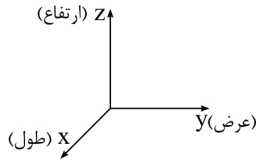
هندسه تحلیلی

فصل اول

1) 

نام‌گذاری محورها

2) $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+x^2}$ فاصله‌ی نقطه‌ی M به مختصات (x,y,z) از مبدأ

---

3) (x,y,z) فاصلهٔ نقطهٔ از محورها
$$\begin{cases} d=\sqrt{y^2+z^2} & \text{فاصله از محور } x\text{ها} \\ d=\sqrt{x^2+z^2} & \text{فاصله از محور } y\text{ها} \\ d=\sqrt{y^2+x^2} & \text{فاصله از محور } z\text{ها} \end{cases}$$

---

4) (x,y,z) فاصلهٔ نقطهٔ از صفحات
$$\begin{cases} d=x\to(yoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d=y\to(xoz) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \\ d=z\to(xoy) & \text{فاصله از صفحه‌ی} \end{cases}$$

---

5) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ فاصله‌ی ۲ نقطه به مختصات (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) از هم

---

6) $P:\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ مختصات وسط پاره خط متصل‌کننده‌ی دو نقطه‌ی (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2)

---

7) محل برخورد ۳ میانه‌ی مثلث
$$\begin{cases} A(x_1,y_1,z_1) \\ B(x_2,y_2,z_2) \\ C(x_3,y_3,z_3) \\ G:\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) \end{cases}$$

8) (x,y,z) تصویر نقطه‌ی
نسبت به صفحات مختصات
$\begin{cases} (x,y,\text{صفحه}) & \text{نسبت به } (xoy) \\ (x,\text{صفحه},z) & \text{نسبت به } (xoz) \\ (\text{صفحه},y,z) & \text{نسبت به } (yoz) \end{cases}$

---

9) (x,y,z) تصویر نقطه‌ی
نسبت به محورهای مختصات
$\begin{cases} (x,o,o) & \text{نسبت به محور } x\text{ها} \\ (o,y,o) & \text{نسبت به محور } y\text{ها} \\ (o,o,z) & \text{نسبت به محور } z\text{ها} \end{cases}$

---

10) قرینه $=2\times$ تصویر $-$ نقطه

نسبت به صفحه — نسبت به محور — نسبت به محور

---

11) $|\vec{V}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\vec{V}(a,b,c)$ طول بردار به مختصات

---

12) $M\vec{a}=(Ma_1,Ma_2,Ma_3)$ ضرب عدد M در بردار

---

13) $|M\vec{a}|=|M||\vec{a}|$

---

14) (a',b',c') و (a,b,c) اگر ۲ بردار $\Rightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ موازی باشند

---

15)
$\begin{cases} \vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| & \text{مستطیل} \\ |\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b}) & \text{لوزی} \\ \vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow|M\vec{a}+n\vec{b}|=|M\vec{a}-n\vec{b}| & \text{تعمیم نکته مستطیل} \end{cases}$

---

16) $e_a=\frac{1}{|\vec{a}|}\times\vec{a}\Rightarrow e_a=\left(\frac{x}{|\vec{a}|},\frac{y}{|\vec{a}|},\frac{z}{|\vec{a}|}\right)$ بردار یکه

---

17) $\vec{V}=(a,b,c)\Leftrightarrow\vec{V}=ai+bj+ck$

---

18) $\begin{cases}\vec{i}=(1,0,0)\\ \vec{j}=(0,1,0)\\ \vec{k}=(0,0,1)\end{cases}$

---

19) $u_T=|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ (بردار نیمساز بین ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$)

---

20) ضرب نقطه‌ای (داخلی) $\left.\begin{matrix}a(x,y,z)\\ b(x',y',z')\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=(xx'+yy'+zz')$

---

21) $a.b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ (θ زاویه بین a و b)

---

22) ۳ اتحاد ضرب داخلی

$$\begin{cases}|\vec{a}\pm\vec{b}|=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm2\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\pm2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\ (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\\ (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})\end{cases}$$

---

23) $e_a.e_b=\dfrac{\vec{a}}{|a|}.\dfrac{\vec{b}}{|b|}$

---

24) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

---

25) $\vec{a}.\vec{o}=0$

26) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

27) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2$

28) $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c})\rightarrow$ بی‌معنی

29) $|\vec{a}.\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ نامساوی کشی شوارتز

30) $(r\vec{a}).\vec{b}=\vec{a}.(r\vec{b})=r(\vec{a}.\vec{b})$ r عددی متعلق به R

31) $i.i=j.j=k.k=1$

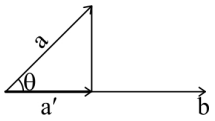
32) $a:(a_1,a_2,a_3)\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{i}=a_1\\ \vec{a}.\vec{j}=a_2\\ \vec{a}.\vec{k}=a_3\end{cases}$

