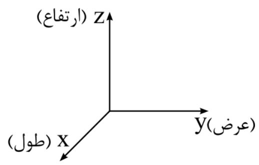
هندسه تحلیلی

فصل اول

1) 

نام‌گذاری محورها

2) $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+x^2}$ فاصله‌ی نقطه‌ی M به مختصات (x,y,z) از مبدأ

---

3) فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) از محورها

$$\begin{cases} d=\sqrt{y^2+z^2} & \text{فاصله از محور } x\text{ها} \\ d=\sqrt{x^2+z^2} & \text{فاصله از محور } y\text{ها} \\ d=\sqrt{y^2+x^2} & \text{فاصله از محور } z\text{ها} \end{cases}$$

---

4) فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) از صفحات

$$\begin{cases} d=x \rightarrow (yoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d=y \rightarrow (xoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d=z \rightarrow (xoy) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \end{cases}$$

---

5) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ فاصله‌ی ۲ نقطه به مختصات (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) از هم

---

6) $P:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ مختصات وسط پاره خط متصل‌کننده‌ی دو نقطه‌ی

(x_2,y_2,z_2) و (x_1,y_1,z_1)

---

7)

$$\begin{cases} A(x_1,y_1,z_1) \\ B(x_2,y_2,z_2) & \text{محل برخورد ۳ میانه‌ی مثلث} \\ C(x_3,y_3,z_3) \\ G:\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) \end{cases}$$

8) تصویر نقطه‌ی (x,y,z) نسبت به صفحات مختصات
$$\begin{cases}(x,y,\text{صفحه}) & \text{نسبت به } (xoy)\\(x,\text{صفحه},z) & \text{نسبت به } (xoz)\\(\text{صفحه},y,z) & \text{نسبت به } (yoz)\end{cases}$$

---

9) تصویر نقطه‌ی (x,y,z) نسبت به محورهای مختصات
$$\begin{cases}(x,o,o) & \text{نسبت به محور } x\text{ها}\\(o,y,o) & \text{نسبت به محور } y\text{ها}\\(o,o,z) & \text{نسبت به محور } z\text{ها}\end{cases}$$

---

10) نقطه − تصویر $\times 2 =$ قرینه

نسبت به محور یا صفحه — نسبت به محور یا صفحه

---

11) $|\vec{V}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\quad \vec{V}(a,b,c)$ طول بردار به مختصات

---

12) $M\vec{a} = (Ma_1, Ma_2, Ma_3)$ ضرب عدد M در بردار

---

13) $|M\vec{a}| = |M||\vec{a}|$

---

14) اگر ۲ بردار (a,b,c) و (a',b',c') موازی باشند $\Rightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

---

15)
$$\begin{cases}\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| & \text{مستطیل}\\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b}) & \text{لوزی}\\ \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |M\vec{a}+n\vec{b}| = |M\vec{a}-n\vec{b}| & \text{تعمیم نکته مستطیل}\end{cases}$$

---

16) $e_a = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \times \vec{a} \Rightarrow e_a = \left(\dfrac{x}{|\vec{a}|}, \dfrac{y}{|\vec{a}|}, \dfrac{z}{|\vec{a}|}\right)$ بردار یکه

---

17) $\vec{V} = (a,b,c) \Leftrightarrow \vec{V} = ai + bj + ck$

---

18) $\begin{cases} \vec{i} = (1,0,0) \\ \vec{j} = (0,1,0) \\ \vec{k} = (0,0,1) \end{cases}$

---

19) $u_T = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ (بردار نیمساز بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

---

20) ضرب نقطه‌ای (داخلی) $\left.\begin{matrix} a(x,y,z) \\ b(x',y',z') \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = (xx' + yy' + zz')$

---

21) $a.b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (θ: زاویه بین a و b)

---

22) ۳ اتحاد ضرب داخلی $\begin{cases} |\vec{a} \pm \vec{b}| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \\ (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) \end{cases}$

---

23) $e_a.e_b = \frac{\vec{a}}{|a|}.\frac{\vec{b}}{|b|}$

---

24) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

---

25) $\vec{a}.\vec{o} = 0$

26) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

27) $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

28) $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c}) \rightarrow$ بی‌معنی

29) $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ نامساوی کشی شوارتز

30) $(r\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(r\vec{b}) = r(\vec{a}.\vec{b})$ r عددی متعلق به R

31) $i.i = j.j = k.k = 1$

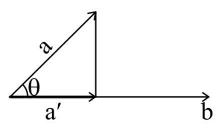
32) $a:(a_1,a_2,a_3) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{i}=a_1 \\ \vec{a}.\vec{j}=a_2 \\ \vec{a}.\vec{k}=a_3 \end{cases}$

