حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

جعفر اوج بگ

گروه آموزشی ریاضی پیام نور مرکز بوکان

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فهرست مطالب

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \qquad (n \geq k) \quad (1)$$

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \quad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغییر n می باشد.

روش کلی حل روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \ldots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \qquad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغییر n می باشد.

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن

روابط بازگشتی ناهمگن از مرتبه k با ضرایب ثابت

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f(n) \qquad (n \geq k) \quad (1)$$

که در آن ضرایب ثابت غیر صفر می باشند. همچنین $f(n)$ یک تابع غیر صفر بر حسب متغییر n می باشد.

جواب عمومی روابط بازگشتی مرتبه دوم ناهمگن

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

که در آن $a_n^{(h)}$ جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = 0$$

و $a_n^{(p)}$ یک جواب خصوصی برای رابطه (1) می باشد. جواب خصوصی یک معادله به جمله $f(n)$ بستگی دارد.

جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

۱. اگر $f(n) = r^n$ که در آن $r \neq 0$:
(۱) r ریشه معادله مشخصه نباشد $a_n^{(p)} = Ar^n$

جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت

۱. اگر $f(n) = r^n$ که در آن $r \neq 0$:

(۱) r ریشه معادله مشخصه نباشد $a_n^{(p)} = Ar^n$

(۲) اگر r ریشه معادله مشخصه با تکرار s باشد $a_n^{(p)} = An^s r^n$

مثال برای حالت اول: r ریشه معادله مشخصه نباشد $a_n^{(p)} = Ar^n$

رابطه بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 1 \quad (n \geq 2) \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

رابطه بازگشتی $a_{n+1} - 2a_n = 1$ ناهمگن است. برای حل آن ابتدا رابطه بازگشتی همگن $a_{n+1} - 2a_n = 0$ را حل می کنیم. سپس جواب خصوصی را با توجه به اینکه $f(n) = r^n$ (که در اینجا $r = 1$ و $n = 1$) می باشد، تعیین می کنیم.

$$a_n = r^n \Rightarrow r^{n+1} - 2r^n = 0 \Rightarrow r^n(r-2) = 0 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین $a_n^{(h)} = c(2)^n$ جواب عمومی رابطه بازگشتی است. می بینم که 1 ریشه معادله مشخصه نیست، لذا $a_n^{(p)} = A$.

ادامه حل مثال

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی ناهمگن به صورت زیر است:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c(2)^n + A$$

در ادامه بایستی ضرایب ثابت A, c را تعیین کنیم.
برای تعیین A جواب خصوصی $a_n^{(p)} = A$ را در دنباله بازگشتی اولیه قرار می دهیم. بنابراین

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \Rightarrow A - 2A = 1 \Rightarrow A = -1$$

لذا $a_n = c(2)^n - 1$؛ کافیست ثابت c را پیدا کنیم که این هم با توجه به شرایط مرزی به سادگی به دست می آید:

$$1 = a_1 = c(2) - 1 \Rightarrow c = 1$$

لذا $(n \geq 2)$ $a_n = 2^n - 1$.

رابطه بازگشتی ناهمگن زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 7 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

حل رابطه بازگشتی همگن $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$،

$$a_n = r^n \Rightarrow r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 5r + 6) = 0$$
$$\Rightarrow r_1 = 2\ ,\ \ r_2 = 3$$

بنابراین جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن عبارتست از:

$$a_n^{(h)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

جمله ناهمگن به صورت $f(n)=(2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$
$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$
$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$
$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$
$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$
$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$
$$4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4$$
$$\Rightarrow 4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$، از طرفی 2 ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$\begin{aligned}
&a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n \\
&An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n \\
&2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2) \\
&4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4 \\
&\Rightarrow 4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4 \\
&\Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = -2
\end{aligned}$$

ادامه حل مثال

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

ادامه حل مثال

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 16 \ , \ c_2 = -9$$

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 16 \ , \ c_2 = -9$$

$$a_n = 16(2)^n - 9(3)^n - 2n(2)^n$$

نکته آخر

همانطور که بیان شد جواب های خصوصی روابط بازگشتی ناهمگن با ضرایب ثابت با توجه به شکل جمله ناهمگن یعنی $f(n)$ مشخص می شود. برای مشاهده تمام حالت های ممکن جدول $7-1$ کتاب درسی را مشاهده کنید.