3$$

عبارت چهارم یعنی $\frac{\sum \bar{x}^3}{n}$ مساوی است با $\frac{n\bar{x}^3}{n} = \bar{x}^3$

در اینجا عبارت $\Sigma\bar{x}^3 = n\bar{x}^3$، زیرا یک عدد ثابت n بار جمع بسته می شود. دو عبارت سوم و چهارم $3\frac{\sum x_i\bar{x}^2}{n} - \frac{\sum \bar{x}^3}{n} = 3\bar{x}^3 - \bar{x}^3 =$

$2\bar{x}^3 = 2m_1^3$ را به دست می دهد.
لذا نتیجه می شود که :

$$M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

جعفر اوج بگ/بهمن ۱۳۹۲