---

33) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=0 \\ \text{یا} \\ \vec{a} \perp (\vec{b}-\vec{c}) \\ \text{یا} \\ \vec{b}=\vec{c} \end{cases}$

---

34)



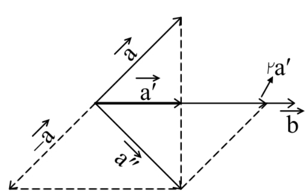
$$|\vec{a'}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

---

35) $\vec{a'} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right).b$ $\qquad$ ($\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

(قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

36)



$$\vec{a''} = 2\vec{a'} + (-\vec{a})$$

$\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$

$\vec{a''}$: قرینه‌ی $\vec{a}$

---

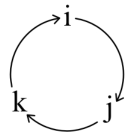
37) $a'.a'' = a.a' = |a'|^2$

➢ ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$:

38) $\begin{cases} \vec{a}(x,y,z) \ \vec{a}\times\vec{b} \\ \vec{b}(x',y',z') \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$

---

39) $\sin\theta = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

40) $\begin{cases} i\times j=k \\ j\times k=i \\ k\times i=j \end{cases} \Rightarrow$ 

➢ ویژگی‌های ضرب خارجی:

41) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

42) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

43) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

44) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

45) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$

46) $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}$ یا $\vec{b}=0$

47) $r(\vec{a}\times\vec{b})=r\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(r\vec{b})$

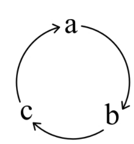
48) $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$ توزیع‌پذیری دارد

49) $(\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$ توزیع‌پذیری دارد

50) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ شرکت‌پذیری ندارد

51) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

---

52) اگر برای ۳ بردار $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ داشته باشیم $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ $\Rightarrow a\times b=b\times c=c\times a$ 

---

53) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

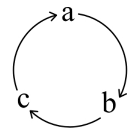
➢ ضرب مختلط:

54) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|.\sin\alpha.\cos\theta$

زاویه بین $\vec{c},\vec{b}$ زاویه بین $(b\times c).\vec{a}$

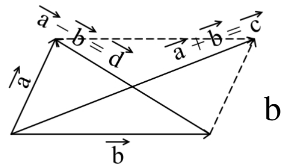
---

55) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$



---

56)

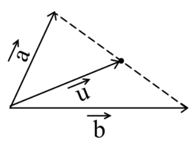


مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده توسط ۲ بردار a و b

$$S=\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{d}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}\times\vec{d}|\\ \frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}|=\frac{1}{2}|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|\end{cases}$$

---

57)



$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

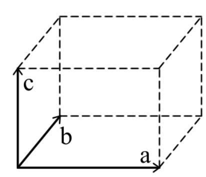
مساحت مثلث ساخته‌شده توسط ۲ بردار a و b

58) میانه $\vec{u}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

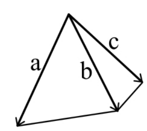
---

59) حجم متوازی‌السطوح بناشده روی ۳ بردار a و b و c

$$\Rightarrow\begin{cases}V=|a.(b\times c)|=|b.(c\times a)|=|c.(a\times b)|\\ \text{ارتفاع متوازی‌السطوح}=\dfrac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}\end{cases}$$

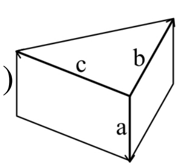


60) حجم جرم بناشده روی ۳ بردار ر a و b و c $\Rightarrow V=\frac{1}{6}|a.(b\times c)|$



---

61)



$\Rightarrow V=\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$ (حجم منشور مثلث‌القاعده بناشده روی ۳ بردار ر a و b و c)

فصل دوم

1) $\vec{u}:\left(\frac{a}{m},\frac{b}{n},\frac{c}{p}\right)\Rightarrow\left(\frac{mx-x_0}{a}=\frac{ny-y_0}{b}=\frac{pz-z_0}{c}\right)$ بردار هادی خط به معادله

---

2) $\vec{u}:(a,b,c)$ بردار هادی خط به معادله

معادله پارامتری خط $\Rightarrow\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+y_0\\ z=ct+z_0\end{cases}$

➢ معادلات خطوط عمود بر محورها

3) x عمود بر محور: $\begin{cases}x=x_1\\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

4) y عمود بر محور: $\begin{cases}y=y_1\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

5) z عمود بر محور: $\begin{cases}z=z_1\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

➢ معادلات خطوط واقع در صفحات مختصات

6) zoy واقع در: $\begin{cases}x=0\\ \frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

