حل مسائل امتحان پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ — ترم دوم ۹۲—۹۱

---

۱ — فرض کنید $f(x,y) = ۴ - x^۲ - y^۲$، $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x^۲ + y^۲ \leq ۲y\}$ و میدان برداری $\mathbf{F}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{F} = (xz)\mathbf{i} + (۳yz + x^۲)\mathbf{j} + y^۲\mathbf{k}$ داده شده باشد.

الف) با تعیین اکسترمم‌های تابع f روی ناحیه‌ی D، نشان دهید که برای هر $(x,y) \in D$، $f(x,y) \geq ۰$.

ب) مطلوبست تعیین مقدار عبارت $\iint_D x\,dxdy$.

ج) اگر C خم حاصل از تلاقی رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ با استوانه‌ی به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ و با جهت حرکت مثبت (نسبت به نرمال خارجی کره) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$.
(۲۲ نمره)

حل. الف) (۸ نمره) ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^۲$ را به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری این تابع، نقاط بحرانی آن جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = ۰$ هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -۲x = ۰ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -۲y = ۰ \end{cases}$$

به این ترتیب نقطه‌ی $(۰,۰)$ تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}^۲$ است که روی مرز ناحیه‌ی D قرار دارد. پس این تابع درون D هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. اکنون اکسترمم‌های f روی مرز (یا تحت شرط $g(x,y) := x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$) را به دست می‌آوریم. با استفاده از روش لاگرانژ، نقاط مورد نظر جواب‌های معادلات زیر است.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = ۰ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} -۲x = ۲\lambda x \\ -۲y = ۲\lambda(y-۱) \\ x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰ \end{cases}$$

تنها جواب‌های این معادلات نقاط $(۰,۰)$ و $(۰,۲)$ هستند. با مقایسه‌ی مقادیر تابع f در این نقاط

$$\min_D f = f(۰,۲) = ۰ \qquad , \qquad \max_D f = f(۰,۰) = ۴$$

در نتیجه

$$\forall (x,y) \in D, \qquad ۰ = \min_D f \leq f(x,y) \leq \max_D f = ۴$$

ب) (۵ نمره) با استفاده از تغییر متغیر قطبی،

$$\begin{aligned} \iint_D x\,dxdy &= \int_۰^\pi \int_۰^{۲\sin\theta} r\cos\theta r\,drd\theta = \int_۰^\pi \cos\theta \frac{۱}{۳} r^۳\Big|_۰^{۲\sin\theta} d\theta \\ &= \frac{۸}{۳}\int_۰^\pi \sin^۳\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{۸}{۱۲}\sin^۴\theta\Big|_۰^\pi = ۰ \end{aligned}$$

ج) (۹ نمره) فرض کنیم S قسمتی از نیم‌کره $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ باشد. بنابر قضیه‌ی استوکس

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S curlF \cdot n\,d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n} = \frac{۱}{۲}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ بردار قائم یکه بر S رو به سمت خارج است. داریم

$$curl F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & ۳yz + x^۲ & y^۲ \end{pmatrix} = (-y)i + xj + ۲xk$$

در نتیجه

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S xz \, d\sigma$$

فرض کنیم D ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ باشد. با توجه به اینکه S قسمتی از رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ با شرط $(x, y) \in D$ است، خواهیم داشت

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D x\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}} dxdy = ۲ \iint_D x \, dxdy$$

بنابر قسمت قبل، حاصل این انتگرال برابر صفر است.

۲— فرض کنید D ناحیه‌ی محصور توسط خم بسته‌ی $|x| + |y| = ۱$ باشد (مطابق شکل زیر)

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_D (x^۲ - y^۲) \, dxdy$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C (y^۳ + x^۲ - y)dx + (x^۳ + y^۲)dy$ که در آن C خم بسته‌ی $|x| + |y| = ۱$ و جهت حرکت بر روی آن جهت مثبت باشد. (۱۴ نمره)

حل. الف) (۷ نمره) با معرفی متغیرهای جدید u و v به صورت $u = x + y$ و $v = x - y$، و یا $x = \frac{۱}{۲}(u + v)$ و $y = \frac{۱}{۲}(u - v)$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = -\frac{۱}{۲}$$

