فصل اول: اعداد و توابع

اعداد طبیعی: مجموعه این اعداد را با نماد $\mathbb{N}$ نشان می دهیم و $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ توجه داریم که این مجموعه نسبت به اعمال $+$ و $\times$ بسته است. معادلات $x+1=1$ و $x+1=0$ در این مجموعه جواب ندارند.

اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح را با نماد $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم و $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ می باشد. مجموعه اعداد صحیح نسبت به اعمال $+$، $\times$ و $-$ بسته است. عدد ۱ عضو خنثی عمل $\times$ و عد صفر عضو خنثی عمل $+$ است.

نکته: در بین دو مجموعه $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ یک تناضر یک به یک وجود دارد، درواقع میتوان گفت که به بیان ریاضی میتوان یک تابع ۱-۱ و پوشا بین این دو مجموعه برقرار کرد.

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n=2k\\ \dfrac{1-n}{2} & n=2k+1\end{cases}$$

با توجه به اینکه $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ است، آیا می توان گفت تعداد اعضای $\mathbb{N}$ از اعضای $\mathbb{Z}$ کمتر است؟

معادله $2x-1=0$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب نیست پس $\mathbb{Z}$ نیز باید تکمیل شود.

اعداد گویا: این مجموعه را با نماد $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم که $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, (m,n)=1\right\}$. این مجموعه نسبت به اعمال $+$، $\times$ و $-$ بسته است. عضو $\dfrac{1}{a}$ را وارون ضربی a می گوییم. معادله $x^2-2=0$ در $\mathbb{Q}$ ریشه ندارد، بنابراین این مجموعه کاملی از اعداد نیست و نیاز به تکمیل دارد.

توجه داشته باشید که اعداد گویا یک مجموعه چگال را تشکیل می دهند، یعنی بین هر دو عدد گویا یک عدد گویا وجود دارد!

به بیان دیگر هیچ دو عدد گویا را نمی توان یافت که کنار همدیگر باشند. اما با توجه به این که معادله $x^2=2$ در این مجموعه دارای جواب نیست، این مجموعه با وجودچگال بودن دارای رخنه هایی نیز هست.

اعداد حقیقی: مجموعه این اعداد را با $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم، برای معرفی $\mathbb{R}$ ابتدا باید تعریفی از غیر گویا (اصم) داشته باشیم که مجموعه این اعداد با اعداد گویا مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهند. $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$

اعداد اصم یا غیر گویا: اعدادی هستند که بسط اعشاریشان نامتناهی بوده و دارای هیچ دوره گردشی نباشد. این تعریف به طور مستقیم ازتعریف عدد گویا حاصل می شود. همانطور که می دانیم در نمایش بسط اعشاری یک عدد، اگر عدد دارای بسط اعشاری متناهی بوده و یا دارای دوره گردش باشد، آن عدد یک عدد گویا است.

مثلاً اعداد $\sqrt{2} = 1.144213...$ و $\pi = 3.141522...$ اعداد اصم می باشند.

مثال: دو عدد اصم α و β بیاورید بطوریکه α^{β} گویا باشد.

$$\alpha = 2^{\sqrt{2}} \qquad \beta = \sqrt{2} \qquad \alpha^{\beta} = (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^2 = 4$$

خواص جبری $\mathbb{R}$

مجموعه $\mathbb{R}$ با دو عمل + و × دارای خواص زیر است: ($\forall x, y, z \in \mathbb{R}$)

A1) $x + (y + z) = (x + y) + z \qquad x(yz) = (xy)z$ (شرکت پذیری)

A2) $x + y = y + x \qquad xy = yx$ (جابجایی)

A3) $x + x' = x \qquad x \times x^{*} = x$ ($\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists x' \in \mathbb{R} \quad \exists x^{*} \in \mathbb{R}$)

A4) $x + x' = 0 \qquad x \times x^{*} = 1$ (عضو قرینه و وارون ضربی)

A5) $x(y + z) = xy + xz$ (پخش ضرب نسبت به جمع)

اعمال تفاضل و تقسیم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x - y = x + (-y) \qquad x \div y = x \times \frac{1}{y}$$

سوال: نشان دهید: $x.0 = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$A3 \Rightarrow 0 + 0 = 0$$
$$A5 \Rightarrow x.0 = x(0+0) = x.0 + x.0$$
$$A4 \Rightarrow \exists y' \in \mathbb{R} \quad x.0 + y' = 0$$

بنابراین

$$0 = y' + x.0 = (x.0 + x.0) + y' = x.0 + (x.0 + y') = x.0 + 0 = x.0$$

خواص ترتیبی

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ زیر مجموعه ای دارد و $\mathbb{R}^{+}$ که شامل تمام اعدادی است که در خواص زیر صدق می کند، این مجموعه، مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت نامیده می شود.