7) xoz واقع در: $\begin{cases}y=0\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

8) yox واقع در: $\begin{cases}z=0\\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

9) فاصله‌ی نقطه از خط $\Rightarrow d=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

بردار هادی خط: $\vec{u}$

نقطه‌ای دلخواه از خط: A'

نقطه‌ی مورد نظر: A

---

10) فاصله‌ی ۲ خط موازی $\Rightarrow d=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

بردارهای خط‌های ۱ یا ۲: $\vec{u}$

نقطه‌ای دلخواه از خط ۱: A

نقطه‌ای دلخواه از خط ۲: A'

---

11) طول عمود مشترک ۲ خط متنافر $=\dfrac{|\vec{u}\times\overline{AA'}|}{|\vec{u}|}$

ضرب خارجی هادی‌های ۲ خط: $u=u_1\times u_2$

نقطه‌ای دلخواه از خط اول: A

نقطه‌ای دلخواه از خط دوم: A'

➢ وضعیت ۲ خط نسبت به هم:

12) توازی $\Rightarrow \dfrac{a_1}{a'_1}=\dfrac{a_2}{a'_2}=\dfrac{a_3}{a'_3}$ شرط موازی بودن ۲ خط با بردارهای هادی (a_1,b_2,c_3) و (a'_1,b'_2,c'_3)

---

13) منطبق $\Rightarrow$ شرط توازی را بررسی می‌کنیم اگر یک نقطه‌ی مشترک داشتند منطبق هم هستند.

---

14) تقاطع $\Rightarrow$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست از ۳ تساوی دو (t) یکسان بدست آوریم آن‌گاه ۲ خط متقاطعند.

15) متنافر $\Rightarrow$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست به ازای حل ۳ معادله دو (t) مختلف یافت شود تا تنافر خطوط اثبات شود.

16) $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ و موازی بردار هادی $\vec{u}(a,b,c)$

---

17) $\dfrac{x-x_0}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_0}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_0}{z_2-z_1}$ معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$

➢ صفحه:

18) $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ معادله‌ی صفحه شامل نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و

با نرمال عمود بر صفحه‌ی $\vec{N}:(a,b,c)$

یافتن بردار نرمال صفحه در حالات مختلف: (X نماد ضرب خارجی است)

19) $\vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ نرمال صفحه‌ای که از یک نقطه بگذرد و با ۲ خط متنافر با هادی‌های u_1 و u_2 موازی باشد.

20) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ نرمال صفحه‌ای که از ۳ نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر یک خط راست بگذرد .

21) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ نرمال صفحه‌ی شامل نقطه‌ی A و خط d که B نقطه‌ای روی d و $\vec{u}$ هادی d است.

22) $\vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ نرمال صفحه‌ای که شامل ۲ خط متقاطع با هادی‌های u_1 و u_2 باشد.

23) $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ نرمال صفحه‌ای شامل یک نقطه و عمود بر ۲ صفحه‌ی متقاطع p_1 و p_2 با نرمال‌های N_1 و N_2.

24) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{N}'$ نرمال صفحه‌ی شامل یک نقطه که عمود بر صفحه‌ی p' و موازی خط d با هادی u است.

25) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ نرمال صفحه‌ای که از ۲ نقطه‌ی A و B گذشته و با خط d با هادی $\vec{u}$ موازی است.

26) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{N}'$ نرمال صفحه‌ای که شامل خط d با هادی u و عمود بر صفحه‌ی p' با نرمال N' است.

27) $\vec{N}=\vec{u}\times\vec{u}'$ نرمال صفحه‌ی شامل خط d با هادی u و موازی خط d' با هادی u'.

28) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$ نرمال صفحه شامل ۲ خط موازی d_2 و d_1 که A نقطه‌ای روی d_1 و B نقطه‌ای روی d_2 است و u هادی یکی از خطوط است.

29) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times N'$ نرمال صفحه‌ی گذرا از ۲ نقطه‌ی A و B و عمود بر صفحه‌ی p' به نرمال N'.

30) $\vec{N}=\vec{N}'$ نرمال صفحه‌ای که شامل یک نقطه است و با صفحه‌ی p' موازی است.

31) $\vec{N}=\overrightarrow{AB}$ نرمال صفحه‌ی عمود منصف پاره خط $\overline{AB}$ که شامل نقطه‌ی $\dfrac{A+B}{2}$ است.