---

33) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}\vec{a}=0\\ \vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c}) \quad \text{یا}\\ \vec{b}=\vec{c}\end{cases}$

---

34) $|\vec{a'}|=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

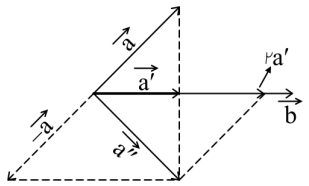


---

35) $\vec{a'}=\left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right).b$ ($\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

(قرینه‌ی $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$)

36) $\vec{a''}=2\vec{a'}+(-\vec{a})$



$\vec{a'}$: تصویر $\vec{a}$

$\vec{a''}$: قرینه‌ی $\vec{a}$

---

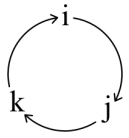
37) $a'.a''=a.a'=|a'|^2$

➢ ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$:

38) $\begin{cases}\vec{a}(x,y,z)\\ \vec{b}(x',y',z')\end{cases}\vec{a}\times\vec{b}\Rightarrow\left(\begin{vmatrix}y & z\\ y' & z'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\right)$

---

39) $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

40) $\begin{cases} i\times j=k \\ j\times k=i \\ k\times i=j \end{cases}\Rightarrow$ 

➤ ویژگی‌های ضرب خارجی:

41) $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

42) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

43) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{a}|$

44) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

45) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$

46) $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}$ یا $\vec{b}=0$

47) $r(\vec{a}\times\vec{b})=r\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(r\vec{b})$

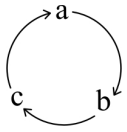
48) $\vec{a}\times(\vec{b}\pm\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$ توزیع‌پذیری دارد

49) $(\vec{b}\pm\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$ توزیع‌پذیری دارد

50) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ شرکت‌پذیری ندارد

51) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

---

52) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ اگر برای ۳ بردار $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ داشته باشیم $\Rightarrow a\times b=b\times c=c\times a$ 

---

53) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

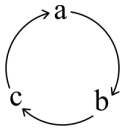
➤ ضرب مختلط:

54) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|.\sin\alpha.\cos\theta$

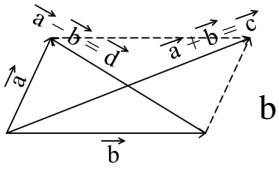
$\vec{c},\vec{b}$ زاویه بین $(b\times c).\vec{a}$ زاویه بین

---

55) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$



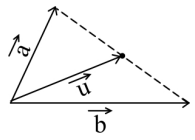
---

56) 

مساحت متوازی‌الاضلاع $S=\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{d}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}\times\vec{d}|\\ \frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}|=\frac{1}{2}|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|\end{cases}$

ساخته‌شده توسط ۲ بردار a و b

---

57) 

$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

مساحت مثلث ساخته‌شده

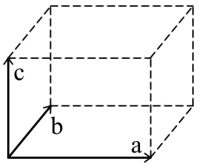
توسط ۲ بردار a و b

58) میانه $\vec{u}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

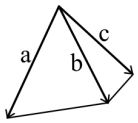
---

59) حجم متوازی‌السطوح بناشده

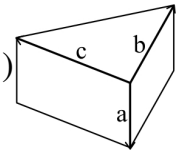
روی ۳ بردار a و b و c $\Rightarrow\begin{cases}V=|a.(b\times c)|=|b.(c\times a)|=|c.(a\times b)|\\ \text{ارتفاع متوازی‌السطوح}=\frac{|a.(b\times c)|}{|b\times c|}\end{cases}$



60) حجم جرم بناشده روی ۳ بردار a و b و c $\Rightarrow V=\frac{1}{6}|a.(b\times c)|$



---

61) 

$\Rightarrow V=\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$ (حجم منشور مثلث‌القاعده بناشده روی ۳ بردار a و b و c)

1) $\vec{u}:\left(\frac{a}{m},\frac{b}{n},\frac{c}{p}\right)\Rightarrow\left(\frac{mx-x_0}{a}=\frac{ny-y_0}{b}=\frac{pz-z_0}{c}\right)$ بردار هادی خط به معادله

---

2) $\vec{u}:(a,b,c)$

معادله پارامتری خط $\Rightarrow\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}$ بردار هادی خط به معادله

➢ معادلات خطوط عمود بر محورها

3) x عمود بر محور: $\begin{cases}x=x_1\\\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

4) y عمود بر محور: $\begin{cases}y=y_1\\\frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

5) z عمود بر محور: $\begin{cases}z=z_1\\\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

➢ معادلات خطوط واقع در صفحات مختصات

6) zoy واقع در: $\begin{cases}x=0\\\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