۱. به ازای هر عدد حقیقی x ، فقط یکی از معادلات زیر درست است:

$$x \in \mathbb{R}^{+} \;\; ; \;\; x = 0 \;\; , \;\; -x \in \mathbb{R}^{+}$$

۲. اگر $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ آنگاه $x + y \in \mathbb{R}^{+}$

اگر فرض کنیم که $\mathbb{R}^+$ موجود است. می توان یک رابطه ترتیبی بصورت زیر را در $\mathbb{R}$ تعریف کرد:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, if \;\; y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x < y$$

یعنی x کمتر از y است و

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, if \;\; y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x > y$$

یعنی x بیشتر از y است.

با توجه به این نمادگذاری و خواص جبری اعداد حقیقی می توان $\mathbb{R}^+$ را به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

۳- برای هر عدد حقیقی x , y دقیقاً یکی از عبارات زیر صحیح است:

$$x > y \quad ; \quad x = y \quad ; \quad x < y$$

۴- اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$

۵- اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ باشد، بطوریکه $x < y$ آنگاه $x + z < y + z$

۶- اگر $x < y$ و $0 < z$ باشد، آنگاه $xz < yz$ و اگر $z < 0$ آنگاه $xz > zy$

مثال: نشان دهید $1 > 0$

طبق رابطه ۳ ، $1 > 0$ یا $1 < 0$ است.

طبق رابطه ۶ خواهیم داشت:

$$if \quad 0 > 1 \Rightarrow -1 > 0 \Rightarrow (-1)(-1) > 0 \times (-1) \Rightarrow 1 > 0$$

که با فرض $1 < 0$ در تناقض است. بنابراین $1 > 0$ است.

مجموعه های کراندار و بی کران

فرض کنید S یک زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشد.

* S از بالا کراندار است، اگر

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \ni \forall x \in S \ , \ x \le \alpha$$

و α یک کران بالا نامیده می شود.

* S از پایین کراندار است، اگر

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \ni \forall x \in S \ , \ x \ge \beta$$

و β یک کران پایین نامیده می شود.

* S یک مجموعه کراندار نامیده می شود، اگر از بالا و پایین کراندار باشد. در غیر این صورت S یک مجموعه بی کران است.

سوال: نشان دهید مجموعه تهی یک مجموعه کراندار است.

از آنجایی که $\varnothing$ هیچ عضوی ندار، دو عدد حقیقی یک کران بالا و یک کران پایین برای $\varnothing$ می باشد. بنابراین کراندار است.

سوال: مجموعه $S = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ کراندار است. می توان ۲ را کران بالا و ۲- را کران پایین در نظر گرفت.

مثال: مجموعه $\mathbb{N}$ از پایین کراندار است اما از بالا کراندار نیست.(چرا؟) هر عدد $\beta \le 1$ را می توان به عنوان کران پایین در نظر گرفت.

مثال: مجموعه $S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ کراندار است. هر عدد حقیقی $\alpha \ge 1$ یک کران بالا و هر عدد حقیقی $\beta \le 0$ یک کران پایین آن می باشد.

کوچکترین کران بالا یا Supremum (زبرینه)

فرض کنید S یک زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشد. عضو M کوچکترین کران بالای S نامیده می شود. اگر:

۱) M یک کران بالای S باشد، یعنی $\forall x \in S \quad M \ge x$

۲) اگر α یک کران بالای M باشد، آنگاه $M \le \alpha$

با توجه به تعریف کران بالا می توان دید که Supremum منحصر بفرد است که آنرا با نماد sup S نمایش می دهیم:

$$M = \sup S$$

بزرگترین کران پایین یا infimum (زیرینه)

فرض کنید S یک زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشد، عضو m بزرگترین کران پایین S نامیده می شود. اگر:

۱) m یک کران پایین S باشد. یعنی $\forall x \in S \quad x \geq m$

۲) اگر β یک کران پایین S باشد، آنگاه $\beta \leq m$

مثال: اگر $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ باشد، آنگاه $\inf S = 0 \notin S$ و $\sup S = 1 \in S$ است.