➢ معادلات صفحه در حالت خاص:

32) $ax+by+cz=0$ صفحه‌ی گذرا از مبدأ مختصات با نرمال (a,b,c) : $\vec{N}$

---

33) صفحه‌ی موازی محورها : $\begin{cases} ox \text{ موازی } \Rightarrow by+cz+d=0 \\ oy \text{ موازی } \Rightarrow ax+cz+d=0 \\ oz \text{ موازی } \Rightarrow ax+by+d=0 \end{cases}$

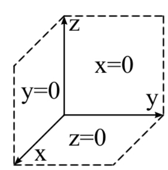
---

34) صفحه‌ی شامل محورها : $\begin{cases} ox \text{ شامل } \Rightarrow by+cz=0 \\ oy \text{ شامل } \Rightarrow ax+cz=0 \\ oz \text{ شامل } \Rightarrow ax+by=0 \end{cases}$ ※

---

35) صفحات عمود بر محورها (موازی صفحات) $\left\{\begin{matrix} ox \text{ عمود بر } \Rightarrow x+d=0 \\ oy \text{ عمود بر } \Rightarrow y+d=0 \\ oz \text{ عمود بر } \Rightarrow z+d=0 \end{matrix}\right\}$ نرمال‌های صفحات به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$اند

36) معادلات صفحات مختصات $\begin{cases} yoz \text{ صفحه } \Rightarrow x=0 \\ xoz \text{ صفحه } \Rightarrow y=0 \\ xoy \text{ صفحه } \Rightarrow z=0 \end{cases}$

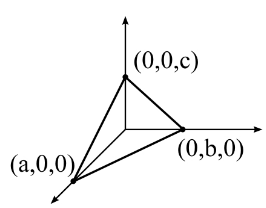


---

37) معادلات صفحات نیمساز $\begin{cases} x=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow y=z \\ y=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow x=z \\ z=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز } \Rightarrow x=y \end{cases}$

---

38) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$



معادله‌ی صفحه‌ای که هر ۳ محور را در نقاط $\left.\begin{matrix}(a,0,0)\\(0,b,0)\\(0,0,c)\end{matrix}\right\}$ قطع کند.

39) $V=\dfrac{1}{6}|abc|$ حجم هرم تشکیل‌شده توسط صفحه به رأس مبدأ

40) $S_{abc}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}$ مساحت مثلث حاصل از محل تقاطع صفحه

---

41) $\mathbf{P(A)}$ یعنی صدق نقطه‌ی $\mathbf{A}$ در معادله صفحه

$$\begin{cases} P(A).P(B)>0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)<0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در ۲ سوی صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)=0 & \text{حداقل یک نقطه در صفحه است.} \end{cases}$$

بررسی موقعیت ۲ نقطه نسبت به صفحه

---

42) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x',y',z')$ از صفحه‌ی $P(x,y,z): ax+by+cz+d=0$

$$AH=\frac{|ax'+by'+cz'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|P(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

43) فاصله مبدأ از صفحه

$$AH'=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

---

44) فاصله‌ی ۲ صفحه‌ی موازی به معادله‌های $\left.\begin{matrix} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{matrix}\right\}$

$$\text{فاصله}=\frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

---

45) بردار هادی خط فصل مشترک ۲ صفحه‌ی P و P'

$$\vec{u}=\vec{N}\times\vec{N'}$$

➢ حالات موازی و انطباق و تقاطع ۲ صفحه:

46)
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\begin{cases} \neq \dfrac{d}{d'} & \text{موازی} \\ = \dfrac{d}{d'} & \text{منطبق} \end{cases}$$

---

47) $\vec{N}.\vec{N'}=0$ عمود

---

48) θ: زاویه‌ی ۲ صفحه‌ی متقاطع با نرمال‌های N و N'

$$\cos\theta=\frac{|N.N'|}{|N||N'|}$$

➢ وضعیت خط با هادی $\vec{u}(a,b,c)$ با صفحه به نرمال $N(a',b',c')$

49) $\vec{u}.\vec{N}=0$ خط موازی صفحه یا منطبق

50) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ خط عمود بر صفحه

فصل سوم

مقاطع مخروطی

1) $(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=R^2$ — معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R و مرکز (α,β)

---

2) مرکز $S(\alpha, a\alpha+b)$ — دایره‌ای که مرکزش روی خط $y=ax+b$ است.

---

3) $x^2+y^2+ax+by+c=0 \Rightarrow \left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ مرکز

---

4) تعیین وضعیت خط و دایره از راه محاسبه (به جای y در معادله‌ی دایره y خط مذکور را جاگذاری کرده و Δ را می‌یابیم): $\Rightarrow$

$$\begin{cases}\Delta>0 & \text{متقاطع}\\ \Delta=0 & \text{مماس}\\ \Delta<0 & \text{متخارج}\end{cases}$$

---

5) نوشتن معادلۀ مماس از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی $x^2+y^2+ax+by+cx=0$

- اگر نقطه روی دایره بود مشتق ضمنی گرفته و شیب را می‌یابیم.
- اگر نقطه بیرون دایره بود معادله خط را با شیب M نوشته و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط را برابر شعاع قرار داده و M را می‌یابیم.