7) xoz واقع در: $\begin{cases}y=0\\\frac{x-x_1}{a}=\frac{z-z_1}{c}\end{cases}$

8) yox واقع در: $\begin{cases}z=0\\\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\end{cases}$

9) فاصله‌ی نقطه از خط $\Rightarrow d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|}$

$\vec{u}$: بردار هادی خط

A': نقطه‌ای دلخواه از خط

A: نقطه‌ی مورد نظر

---

10) فاصله‌ی ۲ خط موازی $\Rightarrow d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|}$

$\vec{u}$: بردارهای خط‌های ۱ یا ۲

A: نقطه‌ای دلخواه از خط ۱

A': نقطه‌ای دلخواه از خط ۲

---

11) طول عمود مشترک ۲ خط متنافر $= \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AA'}|}{|\vec{u}|}$

ضرب خارجی هادی‌های ۲ خط: $u = u_1 \times u_2$

A: نقطه‌ای دلخواه از خط اول

A': نقطه‌ای دلخواه از خط دوم

➢ وضعیت ۲ خط نسبت به هم:

12) توازی $\Rightarrow \frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3}$ شرط موازی بودن ۲ خط با بردارهای هادی (a_1, b_2, c_3) و (a'_1, b'_2, c'_3)

---

13) شرط توازی را بررسی می‌کنیم اگر یک نقطه‌ی مشترک داشتند منطبق هم هستند. $\Rightarrow$ منطبق

---

14) تقاطع $\Rightarrow$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست از ۳ تساوی دو (t) یکسان بدست آوریم آن‌گاه ۲ خط متقاطعند.

15) متنافر $\Rightarrow (t)$ معادله‌ی پارامتری یک خط را در معادله غیرپارامتری خط دیگر قرار داده و کافیست به ازای حل ۳ معادله دو (t) مختلف یافت شود تا تنافر خطوط اثبات شود.

16) $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ و موازی بردار هادی $\vec{u}(a, b, c)$

معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ $\quad 17)\ \dfrac{x-x_0}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_0}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_0}{z_2-z_1}$

➢ صفحه:

معادله‌ی صفحه شامل نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ و $\quad 18)\ a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

با نرمال عمود بر صفحه‌ی $\vec{N}:(a,b,c)$

یافتن بردار نرمال صفحه در حالات مختلف: (X نماد ضرب خارجی است)

نرمال صفحه‌ای که از یک نقطه بگذرد و با ۲ خط متنافر با هادی‌های u_1 و u_2 موازی باشد. $\quad 19)\ \vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$

نرمال صفحه‌ای که از ۳ نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر یک خط راست بگذرد . $\quad 20)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

نرمال صفحه‌ی شامل نقطه‌ی A و خط d که B نقطه‌ای روی d و $\vec{u}$ هادی d است. $\quad 21)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$

نرمال صفحه‌ای که شامل ۲ خط متقاطع با هادی‌های u_1 و u_2 باشد. $\quad 22)\ \vec{N}=\vec{u}_1\times\vec{u}_2$

نرمال صفحه‌ای شامل یک نقطه و عمود بر۲ صفحه‌ی متقاطع p_1 و p_2 با نرمال‌های N_1 و N_2. $\quad 23)\ \vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$

نرمال صفحه‌ی شامل یک نقطه که عمود بر صفحه‌ی p' و موازی خط d با هادی u است. $\quad 24)\ \vec{N}=\vec{u}\times\vec{N'}$

نرمال صفحه‌ای که از ۲ نقطه‌ی A و B گذشته و با خط d با هادی $\vec{u}$ موازی است. $\quad 25)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$

نرمال صفحه‌ای که شامل خط d با هادی u و عمود بر صفحه‌ی p' با نرمال N' است. $\quad 26)\ \vec{N}=\vec{u}\times\vec{N'}$

نرمال صفحه‌ی شامل خط d با هادی u و موازی خط d' با هادی u'. $\quad 27)\ \vec{N}=\vec{u}\times\vec{u'}$

نرمال صفحه شامل ۲ خط موازی d_1 و d_2 که A نقطه‌ای روی d_1 و B نقطه‌ای روی d_2 است و u هادی $\quad 28)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$

یکی از خطوط است.