سوال: فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}$ باشد، آنگاه نشان دهید $-\sup\{-S\} = \inf S = m$

$$m = \inf S \Rightarrow \begin{cases} \forall \Delta \in S \qquad m \leq \Delta \\ \\ if \quad \beta \leq \Delta \Rightarrow m \geq \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \Delta \in -S \qquad -m \geq -\Delta \\ \\ -\beta \geq -\Delta \Rightarrow -m \leq -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall -\Delta \in -S \qquad -m \geq -\Delta \\ \\ if \quad -\beta \geq -\Delta \Rightarrow -m \leq -\beta \end{cases}$$

عبارت فوق تعریف $\sup\{-S\}$ می باشد. یعنی

$$-m = \sup\{-S\} \Rightarrow m = -\sup\{-s\} = \inf S$$

حداکثر و حداقل (Maximum , Minimum)

* اگر $\sup S \in S$ باشد، آن را حداکثر S می نامیم و با نماد $\max S$ نشان می دهیم.
* اگر $\inf S \in S$ باشد، آن را حداقل S می نامیم و با نماد $\min S$ نشان می دهیم.

اصل کامل بودن

هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد، دارای Supremum می باشد.

گزاره: هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از پایین کراندار است، دارای عضو infimum می باشد.

اثبات: تعریف می کنیم $S_1 = \{-\Delta | \forall \Delta \in S\}$. بنابراین S_1 از بالا کراندار است و بنا به خاصیت کامل بودن دارای عضو sup می باشد. حال باید ثابت کنیم $-\sup S_1 = \inf S$ می باشد که قبلاً ثابت شده است.

" گزاره " خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

به ازای هر عدد حقیقی x ، عددی طبیعی مانند n وجود دارد، بطوریکه $n > x$

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ni \ n > x$

اثبات: فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی $n \le x$. این بدین معنی است که اعداد طبیعی از بالا کراندار می باشند. (x یک کران بالاست) بنابراین بنا به خاصیت کامل بودن، $\mathbb{N}$ دارای sup می باشد. فرض کنید $1 < M = \sup \mathbb{N}$ بنابراین $M > M - 1$ و از این رو $M - 1$ یک کران بالای $\mathbb{N}$ نیست پس عددی مانند $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد، بطوریکه $n + 1 > M$. اما بدین معنی است که $n + 1 \in \mathbb{N}$ و $M < n + 1$ که با sup بودن M در تناقض است.

نتایج خاصیت ارشمیدسی

نتیجه ۱: $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists m \in \mathbb{N} \ \ni -m < x$

نتیجه ۲: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ni \frac{1}{n} < \varepsilon$

اثبات: فرض کنیم $x = \frac{1}{\varepsilon}$ و خاصیت ارشمیدسی را بکار ببرید.

نتیجه۳: $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists m, n \in \mathbb{N} \ \ni -m < x < n$

نتیجه۴: بزرگترین عدد صحیح k که در نامساوی های $-m \le k \le n$ و $k \le x$ صدق می کند، جزصحیح x نامیده می شود و با نماد $[x]$ نمایش داده می شود.

$[x] \in \mathbb{Z} \quad , \quad [x] \le x < [x] + 1$

توان

برای هر عدد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم:

* $a^n = a \times a \times \cdots \times a$

* $a^0 = 1 \ , a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad a \neq 0$

خواص مقدماتی زیر، نتایجی هستند که از خ.اص جبری اعداد حقیقی و تعاریف فوق نتیجه می شوند:

1- $(a_1 a_2)^n = a_1^n a_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} | a_1, a_2 \neq 0 \ \ if \ \ a \leq 0$

2- $\left(a^m\right)^n = a^{mn} \quad a^{m+n} = a^m . a^n \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z} \ , a \in \mathbb{R}$ (اگر $m \leq 0$ یا $n \leq 0$ باشد و $a \neq 0$)

3- $if \quad n \in \mathbb{N} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \ , \ 0 \leq b_1 \leq b_2 \Rightarrow b_1^n \leq b_2^n$

فصل دوم: مجموعه اعداد مختلط

معادله $x^2+1=0$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه نمی باشد، یعنی بر روی محور اعداد حقیقی نقطه ای را نمی توان یافت که در معادله فوق صدق کند. حال فرض کنید $i=\sqrt{-1}$ (هر چند در $\mathbb{R}$ بی معنـی اسـت) بنـابراین $i^2=-1$ و معادله فوق دارای جواب $x^2=i^2$ خواهد بود.