---

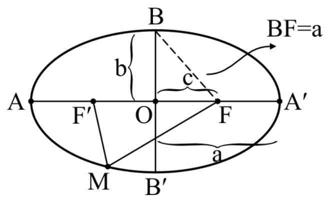
6) $d=\sqrt{c(x_0,y_0)}$ — طول مماس رسم‌شده از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی

$$c(x,y): x^2+y^2+cx+by+c=0$$

---

7) اگر معادله کلی اقطار دایره‌ای به صورت $ax+by+c=0$ باشد برای یافتن مرکز دایره کافیست ۲ قطر دلخواه را قطع دهیم.

بیضی

8) 

➢ **روابط بیضی :**

9) $MF + MF' = 2a$ نقطه‌ی دلخواه روی محیط بیضی M

10) $b^2 + c^2 = a^2$ رابطه‌ی طلایی بیضی

---

11) OA برابر BF و BF' است

12) $O = \dfrac{F + F'}{2}$

➢ **اصطلاحات بیضی: (با توجه به شکل)**

13) **مرکز تقارن** : O: محل برخورد AA' و BB'

14) **رئوس کانونی** : نقاط A و A' یعنی ۲ سر قطر بزرگ

15) **رئوس ناکانونی** : نقاط B و B' یعنی ۲ سر قطر کوچک

16) **کانون‌های بیضی** : F و F' را گویند (F همواره وسط OA نیست)

17) **فاصله‌ی کانونی**: $FF' = 2C$ پاره خط FF' را گویند

---

18) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ معادله‌ی بیضی افقی به مرکز (α,β) و قطرهای $2a$ و $2b$

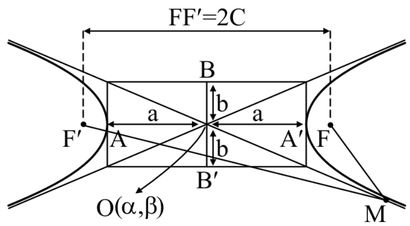
19) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$ معادله‌ی بیضی قائم به مرکز (α,β) و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$

---

20) معادله گسترده‌ی بیضی $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \begin{cases} A < B & \text{بیضی افقی} \\ A > B & \text{بیضی قائم} \end{cases}$

21) خروج از مرکز $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{Min}\{A,B\}}{\mathrm{Max}\{A,B\}}}$

هذلولی

22) 

23) $|MF' - MF| = 2a$ — M نقطه‌ای دلخواه روی یکی از شاخه‌های هذلولی

24) $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow AB = OF = C$ * — رابطه‌ی طلایی هذلولی

➢ **اصطلاحات هذلولی**

25) **کانون‌ها** : نقاط F و F'

26) **رئوس** : نقاط A و A' که **2** رأس کانونی‌اند و رأس ناکانونی نداریم

27) **فاصله کانونی** : پاره خط FF' که برابر $2C$ است

28) **قطر هذلولی** : فاصله $AA' = 2a$ را گویند

29) **محورهای تقارن** : خط AA' یا FF' و همچنین خط BB'

---

30) هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

31) مجانب‌های هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{x-\alpha}{a} \pm \dfrac{y-\beta}{b} = 0$

---

32) هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} - \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

33) مجانب‌های هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{y-\beta}{a} \pm \dfrac{x-\alpha}{b} = 0$

---

34) $M =$ شیب مجانب‌های هذلولی افقی $= \pm \dfrac{b}{a}$

35) $M =$ شیب مجانب‌های هذلولی قائم $= \pm \frac{a}{b}$

36) در هذلولی، نوع آن (قائم بودن و نبودن آن) به کوچک و بزرگی مخرج x^2 و y^2 ربطی ندارد.

37) اگر علامت x^2 $(+)$ بود آن‌گاه هذلولی افقی است.

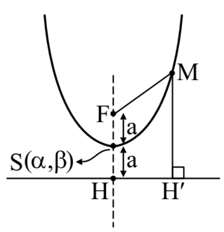
38) اگر علامت x^2 $(-)$ بود آن‌گاه هذلولی قائم است.

---

39) اگر معادله‌ی ۲ مجانب یک هذلولی به صورت $(ax + by + c = 0)$ و $(a'x + b'y + c' = 0)$ باشد آن‌گاه معادله گسترده‌ی هذلولی به صورت روبرو است. $(a'x + b'y + c')(a'x + b'y + c') = K$

K مقدار ثابتی است که با داشتن یک نقطه روی هذلولی یافت می‌شود.