نرمال صفحه‌ی گذرا از ۲ نقطه‌ی A و B و عمود بر صفحه‌ی p' به نرمال N'. $\quad 29)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}\times N'$

نرمال صفحه‌ای که شامل یک نقطه است و با صفحه‌ی p' موازی است. $\quad 30)\ \vec{N}=\vec{N'}$

نرمال صفحه‌ی عمود منصف پاره خط $\overrightarrow{AB}$ که شامل نقطه‌ی $\dfrac{A+B}{2}$ است. $\quad 31)\ \vec{N}=\overrightarrow{AB}$

➢ معادلات صفحه در حالت خاص:

32) $ax+by+cz=0$ صفحه‌ی گذرا از مبدأ مختصات با نرمال $\vec{N}:(a,b,c)$

---

33) صفحه‌ی موازی محورها:
$$\begin{cases} ox \text{ موازی} \Rightarrow by+cz+d=0 \\ oy \text{ موازی} \Rightarrow ax+cz+d=0 \\ oz \text{ موازی} \Rightarrow ax+by+d=0 \end{cases}$$

---

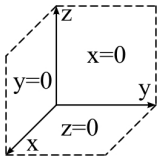
34) صفحه‌ی شامل محورها:
$$\begin{cases} ox \text{ شامل} \Rightarrow by+cz=0 \\ oy \text{ شامل} \Rightarrow ax+cz=0 \\ oz \text{ شامل} \Rightarrow ax+by=0 \end{cases}$$

---

35) صفحات عمود بر محورها (موازی صفحات)
$$\begin{cases} ox \text{ عمود بر} \Rightarrow x+d=0 \\ oy \text{ عمود بر} \Rightarrow y+d=0 \\ oz \text{ عمود بر} \Rightarrow z+d=0 \end{cases}$$
نرمال‌های صفحات به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ اند

---

36) معادلات صفحات مختصات
$$\begin{cases} yoz \text{ صفحه} \Rightarrow x=0 \\ xoz \text{ صفحه} \Rightarrow y=0 \\ xoy \text{ صفحه} \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

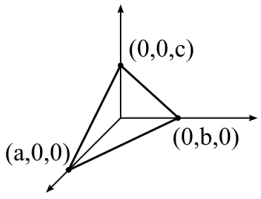


---

37) معادلات صفحات نیمساز
$$\begin{cases} x=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز} \Rightarrow y=z \\ y=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز} \Rightarrow x=z \\ z=0 \text{ صفحه‌ی نیمساز} \Rightarrow x=y \end{cases}$$

---

38) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ معادله‌ی صفحه‌ای که هر ۳ محور را در نقاط $\begin{matrix}(a,0,0)\\(0,b,0)\\(0,0,c)\end{matrix}$ قطع کند.



39) $V=\frac{1}{6}|abc|$ حجم هرم تشکیل‌شده توسط صفحه به رأس مبدأ

40) $S_{abc}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}$ مساحت مثلث حاصل از محل تقاطع صفحه

---

41) $\mathbf{P(A)}$ یعنی صدق نقطه‌ی $\mathbf{A}$ در معادله صفحه $\begin{cases} P(A).P(B)>0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در یک طرف صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)<0 & \text{۲ نقطه‌ی A و B در ۲ سوی صفحه‌اند.} \\ P(A).P(B)=0 & \text{حداقل یک نقطه در صفحه است.} \end{cases}$ بررسی موقعیت ۲ نقطه نسبت به صفحه

---

42) $AH=\dfrac{|ax'+by'+cz'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|P(A)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x',y',z')$ از صفحه‌ی $P(x,y,z): ax+by+cz+d=0$

43) $AH'=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ فاصله مبدأ از صفحه

---

44) فاصله $=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ فاصله‌ی ۲ صفحه‌ی موازی به معادله‌های $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$

---

45) $\vec{u}=\vec{N}\times\vec{N'}$ بردار هادی خط فصل مشترک ۲ صفحه‌ی P و P'

➢ **حالات موازی و انطباق و تقاطع ۲ صفحه:**

46) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\begin{cases} \neq \dfrac{d}{d'} & \text{موازی} \\ = \dfrac{d}{d'} & \text{منطبق} \end{cases}$

---

47) $\vec{N}.\vec{N'}=0$ عمود

---

48) $\cos\theta=\dfrac{|N.N'|}{|N||N'|}$ θ زاویه‌ی ۲ صفحه‌ی متقاطع با نرمال‌های N و N'

➢ **وضعیت خط با هادی $\vec{u}(a,b,c)$ با صفحه به نرمال $N(a',b',c')$**

49) $\vec{u}.\vec{N}=0$ خط موازی صفحه یا منطبق

50) $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$ خط عمود بر صفحه

فصل سوم

مقاطع مخروطی

1) معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R و مرکز (α,β) $(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2=R^2$

---

2) دایره‌ای که مرکزش روی خط $y=ax+b$ است. مرکز $S(\alpha,a\alpha+b)$

---

3) $x^2+y^2+ax+by+c=0\Rightarrow$ مرکز $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

---

4) تعیین وضعیت خط و دایره از راه محاسبه (به جای y در معادله‌ی دایره y خط مذکور را جاگذاری کرده و Δ را می‌یابیم): $\Rightarrow$
- $\Delta>0$ متقاطع
- $\Delta=0$ مماس
- $\Delta<0$ متفارج

---

5) نوشتن معادلهٔ مماس از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی $x^2+y^2+ax+by+cx=0$

- اگر نقطه روی دایره بود مشتق ضمنی گرفته و شیب را می‌یابیم.
- اگر نقطه بیرون دایره بود معادله خط را با شیب M نوشته و فاصله‌ی مرکز دایره تا خط را برابر شعاع قرار داده و M را می‌یابیم.