مثال: معادله $x^2+7=0$ را در نظر بگیرید:

$$x^2=-7=i^2 7 \qquad\qquad x=\pm i\sqrt{7}$$

یک عدد مختلط همواره به صورت یک زوج مرتب $z=(x,y)$ که $x,y\in\mathbb{R}$ است. بـه صـورت نمـادین $(x,0)$ بـه عنوان یک عدد حقیقی و $i=(0,1)$ به عنوان یک عدد مختلط در نظر گرفته می شود.

یک عدد مخـتلط بـه صـورت $a+ib$ تعریـف مـی شـود کـه در آن a و b دو عـدد حقیقـی و I را واحـد موهـومی گویند.(Imaginary unit)

$$\mathbb{C}=\left\{z\ :\ z=a+ib\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\ ,\ i=\sqrt{-1}\right\}$$

سوال: ریشه های معادله $x^2+4x+6=0$ را بیابید؟

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-6}}{1}=-2\pm\sqrt{-2}=-2\pm i\sqrt{2}$$

نکته: توجه داشته باشید، اگر در یک عدد مختلط $b=0$ باشد، عدد حاصل یک عدد حقیقی می باشد. بنابراین $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

نکته: اگر $z=a+ib$ باشد، قسمت حقیقی z را با $\mathrm{Re}(z)$ نشان داده و قسمت موهومی آن را با $\mathrm{Im}(z)$ نشان می دهند.

$$\mathrm{Re}(z)=a \qquad \mathrm{Im}(z)=b$$

نکته: این مجموعه داری خاصیت ترتیبی نمی باشد، یعنی نمی توان اعضای آن را بر حسب بزرگی یـا کـوچکی مرتـب کرد(بر خلاف اعداد حقیقی)

عملیات جبری بر روی اعداد

۱- تساوی دو عدد مختلط

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ z_2=a_2+ib_2 \end{array}\right\}\Rightarrow z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2\ ,\ b_1=b_2$$

۲- جمع و تفریق دو عدد مختلط:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$\Rightarrow\ z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$

۳- ضرب دو عدد مختلط:

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i.i^2 = -\sqrt{-1} = -i \qquad i^4 = i^2.i^2 = +1 \qquad i^5 = i^2.i^3 = -1(-i) = i$$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ -i & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$\Rightarrow\ z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \xrightarrow[b_1=-b_2=b]{a_1=a_2=a} a^2 + b^2 + i(-ab+ab) = a^2 + b^2$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$

۴- تقسیم دو عدد مختلط:

توجه داشته باشید که در تعریف عمل تقسیم در دستگاه اعداد حقیقی، ابتدا عضو وارون ضربی را برای دو عدد حقیقی تعریف کردیم و سپس عمل تقسیم را بصورت عمل ضرب تعریف نمودیم.حال سوال طبیعی این است که چگونه می توان عمل تقسیم در $\mathbb{C}$ را به صورت ضرب تعریف کرد؟

برای انجام این کار، نیاز به تعریف مفهومی به نام مزدوج یک عدد مختلط خواهیم داشت.

مزدوج یک عدد مختلط

اگر $z = a + ib$ یک عدد مختلط باشد، مزدوج آن را به صورت $\overline{z} = a - ib$ تعریف می کنیم. با توجه به تعریف مزدوج عدد مختلط تقسیم دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می شود:

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$\Rightarrow\ \frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2} = (a+bi)\frac{1}{c+di} = (a+bi)\frac{c-di}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}, (z_2 \neq 0)$$
$$z_2 = a_2 + ib$$

توجه! مقدار $\left|z.\bar{z}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$ را قدرمطلق یا مدول(mod) عدد مختلط z تعریف می کنند و با نماد $|z|$ $|a+ib|=|z|$ نمایش می دهند.

$$z.\bar{z} = a^2+b^2 \in \mathbb{R} \qquad \bar{z} = a - ib$$

$$z = a+ib \begin{cases} a = \mathrm{Re}(z) \\ b = \mathrm{Im}(z) \\ i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \end{cases}$$

نکته: اگر قسمت حقیقی یک عدد مختلط صفر باشد، به آن موهومی محض گویند.

