۱— فرض کنید $f(x,y)=۴-x^۲-y^۲$، $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid x^۲+y^۲\le ۲y\}$ و میدان برداری $\mathbf{F}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{F}=(xz)\mathbf{i}+(۳yz+x^۲)\mathbf{j}+y^۲\mathbf{k}$ داده شده باشد.

الف) با تعیین اکسترمم‌های تابع f روی ناحیه‌ی D، نشان دهید که برای هر $(x,y)\in D$، $f(x,y)\ge ۰$.

ب) مطلوبست تعیین مقدار عبارت $\iint_D x\,dxdy$.

ج) اگر C خم حاصل از تلاقی رویه به معادله‌ی $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ با استوانه‌ی به معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ و با جهت حرکت مثبت (نسبت به نرمال خارجی کره) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$. (۲۲ نمره)

حل. الف) (۸ نمره) ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^۲$ را به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری این تابع، نقاط بحرانی آن جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=۰$ هستند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-۲x=۰\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-۲y=۰\end{cases}$$

به این ترتیب نقطه‌ی $(۰,۰)$ تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}^۲$ است که روی مرز ناحیه‌ی D قرار دارد. پس این تابع درون D هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. اکنون اکسترمم‌های f روی مرز (یا تحت شرط $g(x,y):=x^۲+y^۲-۲y=۰$) را به دست می‌آوریم. با استفاده از روش لاگرانژ، نقاط مورد نظر جواب‌های معادلات زیر است.

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g(x,y)=۰\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}-۲x=۲\lambda x\\ -۲y=۲\lambda(y-۱)\\ x^۲+y^۲-۲y=۰\end{cases}$$

تنها جواب‌های این معادلات نقاط $(۰,۰)$ و $(۰,۲)$ هستند. با مقایسه‌ی مقادیر تابع f در این نقاط

$$\min_D f=f(۰,۲)=۰\qquad,\qquad \max_D f=f(۰,۰)=۴$$

در نتیجه

$$\forall(x,y)\in D,\quad ۰=\min_D f\le f(x,y)\le\max_D f=۴$$

ب) (۵ نمره) با استفاده از تغییر متغیر قطبی،

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_۰^{\pi}\int_۰^{۲\sin\theta} r\cos\theta\, r\,dr d\theta=\int_۰^{\pi}\cos\theta\frac{۱}{۳}r^۳\Big|_۰^{۲\sin\theta}d\theta\\ &= \frac{۸}{۳}\int_۰^{\pi}\sin^۳\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{۸}{۱۲}\sin^۴\theta\Big|_۰^{\pi}=۰\end{aligned}$$

ج) (۹ نمره) فرض کنیم S قسمتی از نیم‌کره $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^۲+y^۲=۲y$ باشد. بنابر قضیه‌ی استوکس

$$\int_C F\cdot dr=\iint_S curl F\cdot n\,d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ بردار قائم یکه بر S رو به سمت خارج است. داریم

$$curlF = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 3yz + x^2 & y^2 \end{pmatrix} = (-y)i + xj + 2xk$$

در نتیجه

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S xz \, d\sigma$$

فرض کنیم D ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ باشد. با توجه به اینکه S قسمتی از رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ با شرط $(x, y) \in D$ است، خواهیم داشت

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D x\sqrt{4 - x^2 - y^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy = 2 \iint_D x \, dxdy$$

بنابر قسمت قبل، حاصل این انتگرال برابر صفر است.

۲— فرض کنید D ناحیه‌ی محصور توسط خم بسته‌ی $|x| + |y| = 1$ باشد (مطابق شکل زیر)

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_D (x^2 - y^2) \, dxdy$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C (y^3 + x^2 - y)dx + (x^3 + y^2)dy$ که در آن C خم بسته‌ی $|x| + |y| = 1$ و جهت حرکت بر روی آن جهت مثبت باشد. (۱۴ نمره)

حل.الف) (۷ نمره) با معرفی متغیرهای جدید u و v به صورت $u = x + y$ و $v = x - y$، و یا $x = \frac{1}{2}(u + v)$ و $y = \frac{1}{2}(u - v)$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

و از آنجا

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} uv \, dudv = 0$$

ب) (۷ نمره) با استفاده از قضیه‌ی گرین،

$$\begin{aligned} \int_C (y^3 + x^2 - y)dx + (x^3 + y^2)dy &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \\ &= \iint_D (3x^2 - 3y^2 + 1)dxdy \\ &= 3 \iint_D (x^2 - y^2)dxdy + \iint_D dxdy \\ &= 0 + A \end{aligned}$$

که در آن A، مساحت ناحیه‌ی D، برابر ۲ است.

۳— فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، $S_۱$ قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ بالای صفحه‌ی $z=۱$ و $S_۲$ قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ زیر این صفحه باشد. همچنین فرض کنید T ناحیه‌ی محصور توسط $S_۱\cup S_۲$ است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی T.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_۱}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر $S_۱$ رو به سمت خارج کره است.

ج) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_۲}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر $S_۲$ رو به سمت پایین است. (۲۴ نمره)

حل. الف) (۶ نمره) با بردن به دستگاه مختصات کروی، خواهیم داشت

$$T=\{(\rho,\phi,\theta)\mid ۰\le\theta\le ۲\pi\ ,\ ۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}\ ,\ ۰\le\rho\le\sqrt{۲}\}$$

پس

$$\begin{aligned}V &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{\sqrt{۲}}\rho^۲\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\\ &= ۲\pi\Big(\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi\,d\phi\Big)\Big(\int_۰^{\sqrt{۲}}\rho^۲\,d\rho\Big)\\ &= ۲\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)\end{aligned}$$

ب) (۱۰ نمره) تصویر $S_۱$ بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\mid x^۲+y^۲\le ۱\}$ است. با توجه به اینکه بر این ناحیه $z=f(x,y)=\sqrt{۲-x^۲-y^۲}$، داریم

$$N=\frac{x}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}i+\frac{y}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}j+k\quad,\quad n=\frac{N}{\|N\|}\quad,\quad d\sigma=\|N\|dxdy$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\iint_{S_۱}F\cdot n d\sigma &= \iint_R F\cdot\frac{N}{\|N\|}\|N\|\,dxdy=\iint_R F\cdot N dxdy\\ &= \iint_R\Big(\frac{x^۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}+\frac{y^۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}+\sqrt{۲-x^۲-y^۲}\Big)dxdy\\ &= \iint_R\frac{۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}\,dxdy\\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}\frac{۲r}{\sqrt{۲-r^۲}}drd\theta=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)\end{aligned}$$

ج) (۸ نمره)

روش اول. اگر $S:=S_۱\cup S_۲$ آنگاه با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و توجه به اینکه $div\mathbf{F}=۳$، با استفاده از قسمت (الف) خواهیم داشت

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint_T divF\,dV=۳\iiint_T dV=۳\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)$$

به این ترتیب، با استفاده از قسمت (ب)،

$$\iint_{S_۲}F\cdot n\,d\sigma=\iint_S F\cdot n\,d\sigma-\iint_{S_۱}F\cdot n\,d\sigma=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)-۴\pi(\sqrt{۲}-۱)=۰$$

روش دوم. تصویر S_2 بر صفحه‌ی xoy همان ناحیه‌ی R است. با توجه به اینکه برای این رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، داریم

$$N = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j - k = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} i + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} j - k$$

در نتیجه، بر روی این رویه

$$F \cdot N = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

به این ترتیب،

$$\iint_{S_2} F \cdot n d\sigma = \iint_R F \cdot \frac{N}{\|N\|} \|N\| dxdy = 0$$