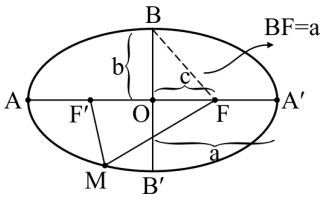
---

6) طول مماس رسم‌شده از نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ بر دایره‌ی $c(x,y):x^2+y^2+cx+by+c=0$ $d=\sqrt{c(x_0,y_0)}$

---

7) اگر معادله کلی اقطار دایره‌ای به صورت $ax+by+c=0$ باشد برای یافتن مرکز دایره کافیست ۲ قطر دلخواه را قطع دهیم.

بیضی

8) 

➢ **روابط بیضی :**

9) $MF+MF'=2a$ نقطه‌ی دلخواه روی محیط بیضی M

10) $b^2+c^2=a^2$ رابطه‌ی طلایی بیضی

---

11) OA برابر BF و BF' است

12) $O=\dfrac{F+F'}{2}$

➢ **اصطلاحات بیضی:** *(با توجه به شکل)*

13) $O:BB'$ و AA' محل برخورد : ***مرکز تقارن***

14) A و A' نقاط یعنی ۲ سر قطر بزرگ : ***رئوس کانونی***

15) B و B' نقاط یعنی ۲ سر قطر کوچک : ***رئوس ناکانونی***

16) F و F' را گویند (F همواره وسط OA نیست) : ***کانون‌های بیضی***

17) $FF'=2C$ پاره خط FF' را گویند : ***فاصله‌ی کانونی***

---

18) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ معادله‌ی بیضی افقی به مرکز (α,β) و قطرهای $2a$ و $2b$

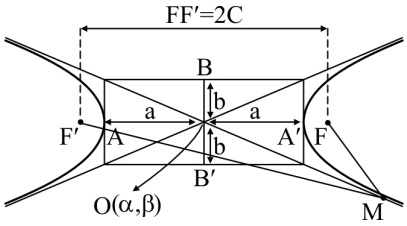
19) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ معادله‌ی بیضی قائم به مرکز (α,β) و قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$

---

20) $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0\begin{cases}A<B & \text{بیضی افقی}\\ A>B & \text{بیضی قائم}\end{cases}$ معادله گسترده‌ی بیضی

21) $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{\text{Min}\{A,B\}}{\text{Max}\{A,B\}}}$ خروج از مرکز

هذلولی

22) 

23) $|MF' - MF| = 2a$ — M نقطه‌ای دلخواه روی یکی از شاخه‌های هذلولی

24) $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow AB = OF = C$ * — رابطه‌ی طلایی هذلولی

➢ اصطلاحات هذلولی

25) **کانون‌ها** : نقاط F و F'

26) **رئوس** : نقاط A و A' که **2** رأس کانونی‌اند و رأس ناکانونی نداریم

27) **فاصله کانونی** : پاره خط FF' که برابر $2C$ است

28) **قطر هذلولی** : فاصله $2a = AA'$ را گویند

29) **محورهای تقارن** : خط AA' یا FF' و همچنین خط BB'

---

30) هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

31) مجانب‌های هذلولی افقی $\Rightarrow \dfrac{x-\alpha}{a} \pm \dfrac{y-\beta}{b} = 0$

---

32) هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} - \dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$

33) مجانب‌های هذلولی قائم $\Rightarrow \dfrac{y-\beta}{a} \pm \dfrac{x-\alpha}{b} = 0$

---

34) شیب مجانب‌های هذلولی افقی $= M = \pm\dfrac{b}{a}$

35) $M = $ شیب مجانب‌های هذلولی قائم $= \pm \frac{a}{b}$

36) در هذلولی، نوع آن (قائم بودن و نبودن آن) به کوچک و بزرگی مفرج x^2 و y^2 ربطی ندارد.

37) اگر علامت $(+)x^2$ بود آن‌گاه هذلولی افقی است.

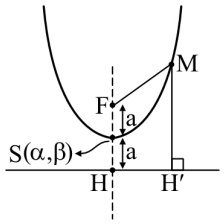
38) اگر علامت $(-)x^2$ بود آن‌گاه هذلولی قائم است.