سوال: حاصل عبارت $z = \dfrac{1+i}{i+2}$ را به صورت جبری بنویسید؟

$$z = \frac{1+i}{i+2}.\frac{2-i}{2-i} = \frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

سوال: اگر $z_1 = 3-2i$ و $z_2 = -1+i$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{z_1}{z_2}$ را بدست آورید؟

$$\frac{3-2i}{-1+i}\times\frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

نکته: در علوم فیزیک و زیر شاخه های آن، از آنجایی که از نماد **i** برای نمایش شدت جریان استفاده می شود، عدد موهومی $\sqrt{-1}$ را با **j** نمایش می دهند. پس $j = \sqrt{-1}$

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

3. $\exists 0 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = z$

4. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C}, z + (-z) = 0$

5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$

6. $\exists 1 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, 1z = z \quad , \quad (1 = (1,0))$

7. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z$

8. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ یا $\left|\prod_{i=1}^{m} z_i\right| = \prod_{i=1}^{m} |z_i|$

9. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$

10. $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

11. $z^{\frac{1}{n}} = \left[re^{i(2k\pi+\theta)}\right]^n = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(2k\pi+\theta)}{n}} \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$

12. $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

13. $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) = \arg(z_2)$

14. $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

15. $|z^n| = |z|^n$

16. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

17. $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ یا $\overline{\prod_{i=1}^{m} z_i} = \prod_{i=1}^{m} \overline{z_i}$

18. $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

19. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

تعریف اعداد مختلط به صورت زوج مرتب

از نقطه نظر منطقی تعریف عدد مختلط به صورت یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی x و y معادل تعریف عدد مختلط است، اگر شرایط زیر برای (x, y) برقرار باشند.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$m(x, y) = (mx, my)$$
$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$if \quad z = x + iy$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv (1,0) \qquad i \equiv (0,1)$$

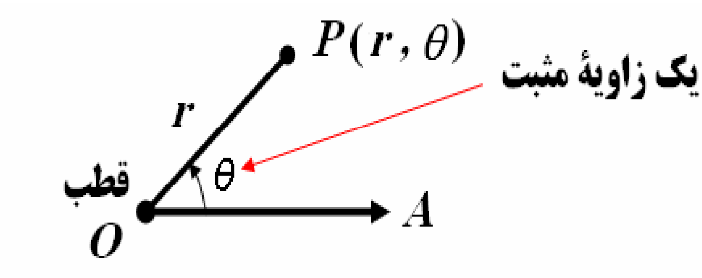
$and \quad (x, y) = x(1,0) + y(0,1)$

سوال: اعداد زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید؟

$$-2 = -2(1,0)$$
$$i^2 = (0,1)(0,1) = -1(1,0) = -1$$
$$i^3 = (0,1)(0,1)(0,1) = -1(0,1) = -i$$

تعبیر هندسی اعداد مختلط و نمایش قطبی آن

از آن جایی که هر عدد مختلط را می توان به صورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد، می توان صورت قطبی این زوج مرتب را به عنوان صورت قطبی عدد مختلط در نظر گرفت.



می توان یک زوج مرتب را به صورت قطبی به شکل $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ نشان داد که در آن

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

حال می توان شکل قطبی عدد مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$$

با توجه به رابطه بالا می توان گفت: $r = \mathrm{mod}(z)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad$ $\theta = \arg(z)$

نکته: به r طول یا مدول عدد مختلط و به θ آرگمان گویند.

توجـه! اگر آرگمان یک عدد به صورت arg نوشته شود، منظور تمام آرگمان های عدد مختلط است ولی اگر به صورت Arg نوشته شود، فقط آرگمان اصلی مد نظر است.

نکته: هر عدد مختلط دارای یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی و یک طول است ولی تعداد بی شماری arg دارد.