سهمی

40) 

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$$

راس = $S(\alpha, \beta)$

---

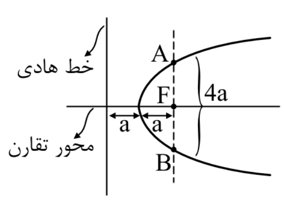
41) $MH' = MF$ M نقطه‌ای دلخواه روی هذلولی (MH' باید عمود بر هادی باشد)

42) $FS = SH = a$

---

43) $0 =$ مشتق نسبت به متغیر درجه $2 \Rightarrow$ یافتن محور تقارن سهمی توسط معادله درجه 2

---

44) 

اگر از کانون خطی موازی خط هادی رسم کنیم سهمی را در 2 نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که: $AB = 4a$

45) $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$ معادله سهمی افقی

➢ دوران محورهای مختصات:

46) $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a-c}$

فرمول یافتن زاویه‌ی دوران مقطع مخروطی دوران یافته به معادله گسترده $(\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0)$

---

47) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

x و y حاصل را در معادله‌ی گسترده قرار داده و مقطع مخروطی را مربع کامل می‌کنیم.

---

48) فرمول‌های مثلثات مربوط $\begin{cases} 1+\tan^2 2\theta = \dfrac{1}{\cos^2 2\theta} \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \ , \ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$

---

49) $b^2 - 4ac = \Delta$ تشخیص نوع مقطع به کمک

$\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0 \begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

$\Delta < 0$: بیضی، تهی، نقطه

$\Delta = 0$: صفحه، تهی، ۲ خط موازی، یک خط، سهمی

$\Delta > 0$: هذلولی، ۲ خط متقاطع

50) $a = c$ و $b = 0 \Rightarrow$ معادله مربوط به دایره می‌گردد.

51) $A = \begin{bmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ ماتریس مقطع مخروطی

52) دترمینان ماتریس مقطع استاندارد=دترمینان ماتریس مقطع دوران یافته (به شرط یکی بودن مقادیر ثابت K)

53) ماتریس مقطع استاندارد $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 = K$

➢ استاندارد کردن مقطع در ۲ حالت خاص:

54) $$ax^2+bxy+ay^2=K \xrightarrow{\text{استاندارد}} \left(a-\frac{b}{2}\right)x^2+\left(a+\frac{b}{2}\right)y^2=K$$

---

55) استاندارد کردن مقطع $ax^2+bxy+cy^2=K$ که دارای ماتریس مقابل است.

$$A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda^2-(a+c)\lambda+|A|=0 & \text{تشکیل معادله روبرو} \\ \lambda_1,\lambda_2 & \text{یافتن ریشه‌های معادله} \\ \lambda_1x^2+\lambda_2y^2=K & \text{تشکیل معادله‌ی استاندارد به صورت روبرو} \end{cases}$$

فصل چهارم

ماتریس

1) ماتریس قطری $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ تمام عناصر خارج قطر اصلی 0 اند.

2) ماتریس اسکالر $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی یکسانند.

3) I (واحد) ماتریس همانی $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ اسکالری که قطر اصلی (1) است.

4) ماتریس بالا مثلثی $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی (0) است.

5) ماتریس پایین مثلثی $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی (0) است.

6) $(\overline{\mathrm{O}})$ ماتریس $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی که همه درایایش 0 باشد.

---

7) عضو خنثی ضرب در ماتریس‌ها $\Rightarrow$ ماتریس همانی

8) عضو خنثی جمع در ماتریس‌ها $\Rightarrow (\overline{\mathrm{O}})$ ماتریس

➢ ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها:

9) $AB = 0 \not\Rightarrow BA = 0$

10) $A(BC) = (AB)C$

11) $\begin{cases} A(B+C)=AB+AC \\ (B+C)A=BA+CA \end{cases}$

12) $AI=IA=A$

13) $(rA)(sB)=(rs)AB$

14) $AB=KI \Rightarrow BA=KI$

15) $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

16) $AB=AC \xrightarrow{|A|\neq 0} B=C$

17) $I^n=I$

18) $A^0=I$

19) $A^m+A^n=A^{(m+n)}$

ماتریس خود توان:

20) $A^2=A \Rightarrow A^n=A$ و $(I-KA)^{-1}=I+\left(\frac{K}{1-K}\right)A$ $\Leftarrow$ تمرین کتاب