و از آنجا

$$\iint_D (x^۲ - y^۲) dxdy = \frac{۱}{۲} \int_{-۱}^{۱} \int_{-۱}^{۱} uv \, dudv = ۰$$

ب) (۷ نمره) با استفاده از قضیه‌ی گرین،

$$\begin{aligned} \int_C (y^۳ + x^۲ - y)dx + (x^۳ + y^۲)dy &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy \\ &= \iint_D (۳x^۲ - ۳y^۲ + ۱) dxdy \\ &= ۳\iint_D (x^۲ - y^۲) dxdy + \iint_D dxdy \\ &= ۰ + A \end{aligned}$$

که در آن A، مساحت ناحیه‌ی D، برابر ۲ است.

۳— فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، $S_۱$ قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۲$ بالای صفحه‌ی $z=۱$ و $S_۲$ قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ زیر این صفحه باشد. همچنین فرض کنید T ناحیه‌ی محصور توسط $S_۱\cup S_۲$ است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی T.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_۱}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر $S_۱$ رو به سمت خارج کره است.

ج) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_۲}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر $S_۲$ رو به سمت پایین است. (۲۴ نمره)

حل. الف) (٦ نمره) با بردن به دستگاه مختصات کروی، خواهیم داشت

$$T=\{(\rho,\phi,\theta)\mid ۰\leq\theta\leq ۲\pi\ ,\ ۰\leq\phi\leq\frac{\pi}{۴}\ ,\ ۰\leq\rho\leq\sqrt{۲}\}$$

پس

$$\begin{aligned}V &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\int_۰^{\sqrt{۲}}\rho^۲\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\\ &= ۲\pi\Big(\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sin\phi\,d\phi\Big)\Big(\int_۰^{\sqrt{۲}}\rho^۲\,d\rho\Big)\\ &= ۲\pi(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)\end{aligned}$$

ب) (۱۰ نمره) تصویر $S_۱$ بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲\mid x^۲+y^۲\leq ۱\}$ است. با توجه به اینکه بر این ناحیه $z=f(x,y)=\sqrt{۲-x^۲-y^۲}$، داریم

$$N=\frac{x}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}i+\frac{y}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}j+k\quad,\quad n=\frac{N}{\|N\|}\quad,\quad d\sigma=\|N\|dxdy$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\iint_{S_۱}F\cdot nd\sigma &= \iint_R F\cdot\frac{N}{\|N\|}\|N\|\,dxdy=\iint_R F\cdot Ndxdy\\ &= \iint_R\Big(\frac{x^۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}+\frac{y^۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}+\sqrt{۲-x^۲-y^۲}\Big)\,dxdy\\ &= \iint_R\frac{۲}{\sqrt{۲-x^۲-y^۲}}\,dxdy\\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}\frac{۲r}{\sqrt{۲-r^۲}}drd\theta=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)\end{aligned}$$

ج) (۸ نمره)

روش اول. اگر $S:=S_۱\cup S_۲$ آنگاه با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و توجه به اینکه $div\mathbf{F}=۳$، با استفاده از قسمت (الف) خواهیم داشت

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint_T divF\,dV=۳\iiint_T dV=۳\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۲}-۱)=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)$$

به این ترتیب، با استفاده از قسمت (ب)،

$$\iint_{S_۲}F\cdot n\,d\sigma=\iint_S F\cdot n\,d\sigma-\iint_{S_۱}F\cdot n\,d\sigma=۴\pi(\sqrt{۲}-۱)-۴\pi(\sqrt{۲}-۱)=۰$$

روش دوم. تصویر $S_۲$ بر صفحه‌ی xoy همان ناحیه‌ی R است. با توجه به اینکه برای این رویه $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$، داریم

$$N=\frac{\partial z}{\partial x}i+\frac{\partial z}{\partial y}j-k=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}i+\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}j-k$$

در نتیجه، بر روی این رویه

$$F\cdot N=\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{y^۲}{\sqrt{x^۲+y^۲}}-\sqrt{x^۲+y^۲}=\frac{x^۲+y^۲-(x^۲+y^۲)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}=۰$$

به این ترتیب،

$$\iint_{S_۲}F\cdot n d\sigma=\iint_R F\cdot\frac{N}{\|N\|}\|N\|dxdy=۰$$