---

39) اگر معادله‌ی ۲ مجانب یک هذولی به صورت $(ax+by+c=0)$ و $(a'x+b'y+c'=0)$ باشد آن‌گاه معادله گسترده‌ی هذلولی به صورت روبرو است. $(a'x+b'y+c')(a'x+b'y+c') = K$

K مقدار ثابتی است که با داشتن یک نقطه روی هذلولی یافت می‌شود.

سهمی

40) 

$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$

راس $= S(\alpha,\beta)$

---

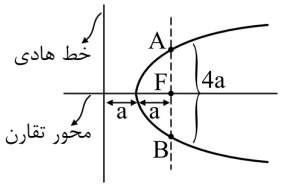
41) $MH' = MF$ M نقطه‌ای دلخواه روی هذلولی (MH' باید عمود بر هادی باشد)

42) $FS = SH = a$

---

43) 2 مشتق نسبت به متغیر درجه $2 \Rightarrow$ یافتن محور تقارن سهمی توسط معادله درجه $= 0$

---

44) 

اگر از کانون خطی موازی خط هادی رسم کنیم سهمی را در 2 نقطه‌ی A و B قطع می‌کند که: $AB = 4a$

45) $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ معادله سهمی افقی

➢ دوران محورهای مختصات:

46) $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a-c}$ فرمول یافتن زاویه‌ی دوران مقطع مخروطی دوران یافته به معادله گسترده $(\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0)$

---

47) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

x و y حاصل را در معادله‌ی گسترده قرار داده و مقطع مخروطی را مربع کامل می‌کنیم.

---

48) فرمول‌های مثلثات مربوط $\begin{cases} 1 + \tan^2 2\theta = \dfrac{1}{\cos^2 2\theta} \\ \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \ , \ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$

---

49) $\underline{\underline{a}}x^2 + \underline{\underline{b}}xy + \underline{\underline{c}}y^2 + dx + ey + f = 0$ تشخیص نوع مقطع به کمک $b^2 - 4ac = \Delta$

$\begin{cases} \Delta < 0 & \text{بیضی، تهی، نقطه} \\ \Delta = 0 & \text{صفحه، تهی، ۲ خط موازی، یک خط، سهمی} \\ \Delta > 0 & \text{هذلولی، ۲ خط متقاطع} \end{cases}$

50) $a = c$ و $b = 0 \Rightarrow$ معادله مربوط به دایره می‌گردد.

51) $A = \begin{bmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ ماتریس مقطع مخروطی

52) دترمینان ماتریس مقطع استاندارد=دترمینان ماتریس مقطع دوران یافته (به شرط یکی بودن مقادیر ثابت K)

53) ماتریس مقطع استاندارد $\Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 = K$

➢ استاندارد کردن مقطع در ۲ حالت خاص:

54) $ax^2+bxy+ay^2=K \xrightarrow{\text{استاندارد}} \left(a-\frac{b}{2}\right)x^2+\left(a+\frac{b}{2}\right)y^2=K$

---

55) $A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$ استاندارد کردن مقطع $ax^2+bxy+cy^2=K$ که دارای ماتریس مقابل است.

$$\begin{cases} \lambda^2-(a+c)\lambda+|A|=0 & \text{تشکیل معادله روبرو} \\ \lambda_1,\lambda_2 & \text{یافتن ریشه‌های معادله} \\ \lambda_1x^2+\lambda_2y^2=K & \text{تشکیل معادله‌ی استاندارد به صورت روبرو} \end{cases}$$

فصل چهارم

ماتریس

1) ماتریس قطری $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ تمام عناصر خارج قطر اصلی 0 اند.

2) ماتریس اسکالر $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی یکسانند.

3) I (واحد) ماتریس همانی $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ اسکالری که قطر اصلی (1) است.

4) ماتریس بالا مثلثی $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی (0) است.

5) ماتریس پایین مثلثی $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی (0) است.

6) ماتریس $(\overline{O}) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریسی که همه درایش 0 باشد.

---

7) ماتریس همانی $\Rightarrow$ عضو خنثی ضرب در ماتریس‌ها

8) ماتریس $(\overline{O}) \Rightarrow$ عضو خنثی جمع در ماتریس‌ها

➢ **ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها:**

9) $AB = 0 \not\Rightarrow BA = 0$

10) $A(BC) = (AB)C$

11) $\begin{cases} A(B+C)=AB+AC \\ (B+C)A=BA+CA \end{cases}$

12) $AI=IA=A$

13) $(rA)(sB)=(rs)AB$

14) $AB=KI \Rightarrow BA=KI$

15) $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

16) $AB=AC \xrightarrow{|A|\neq 0} B=C$

17) $I^n=I$

18) $A^0=I$

19) $A^m+A^n=A^{(m+n)}$

ماتریس خود توان:

20) $A^2=A \Rightarrow A^n=A$ و $(I-KA)^{-1}=I+\left(\frac{K}{1-K}\right)A$ ⇐ تمرین کتاب

21) ویژگی‌ها $\begin{cases} (I-A)^n=I-A \\ (I+A)^n=I+(2^n-1)A \end{cases}$

➢ ماتریس پوچ توان:

22) $A^n=\overline{O}$

23) $Min(n)=$ اندیس پوچ توانی

24) $\begin{cases} |A|=0 \\ a+d=1 \end{cases}$ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط خودتوانی ماتریس

25) $\begin{cases} |A| = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ شروط پوچ توانی ماتریس

---

26) اگر $A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix}$

27) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^n = \begin{bmatrix} K^n & 0 \\ 0 & K^n \end{bmatrix} & n \text{ زوج} \\ A^n = \begin{bmatrix} 0 & K^n \\ K^n & 0 \end{bmatrix} & n \text{ فرد} \end{cases}$

28) اگر $A^2 = KA \Rightarrow A^n = K^{n-1}A$

➢ ماتریس ترانهاده A^T:

29) $(A^T)^T = A$

30) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

31) $(AB)^T = B^T A^T$

32) $(A^n)^T = (A^T)^n$

33) $(rA)^T = r(A^T) \Rightarrow (-A)^T = -A^T$

➢ ماتریس متقارن $A^T = A$:

34) $(A + B)^T = A + B$

35) $(A - B)^T = A^T - B^T = A - B$

36) $A^T = A$ و $B^T = B$

37) $(rA)^T = rA^T = rA$

38) $(A^n)^T = (A^T)^n = A^n$

39) $(A^T)^T = A = A^T$

40) $(A - I)^T = A - I$

41) $(A + I)^T = A + I$

➢ **ماتریس پادمتقارن:**

42) $A^T = -A$

43) $A^T = -A \quad , \quad B^T = -B \Rightarrow (A+B)^T = -(A+B)$

44) $(A-B)^T = A^T - B^T$

45) $(rA)^T = rA^T = r(-A) = -rA$

46) *اگر* A *پادمتقارن باشد توان‌های زوج* A **متقارن است و توان‌های فرد** A **پادمتقارن است.**

47) $A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمتقارن}}$ *ماتریس به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته می‌شود.*

ماتریس کهاد: *سطر* i*ام و ستون* j*ام که از حذف سطر* i *و ستون* j *پدید آمده*

48) $\begin{cases} (M_{ij}) \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \end{cases}$ *کهاد سطر و ستون* 2

همسازه: *درایه‌ی* ij *از ماتریس* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times m}$.

49) $\begin{cases} A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}| \\ \text{مثال} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times -6 = 6 \end{cases}$

---

50) $A_{ij} = 0$ *اگر همسازه درایه‌ای* 0 *شد با تغییرش دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند.*

➢ محاسبه‌ی سرعتی همسازه ماتریس 3×3

51) $\text{همسازه} = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارجی سطر } 3,2) \\ -(\text{ضرب خارجی سطر } 3,1) \\ (\text{ضرب خارجی سطر } 2,1) \end{bmatrix}$

52) $\begin{cases} (A^*)^T = \text{همسازه} \\ (\text{همسازه})^T = A^* \end{cases}$ ماتریس الحاقی = ترانهاده‌ی همسازه

➢ **محاسبه‌ی سریع ماتریس الحاقی** 3×3

53) $A^* = \begin{bmatrix} (\text{ضرب خارج سطر } 3,2) \\ -(\text{ضرب خارج سطر } 3,1) \\ (\text{ضرب خارج سطر } 2,1) \end{bmatrix}$

➢ **ویژگی‌های** A^*

54) $A^*A = AA^* = I|A|$

55) $|A^*| = |A|^{n-1}$ (n مرتبه است)

56) $(KA)^* = K^{n-1}A^*$

57) $|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$

58) $(A^*)^* = |A|^{n-2}$

59) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

دترمینان

60) $\det(A)=0$ اگر سطر یا ستون پیدا کردیم که درایه‌های آن مضرب سطر یا ستون دیگری باشند آن‌گاه

61) $|A^T|=|A|$

62) $|BA|=|AB|=|A||B|$ اگر A و B مربعی و هم مرتبه باشند

63) در ماتریس 2×2 افزودن یا کاستن مقداری ثابت از همه‌ی درایات det را تغییر نمی‌دهد.

64) $$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$$

---

65) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g\pm ka & h\pm kb & i\pm kc \end{vmatrix}$$

---

66) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x\pm x' & y\pm y' & z\pm z' \end{vmatrix}$$

67) اگر سطر یا ستونی را در K ضرب کنیم دترمینان (K) برابر می‌شود.