21) ویژگی‌ها $\begin{cases} (I-A)^n=I-A \\ (I+A)^n=I+(2^n-1)A \end{cases}$

➢ ماتریس پوچ توان:

22) $A^n=\overline{O}$

23) $\text{Min}(n)=$ اندیس پوچ توانی

24) $\begin{cases} |A|=0 \\ a+d=1 \end{cases}$ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط خودتوانی ماتریس

25) $\begin{cases} |A| = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط پوچ توانی ماتریس

---

26) اگر $A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix}$

27) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix} & \text{زوج } n \\ A^n = \begin{bmatrix} 0 & K^n \\ K^n & 0 \end{bmatrix} & \text{فرد } n \end{cases}$

28) اگر $A^2 = KA \Rightarrow A^n = K^{n-1}A$

➢ ماتریس ترانهاده A^T:

29) $(A^T)^T = A$

30) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

31) $(AB)^T = B^T A^T$

32) $(A^n)^T = (A^T)^n$

33) $(rA)^T = r(A^T) \Rightarrow (-A)^T = -A^T$

➢ ماتریس متقارن $A^T = A$:

34) $(A + B)^T = A + B$

35) $(A - B)^T = A^T - B^T = A - B$

36) $A^T = A$ و $B^T = B$

37) $(rA)^T = rA^T = rA$

38) $(A^n)^T = (A^T)^n = A^n$

39) $(A^T)^T = A = A^T$

40) $(A - I)^T = A - I$

41) $(A + I)^T = A + I$

➢ ماتریس پادمتقارن:

42) $A^T = -A$

43) $A^T = -A$ و $B^T = -B \Rightarrow (A+B)^T = -(A+B)$

44) $(A - B)^T = A^T - B^T$

45) $(rA)^T = rA^T = r(-A) = -rA$

46) اگر A پادمتقارن باشد توان‌های زوج A **متقارن است و توان‌های فرد** A **پادمتقارن است.**

47) $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$ ماتریس به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته می‌شود.

---

48) **ماتریس کهاد:** سطر iام و ستون jام که از حذف سطر i و ستون j پدید آمده

$$\begin{cases} (M_{ij}) \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \to M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{cases}$$

کهاد سطر و ستون 2

---

49) **همسازه:** درایه‌ی ij از ماتریس $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times m}$.

$$\begin{cases} A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}| \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \to A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times -6 = 6 \end{cases}$$

---

50) اگر همسازه درایه‌ای 0 شد با تغییرش دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند. $A_{ij} = 0$

➢ محاسبه‌ی سرعتی همسازه ماتریس 3×3

51) $$\text{همسازه} = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارجی سطر } 3,2) \\ -(\text{ضرب خارجی سطر } 3,1) \\ (\text{ضرب خارجی سطر } 2,1) \end{bmatrix}$$

---

52) $$\begin{cases} (A^{*})^{T} = \text{همسازه} \\ (\text{همسازه})^{T} = A^{*} \end{cases}$$

ماتریس الحاقی = ترانهاده‌ی همسازه

➢ محاسبه‌ی سریع ماتریس الحاقی 3×3

53) $$A^{*} = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارج سطر } 3,2) & -(\text{ضرب خارج سطر } 3,1) & (\text{ضرب خارج سطر } 2,1) \end{bmatrix}$$

➢ ویژگی‌های A^{*}

54) $A^{*}A = AA^{*} = I\,|A|$

55) $|A^{*}| = |A|^{n-1}$ (n مرتبه است)

56) $(KA)^{*} = K^{n-1}A^{*}$

57) $|(A^{*})^{*}| = |A|^{(n-1)^{2}}$

58) $(A^{*})^{*} = |A|^{n-2}$

59) $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$

دترمینان

60) اگر سطر یا ستون پیدا کردیم که درایه‌های آن مضرب سطر یا ستون دیگری باشند آن‌گاه $\det(A)=0$

61) $|A^T|=|A|$

62) اگر B و A مربعی و هم مرتبه باشند $|BA|=|AB|=|A||B|$

63) در ماتریس 2×2 افزودن یا کاستن مقداری ثابت از همه‌ی درایات $\det$ را تغییر نمی‌دهد.

64) $\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$

---

65) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g\pm ka & h\pm kb & i\pm kc \end{vmatrix}$

---

66) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x\pm x' & y\pm y' & z\pm z' \end{vmatrix}$

67) اگر سطر یا ستونی را در K ضرب کنیم دترمینان (K) برابر می‌شود.

68) $|KA|=K^n|A|$ (n مرتبه ماتریس)

---

69) در $\det$ می‌توان هر سطری را با سطر دیگری یا ستون با ستون دیگری را جمع و تفریق کرد بی‌آنکه $\det$ تغییر کند.

