(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,۱)} Ln(e^{x+yz})$

(۲) $lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲}$

---

(۲) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ باشد. مشتقات نسبی(جزئی) f_x, f_{xx} را در نقطهٔ $(۰,۰)$ به دست بیاورید.

---

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x,y)=xy\ f(\frac{x+y}{xy})$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x,y)$ را به دست آورید.

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x}-y^۲\frac{\partial u}{\partial y}=u\ G(x,y)$$

---

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y)=x^۲-۲xy+\frac{۱}{۳}y^۳-۳y$$

---

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $x=۱, y=۳, dy=-۰/۱, dx=۰/۱$ محاسبه نمایید.

$$f(x,y)=x+Ln(x^۲+y^۲)$$

---

(۶) ماکزیمم ومینی مم تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲$ را به ازای $\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱$ به دست آورید.

---

(۷) فرض کنید که ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۱ & -۱ & m-۱ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ متقارن باشد. **اولاً** مقدار m,n را بیابید، **ثانیاً** $det(A^T)$ را حساب کنید.

---

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+۴y+۳z=۱ \\ ۲x+۵y+۴z=۴ \\ -x+۳y+۲z=-۵ \end{cases}$$

---

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بیابید که بردارهای $(۰,k+۲,۸), (۲,k,-۴), (۱,-۱,k-۱)$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطه $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x+۲y \\ -x \\ ۲x-۵y \end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بیابید.

http://rayeshmand.ir	**http://aoujbag.sub.ir**
رایشمند مرجع تخصصی ریاضی	وبسایت شخصی جعفر اوج بگ

پاسخنامه تشریحی

جواب سوال ۱)

(۱) $lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,۱)} Ln(e^{x+yz}) = Ln(e^{۱+(۰\times۱)}) = Lne = ۱$

(۲) $lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲}$

اگر نقطه را مستقیما جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ به دست می آید. کافیست از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$x = rcos(\theta)\ ,\ y = rsin(\theta)$ لذا وقتیکه نقطه به مبدا میل می کند $r \to ۰$

$$\begin{aligned} lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲} &= lim_{r\to۰} \frac{rcos(\theta)rsin(\theta)}{r^۲cos^۲(\theta)+r^۲sin^۲(\theta)} \\ &= lim_{r\to۰} \frac{r^۲cos(\theta)sin(\theta)}{r^۲(cos^۲(\theta)+sin^۲(\theta))} \\ &= \frac{۱}{۲}sin(۲\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال ۲)

$$f_x(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{\frac{h^۳+۰}{h^۲+۰}-۰}{h} = ۱$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{۳x^۲(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳+y^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۱ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

$$f_{xx}(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f_x(h,۰)-f_x(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{۱-۱}{h} = ۰$$

جواب سوال ۳)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x} - y^۲\frac{\partial u}{\partial y} = x^۲(yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy}) - y^۲(xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})) = \underbrace{xyf(\frac{x+y}{xy})}\ (x-y) = u\ G(x,y)$$

چون $u \neq ۰$ لذا $G(x,y) = x-y$ می باشد.

جواب سوال ۴) داریم: $f(x,y) = x^۲ - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^۳ - ۳y$

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزیی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۲x-۲y = ۰ \Rightarrow x = y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم } y=x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ۰ \Rightarrow -۲x+y^۲-۳ = ۰ \Rightarrow y^۲-۲y-۳ = ۰ \Rightarrow y = ۳,-۱ \end{cases}$$

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-۱,-۱)\ ,\ (۳,۳)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$A = f_{xx} = ۲\ ,\ B = f_{xy} = -۲\ ,\ C = f_{yy} = ۲y \Longrightarrow \Delta = B^۲ - AC$

برای نقطه بحرانی $(۳,۳)$ داریم: $A = ۲ > ۰$ ، از طرفی داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times۶) = ۴-۱۲ = -۸ < ۰$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-۱,-۱)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times-۲) = ۴-۱۲ = ۸ > ۰$ ، لذا نقطه زین اسبی است.

جواب سوال ۵) دیفرانسیل کامل تابع دومتغییره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$f(x,y) = x + Ln(x^۲+y^۲) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = ۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲+y^۲}$$

$$\Longrightarrow df = (۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲})dx + \frac{۲y}{x^۲+y^۲}dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $x=۱, y=۳$ و $dx = ۰/۱, dy = -۰/۱$ خواهیم داشت: $df = ۰/۰۶$.

جواب سوال ۶) بنا به فرض مساله داریم: $g(x,y) = \frac{x}{۲} + \frac{y}{۳} - ۱ = ۰$ ، $f(x,y) = x^۲ + y^۲$ ، لذا تابع لاگرانژین و به تبع آن دستگاه لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$L(x,y)=x^۲+y^۲+\lambda(\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}-۱)\ ،\ \begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=۰\Longrightarrow ۲x+\frac{\lambda}{۲}=۰\Longrightarrow x=-\frac{\lambda}{۴}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=۰\Longrightarrow ۲y+\frac{\lambda}{۳}=۰\Longrightarrow y=-\frac{\lambda}{۶}\\ \frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱\end{cases}$$

با جایگذاری x,y در معادله سوم، مقدار $\lambda=-\frac{۷۲}{۱۳}$ به دست می آید. با جاگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x=\frac{۷۲}{۵۲}\quad,\quad y=\frac{۷۲}{۷۸}\Longrightarrow f(\frac{۷۲}{۵۲},\frac{۷۲}{۷۸})=\frac{۳۶}{۱۳}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقارن است لذا به ازای هر $i,j=۱,۲,۳$ خواهیم داشت: $a_{ij}=a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & m-۱\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$n+۱=۴\ ,\ m-۱=۰\Longrightarrow n=۳\ ,\ m=۱$$

می دانیم در ماتریس های متقارن $A=A^T$ است، لذا:

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}\Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(A^T)=۲\times((-۱\times ۳)-۰)-۱\times((۱\times ۳)-۰)+۴\times((۱\times ۰)-(-۱\times ۴))=۷$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۴ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۵ & ۴ & ۴\\ -۱ & ۳ & ۲ & -۵\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}\right)\Longrightarrow x=۳,y=-۲,z=۲$$

(نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است)

جواب ۹-الف) با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی $det\begin{pmatrix}۱ & -۱ & k-۱\\ ۲ & k & -۴\\ ۰ & k+۲ & -۸\end{pmatrix}\neq ۰$ خواهیم داشت: $۲k^۲-۲k-۱۲\neq ۰$ لذا برای اینکه بردارها مستقل خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده **نباشد**. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k=۳,-۲$ بنابراین به ازای $k\neq ۳,-۲$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $B_۱=\{(۱,۰),(۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۲$ و $B_۲=\{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰),(۰,۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۳$ را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه $B_۱$ تحت f را برحسب پایه $B_۲$ می نویسیم.

$$f\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۱)+(۲\times ۰)\\ -۱\\ (۲\times ۱)-(۵\times ۰)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}-۱\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۰)+(۲\times ۱)\\ ۰\\ (۲\times ۰)-(۵\times ۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\\ -۵\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}+۰\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ ماتریس نمایشگر $=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.

http://rayeshmand.ir	**http://aoujbag.sub.ir**
رایشمند مرجع تخصصی ریاضی	وبسایت شخصی جعفر اوج بگ