68) $|KA|=K^n|A|$ (n مرتبه ماتریس)

---

69) در det می‌توان هر سطری را با سطر دیگری یا ستون با ستون دیگری را جمع و تفریق کرد بی‌آنکه det تغییر کند.

---

70) $|A^{-1}\pm B^{-1}|=\dfrac{|B\pm A|}{|A||B|}$ قوانین **det** برای ماتریس $n\times n$

71) $|AB|=|BA|=|A||B|$

72) $|A^T|=|A|$

73) $|A^n|=|A|^n$

74) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

➢ محاسبه‌ی سریع $\det(3\times3)$

75)
$$A=\begin{matrix}\vec{V}_1\\ \vec{V}_2\\ \vec{V}_3\end{matrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{V}_1=(a,b,c)\\ \vec{V}_2=(d,e,f)\\ \vec{V}_3=(g,h,i)\end{matrix}\right\}\Rightarrow |A|=\vec{V}_3.(\vec{V}_1\times\vec{V}_3)$$

ضرب نقطه‌ای — ضرب خارجی

---

76) $I^{-1}=I$

77) $(rI)^{-1}=\dfrac{1}{r}I$

78) $$A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{bmatrix}$$

79) $$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{a}\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ \frac{1}{c} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

---

80) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

81) $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B \neq BA^{-1}$

82) $AB=I \Rightarrow \begin{cases} A^{-1}=B \\ B^{-1}=A \end{cases}$

83) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

84) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

85) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n=A^{-n}$

86) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

87) اگر $A=A^T$ یا $-A=A^T \Rightarrow A^{-1}=(A^{-1})^T$ یا $(-A^{-1})=(A^{-1})^T$

88) $(A^{-1}BA)^n=A^{-1}B^nA$

89) $(A\pm B)^{-1} \neq A^{-1}\pm B^{-1}$

90) $|A^{-1}\pm B^{-1}|=\frac{|B\pm A|}{|A||B|}$

---

91) $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ ✲ ماتریس معکوس

92) $|A^*|=|A|^{n-1}$

---

93) A^{-1} درایه‌ی سطر i ام و ستون j ام از $=\frac{A_{ji}}{|A|}$ A ام از ماتریس i ام و ستون j ام سطر همسازه‌ی : A_{ji}

---

94) $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\Rightarrow R^{-1}(\theta)=R(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

➢ ماتریس تبدیل‌های خطی

95) $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)\Rightarrow$ ماتریس $=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

---

96) $T(x,y)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=(ax+by,cx+dy)$

97) $S'=|\det(A)|S$ اگر شکلی با مساحت S تحت تبدیل ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ به شکل دیگری تبدیل شود مساحت شکل جدید S' به صورت روبروست.

---

98) اگر ماتریس یک تبدیل A و تبدیل دیگری B باشد و ماتریس تبدیل متوالی این دو خواسته شد آن‌ها را از آخر در هم ضرب می‌کنیم. ($BA=$ ماتریس نهایی)

➢ ماتریس دوران (ویژگی‌ها):

99) $R_\alpha.R_\beta=R_\beta.R_\alpha=R_{(\alpha+\beta)}$

100) $|R_\alpha|=1$ دترمینان

101) $(R_\alpha)^{-1}=(R_\alpha)^T=R_{(-\alpha)}$

102) $R(2K\pi+\alpha)=R_\alpha$

103) $(R_\alpha)^n=R_{(n\alpha)}$

فصل پنجم

➢ مدل ماتریس دستگاه معادلات خطی:

1) $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow X = A^{-1}B \neq BA^{-1}$

---

2) $|A|=0 \begin{cases} \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} & \text{۲ خط موازی بدون جواب} \\ \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} & \text{۲ خط منطبق بی‌شمار جواب} \end{cases}$

---

3) $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ و $|A|\neq 0$ ۲ خط متقاطع و یک جواب

➢ حل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به روش کرامر:

4) $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$

5) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب مجهول A

6) $A_1=\begin{bmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{|A_1|}{|A|}$

7) $A_2=\begin{bmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{|A_2|}{|A|}$

8) $A_3=\begin{bmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{bmatrix} \Rightarrow z=\frac{|A_3|}{|A|}$

➢ **تعداد جواب‌های معادله ۳ مجهولی توسط دترمینان‌ها :**

9) $|A| \neq 0$ جواب منحصر به فرد

10) $|A| = 0$ { $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$ بی‌شمار جواب ؛ جواب ندارد $\Rightarrow$ در غیر این صورت }

➢ **روش حذفی گاوس:**

11) $\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$ به کمک جمع و تفریق ستون‌ها و سطرها در ماتریس که از ویژگی‌های محاسبه‌ی det است (ابتدا a' را صفر می‌کنیم سپس a'' سپس b'')