برای مثال میتوان معادله دایره را به صورت قطبی بیان کرد:

$$A = x^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \mathrm{A} = \left\{ r^2 = 1 \, , \, 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

رابطه اویلر

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

رابطه اویلر $\begin{cases} \cos\theta + i\,\sin\theta = e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \\ \cos\theta - i\,\sin\theta = e^{-i\theta} = e^{-i(\theta+2k\pi)} \end{cases}$

در حالت کلی: $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\,e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\,\sin y)$

توجه! $if \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow z = r\cos\theta + ir\sin\theta \rightarrow z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta) \Rightarrow z = re^{i\theta}$

سوال: صورت قطبی $z = 1 - i$ را بنویسید؟

$x = 1\,, y = -1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1 \;\Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

صورت قطبی: $z = \sqrt{2}cis\,\frac{7\pi}{4}$

سوال: اگر z یک عدد مختلط باشد، طول و آرگمان e^{z+i} چقدر است؟

$$e^{x+iy-i} = e^{x+i(y+1)} = e^{x}\,e^{i(y+1)} \equiv re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{x} \\ \theta = y+1 \end{cases}$$

قضیه دموآور

اگر $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 cis\,\theta_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 cis\,\theta_2$ باشد، آنگاه $z_1.z_2 = r_1 r_2 cis\,(\theta_1 + \theta_2)$

اثبات:

$$z_1.z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)\right] = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i\,(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)\right]$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

نکته: در ضرب دو عدد مختلط در صورت قطبی،کافی است rها را در هم ضرب و θها را با هم جمع کنیم.

نکته: در تقسیم دو عدد محتلط در صورت قطبی، کافی است rها بر هم تقسیم و θها را از هم کم کنیم.

توجه! اگر $z_1 = z_2 = z$ آنگاه $z_1.z_2 = z^2 = (rcis\,\theta)^2 = r^2 cis\,2\theta$.

صورت کلی قضیه دموآور

اگر $z_1, z_2, ..., z_n$ اعداد مختلط با شند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z_1.z_2...z_n = r_1 r_2 ... r_n cis\,(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$$

حال اگر $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ باشد، آنگاه

$$z_1.z_2...z_n = (rcis\,\theta)^n = r^n cis\,(n\theta)$$

$$z = x + iy = rcis\,\theta \qquad \overline{z} = x - iy = rcis\,(-\theta)$$

سوال: حاصل عبارت $(1+i)^{12}(2+2\sqrt{3}i)$ را بدست آورید؟

$$z_1 = (1+i) = \sqrt{2}cis\,\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow z_1^{12} = (\sqrt{2}cis\,\frac{\pi}{4})^{12} = 64cis\,3\pi = -64$$
$$z_2 = 2 + 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow z_2 = 4cis\,\frac{\pi}{3}$$
$$z_1.z_2 = (64cis\,3\pi)(4cis\,\frac{\pi}{3}) = 256cis\,\frac{4\pi}{3}$$

سوال: در رابطه $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ مقدار x و y را بیابید؟

$$3x+5y+i(2y-x)=7+5i \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y\equiv 7 \\ \\ 2y-x\equiv 5 \end{cases} \Rightarrow x=-1, y=2$$

سوال: نسبت های مثلثاتی $\sin 3\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدست آورید؟

$$z=rcis\theta \Rightarrow z^3=r^3(cis\theta)^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$
$$\cos^3\theta+3\cos^2\theta i\sin\theta+3\cos\theta i^2\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta$$
$$=\cos^3\theta+i\,3\sin\theta\cos^2\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$
$$\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=\cos 3\theta$$
$$3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

توجه! اگر $z=x+iy=rcis\theta$ و $\bar{z}=x-iy=rcis(-\theta)$ آنگاه

$$z.\bar{z}=r^2cis(\theta-\theta)=r^2=x^2+y^2$$

سوال: عبارت $\frac{1+i}{1-i}$ را به صورت قطبی بنویسید؟

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cis(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=i$$

روش دیگر: $\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1-1+2i}{2}=i$

ریشه های اعداد مختلط

اگر $z=rcis\theta$ آنگاه $z^n=r^ncis(n\theta)$ می باشد. با استفاده از این رابطه می توان ریشه یک عدد مختلط را به صورت $z^{\frac{1}{n}}=u=\varphi cis\phi \Rightarrow z=u^n=\varphi^n cisn\phi$ حساب کرد، که در آن:

$$\varphi^n=r\Rightarrow\varphi=\sqrt[n]{r}$$

$$\cos n\phi=\cos\theta$$
$$\Rightarrow n\phi=2k\pi+\theta\Rightarrow\phi=\frac{2k\pi+\theta}{n} \qquad (k=0,1,...,n-1)$$
$$\sin n\phi=\sin\theta$$

