پاسخ تشریحی آزمون میان ترم درس آمار و احتمال ۱ (رشته مهندسی صنایع)

■ **سوالات** $OPEN\ \ BOOK$ **(هر سوال ۳ نمره دارد)[مهلت تحویل جواب ها تا تاریخ ۱۳۹۳/۰۲/۲۸ می باشد]**

(۱) فرض کنید $n+1$ آوند به شماره های ۰ تا n در اختیار داریم، به قسمی که i مین آوند دارای i مهره قرمز و $n-i$ مهره سفید است، $0 < i < n$. یک آوند را به تصادف انتخاب کرده و سپس به تصادف مهره های آن را یکی بعد از دیگری و با جایگذاری خارج می کنیم. اگر m مهره اول همه قرمز باشند احتمال آنکه $(m+1)$مین مهره نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل: پیشامدهای زیر را در نظر می گیریم:

A_i : پیشامد انتخاب آوند i–م

R_m یعنی m مهره انتخابی اول همگی قرمز باشند

R پیشامدی که می گوید $m+1$مین مهره قرمز باشد

با فرض وقوع A_i، پیشامدهای R, R_m به طور شرطی مستقل هستند. بنابراین:

$$P(R|R_mA_i) = P(R|A_i) = \frac{i}{n} \qquad (*)$$

بنا بر فرمول بیز داریم:

$$P(A_i|R_m) = \frac{P(R_m|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=0}^{n} P(R_m|A_k)P(A_k)} = \frac{(\frac{i}{n})^m(\frac{1}{n+1})}{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^m(\frac{1}{n+1})} = \frac{(\frac{i}{n})^m}{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^m} \qquad (**)$$

اکنون برای محاسبه $P(R|R_m)$ از برابری زیر استفاده می کنیم:

$$P(R|R_m) = \sum_{i=0}^{n} P(R|R_mA_i)P(A_i|R_m) \qquad ***)$$

در نتیجه با جایگذاری $(*)$ و $(**)$ در $(***)$ خواهیم داشت:

$$P(R|R_m) = \frac{\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{n})^{m+1}}{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^m}$$

اکنون برای محاسبه سری های صورت و مخرج از انتگرال معین کمک می گیریم، از ریاضیات (۱) به یاد داریم که:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)dx}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{n})^{m+1} = \int_0^1 x^{m+1}dx = \frac{x^{m+2}}{m+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+2}$$

به صورت مشابه:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^{m} = \int_0^1 x^{m}dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر در می آید:

$$P(R|R_m) = \frac{\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{n})^{m+1}}{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^m} = \frac{\frac{1}{m+2}}{\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m+2}$$

(۲) بیماری هموفیلی یک بیماری ارثی است. اگر مادری به این بیماری مبتلا باشد، آنگاه با احتمال $\frac{1}{2}$ هر یک از فرزندان پسرش مستقلاً این بیماری را به ارث می برند. در غیر اینصورت هیچ یک از فرزندان این مادر هموفیلی نمی شوند. خانمی مادر ۲ پسر است و پرونده پزشکی خانواده او نشان می دهد که با احتمال $\frac{1}{4}$ این خانم هموفیلی است. مطلوب است احتمال آنکه (الف) اولین پسر فرزند این خانم هموفیلی باشد، (ب) دومین فرزند پسر این خانم هموفیلی باشد، (ج) هیچ یک از فرزندان پسر این خانم هموفیلی نباشند.

حل: پیشامدهای زیر را در نظر می گیریم:

H, H_1, H_2 به ترتیب پیشامد اینکه خانم، پسر اول و پسر دوم او همو فیلی باشد. به شرط وقوع H، H_2, H_1 به طور شرطی مستقل اند. اما اگر یکی از پسران هموفیلی باشد، در این صورت مادر هموفیلی است و با احتمال $\frac{1}{2}$ پسر دیگر نیز هموفیلی است.

الف) داریم:

$$P(H_1) = P(H_1|H)P(H) + P(H_1|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

ب) داریم: مشابهاً:

$$P(H_2) = \frac{1}{8}$$

ج) داریم:

$$P(H_1^c H_2^c) = P((H_1^c H_2^c|H)P(H) + P((H_1^c H_2^c|H^c)P(H^c)$$

از طرفی داریم:

$$P((H_1^c H_2^c|H^c) = 1$$

همچنین:

$$P((H_1^c H_2^c|H) = P(H_1^c|H)P(H) + P(H_2^c|H^c)P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$P(H_1^c H_2^c) = P((H_1^c H_2^c|H)P(H) + P((H_1^c H_2^c|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{16}$$

موفق باشید، اوج یک