---

70) قوانین **det** برای ماتریس $n\times n$ $\quad |A^{-1}\pm B^{-1}|=\dfrac{|B\pm A|}{|A||B|}$

71) $|AB| = |BA| = |A||B|$

72) $|A^T| = |A|$

73) $|A^n| = |A|^n$

74) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

➢ محاسبه‌ی سریع $\det(3\times 3)$

75) $$A = \begin{array}{c} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{array}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_1 = (a,b,c) \\ \vec{V}_2 = (d,e,f) \\ \vec{V}_3 = (g,h,i) \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = \vec{V}_3 \underset{\text{ضرب نقطه‌ای}}{.} (\vec{V}_1 \underset{\text{ضرب خارجی}}{\times} \vec{V}_3)$$

---

76) $I^{-1} = I$

77) $(rI)^{-1} = \dfrac{1}{r} I$

78) $$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

79) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

80) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

81) $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B \neq BA^{-1}$

82) $AB=I \Rightarrow \begin{cases} A^{-1}=B \\ B^{-1}=A \end{cases}$

83) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

84) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

85) $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}=A^{-n}$

86) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

87) اگر $A=A^{T}$ یا $-A=A^{T} \Rightarrow A^{-1}=(A^{-1})^{T}$ یا $(-A^{-1})=(A^{-1})^{T}$

88) $(A^{-1}BA)^{n}=A^{-1}B^{n}A$

89) $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

90) $|A^{-1} \pm B^{-1}|=\frac{|B \pm A|}{|A||B|}$

---

* ماتریس معکوس

91) $A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}$

92) $|A^{*}|=|A|^{n-1}$

A_{ji} : همسازه‌ی سطر jام و ستون iام از ماتریس A

93) درایه‌ی سطر i ام و ستون j ام از A^{-1} $=\frac{A_{ji}}{|A|}$

---

94) $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow R^{-1}(\theta)=R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

➢ ماتریس تبدیل‌های خطی

95) $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)\Rightarrow$ ماتریس $=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

96) $T(x,y)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(ax+by,cx+dy)$

97) $S'=|\det(A)|S$

اگر شکلی با مساحت S تحت تبدیل ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ به شکل دیگری تبدیل شود مساحت شکل جدید S' به صورت روبروست .

98) اگر ماتریس یک تبدیل A و تبدیل دیگری B باشد و ماتریس تبدیل متوالی این دو خواسته شد آن‌ها را از آخر در هم ضرب می‌کنیم. ($BA=$ماتریس نهایی)

➢ ماتریس دوران (ویژگی‌ها):

99) $R_\alpha.R_\beta=R_\beta.R_\alpha=R_{(\alpha+\beta)}$

100) $|R_\alpha|=1$ دترمینان

101) $(R_\alpha)^{-1}=(R_\alpha)^T=R_{(-\alpha)}$

102) $R(2K\pi+\alpha)=R_\alpha$

103) $(R_\alpha)^n=R_{(n\alpha)}$

فصل پنجم

➢ مدل ماتریس دستگاه معادلات خطی:

$$\textbf{1)}\quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow X=A^{-1}B\neq BA^{-1}$$

$$2)\quad |A|=0\begin{cases} \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'} & \text{۲ خط موازی بدون جواب} \\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'} & \text{۲ خط منطبق بی‌شمار جواب} \end{cases}$$

---

3) $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}$ و $|A|\neq 0$ ۲ خط متقاطع و یک جواب

➢ حل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به روش کرامر:

$$4)\quad \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

5) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب مجهول A

$$6)\quad A_1=\begin{bmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{bmatrix}\Rightarrow x=\frac{|A_1|}{|A|}$$

$$7)\quad A_2=\begin{bmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{bmatrix}\Rightarrow y=\frac{|A_2|}{|A|}$$

$$8)\quad A_3=\begin{bmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{bmatrix}\Rightarrow z=\frac{|A_3|}{|A|}$$

➢ تعداد جواب‌های معادله ۳ مجهولی توسط دترمینان‌ها :

9) $|A| \neq 0$ جواب منحصر به فرد

10) $|A| = 0 \begin{cases} |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0 & \text{بی‌شمار جواب} \\ \text{در غیر این صورت} \Rightarrow \text{جواب ندارد} & \end{cases}$

➢ روش حذفی گاوس؛

11) $\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$

به کمک جمع و تفریق ستون‌ها و سطرها در ماتریس که از ویژگی‌های محاسبه‌ی det است (ابتدا a' را صفر می‌کنیم سپس a'' سپس b'')