پس به طور کلی می توان گفت: $u_{k+1}=\sqrt[n]{r}\ cis\ \dfrac{2k\pi+\theta}{n}$

$$k=0\Rightarrow u_1=\sqrt[n]{r}cis\ \frac{\theta}{n}$$
$$k=1\Rightarrow u_2=\sqrt[n]{r}cis\ \frac{2\pi+\theta}{n}$$
$$k=2\Rightarrow u_3=\sqrt[n]{r}cis\ \frac{4\pi+\theta}{n}$$
$$\vdots$$
$$k=n-1\Rightarrow u_n=\sqrt[n]{r}cis\ \frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}$$
$$if\quad k=n\Rightarrow u=\sqrt[n]{r}cis\ \frac{2n\pi+\theta}{n}=\sqrt[n]{r}cis\,(2\pi+\frac{\theta}{n})==\sqrt[n]{r}cis\ \frac{\theta}{n}=u_1$$

سوال: ریشه پنجم $2+2i$ را بدست آورید؟

$$z=\sqrt[5]{2+2i}\rightarrow r=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}\quad,\quad \tan\theta=\frac{2}{2}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$\varphi=\sqrt[5]{2\sqrt{2}}=\sqrt[5]{\sqrt{8}}=\sqrt[10]{8}$$
$$u_{k+1}=\sqrt[10]{8}\ cis\ \frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{n}\qquad \text{k=0,1,2,3,4}$$

این پنج ریشه بر روی صفحه $\mathbb{R}^2$ ، رئوس یک پنج ضلعی منتظم محاط در دایره ای به شعاع $\sqrt[10]{8}$ می باشد.

سوال: معادلات زیر را حل کنید؟

الف) $t^3-1=0$

$$t=\sqrt[3]{1}\qquad x=1\,,y=0\,,r=1$$
$$\theta=0\quad \varphi=\sqrt[3]{1}=1$$
$$u_{k+1}=cis\ \frac{2k\pi}{3}\qquad \text{(k=0,1,2)}$$

ب) $t^2-1=0$

$$t=\sqrt{1}\qquad x=1\,,y=0\,,r=1$$
$$\theta=0\quad \varphi=\sqrt{1}=1$$
$$u_{k+1}=cis\,(k\pi)\qquad \text{(k=0,1)}$$

ج) $z=\sqrt[6]{i}$

$x=0, y=1, r=1$

$\theta=\frac{\pi}{2} \quad \varphi=\sqrt[6]{1}=1$

$u_{k+1}=cis\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{6}$ (k=0,1,2,3,4,5)

د) $z=\sqrt[3]{1-i}\sqrt{1+i}$

$\sqrt[6]{(1-i)^2(1+i)^3}=\sqrt[6]{(-2i)(2-2i)}=\sqrt[6]{4+4i}$

$x=4, y=4, r=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

$\tan\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4} \qquad \varphi=\sqrt[12]{32}$

$u_{k+1}=\sqrt[12]{32}cis\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{6}$ (k=0,1,2,3,4,5)

سوال: مکان هندسی $|z+4|=|z-2|$ چه شکلی است؟

$|x+iy+4|=|x+iy-2|\Rightarrow\sqrt{(x+4)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\Rightarrow(x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

$\Rightarrow 12x=-12\Rightarrow x=-1$

مکان هندسی مورد نظر خط $x=-1$ می باشد.

تمرینات فصل دوم

تمرین: درستی هریک از موارد زیر را نشان دهید؟

1. $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_2.z_1}$

2. $|z_1.z_2| = |z_1||z_2|$

3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$

4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5. $|z_1 \pm z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

6. $-|z_1.\bar{z}_2| \leq \mathrm{Re}(z_1.\bar{z}_2) \leq |z_1.\bar{z}_2|$

تمرین: نشان دهید n ریشه nام واحد، رئوس یک n- ضلعی منتظم را تشکیل می دهند.

تمرین: اگر z_0 ریشه ای از معادله $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ باشد، آنگاه مزدوج آن نیز ریشه این چند جمله ای است. $(a_i \in \mathbb{R})$

تمرین: اگر w یکی از ریشه های nام واحد باشد،آنگاه $1 + 2w + 3w^2 + \ldots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}$ است.

تمرین: نشان دهید، معادله $|z+3| + |z-3| = 10$ ، معادله یک بیضی است.

تمرین: هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

1. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

2. $|z^n| = |z|^n$

3. $\bar{\bar{z}} = z$

4. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

6. $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

تمرین: اگر $\mathrm{Re}(z) > 0$، آنگاه $Arg(z+\bar{z}) = 0$.

تمرین: ریشه چهارم $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$ را حساب کنید؟

تمرین: ریشه معادلات زیر را بدست آورید؟

1. $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

2. $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = z^5 + z^3 + z$

3. $z^4 + 4z^3 + 7z^2 + 6z + 3 = 0$

تمرین: اگر w ریشه سوم واحد باشد و $w \neq 0$ نشان دهید:

1. $1 + w + w^2 = 0$

2. $(1+w^2)^4 = w$

3. $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$

تمرین: ثابت کنید.

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n = \frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

تمرین: مکان هندسی Z را بیابید؟

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 1| + |z + i - 1| = 3\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} : 4 \leq |z - i + 1| + |z + i - 1| \leq 6\}$

تمرین: ثابت کنید $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$

فصل سوم: تابع

زیر مجموعه ای از حاصل ضرب دکارتی است.($F \subseteq A \times B$)

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad (x, y) \in f \quad , \quad (y,x) \in f^{-1}$$
$$D_f = R_{f^{-1}} \subseteq A$$
$$R_f = D_{f^{-1}} \subseteq B$$

شرط یک به یک بودن : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

تابع پوشا : $\begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ R_f = B \end{array}$

سوال: بررسی کنید کدام یک از توابع زیر پوشا و یک به یک هستند؟

۴)	۳)	۲)	۱)
$f:\mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$	$f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$	$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$	$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
پوشا و یک به یک هست.	پوشا نیست ولی یک به یک است.	پوشاست ولی یک به یک نیست	پوشا و یک به یک نیست.

تابع زوج : $\begin{array}{l} x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{array}$

تابع فرد : $\begin{array}{l} x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{array}$

ترکیب توابع : $(fog)(x) = f(g(x)) \quad : \quad D_f = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$

معکوس ترکیب توابع : $h(x) = (fog)(x) \rightarrow h^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$

سوال: اگر $f(\arcsin(\frac{x-1}{x+1}))=x+2$ باشد، مقدار $f(x)$ را بیابید؟

$$\arcsin(\frac{x-1}{x+1})=t \Rightarrow x(1-\sin t)=1+\sin t \Rightarrow x=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$
$$f(t)=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+2 \Rightarrow f(t)=\frac{3-\sin t}{1-\sin t} \rightarrow f(x)=\frac{3-\sin x}{1-\sin x}$$

سوال: برد تابع $y=-2[x]+2x+1$ را بیابید؟

$$0 \le x-[x]<1 \Rightarrow 0 \le 2x-[2x]<2 \Rightarrow 1 \le 2x-[2x]+1<3 \rightarrow 1 \le y<3$$
$$\Rightarrow R_f=[1,3)$$

سوال: معکوس تابع $y=\ln(\frac{x+1}{x-1})$ را بیابید؟

$$e^y=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow (x-1)e^y=(x+1) \Rightarrow (e^y-1)x=e^y+1 \Rightarrow x=\frac{e^y+1}{e^y-1}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

سوال: نمودار معکوس تابع $y=\ln(x)+x$، نیمساز ناحیه اول را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا $(3,5)$ را بیابید؟

$$\begin{cases} y=\ln x+x \\ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \ln x+x=x \Rightarrow \ln x=0 \rightarrow x=1, y=1$$

$$A(1,1) \qquad A'(3,5)$$
$$|AA'|=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}$$

تمرینات فصل سوم:

تمرین: وارون هر یک از توابع زیر را پیدا کنید؟

1. $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

2. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. $f(x)=x+[x]$

4. $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & x\le 0\\ x^2+3 & x>0\end{cases}$

تمرین: اگر f و g هردو تابع فرد باشند، زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید؟

1. $f\pm g$ 2. $f.g$ 3. $\frac{f}{g}, g\neq 0$ 4. fog 5. gof 6. $fogof$ 7. $gofog$

تمرین: نشان دهید که وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ برابر $f^{-1}(x)=(\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2})^2$ است.

تمرین: تابع بودن یا نبودن توابع زیر را بررسی کنید؟

1. $y^3+y=x$

2. $y^3-y=x$

فصل چهارم: دنباله

هر تابع مانند $a:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک دنباله نامتناهی نامیده می شود. جملات این نباله را با $\{a\}$ نمایش مـی دهـیم و a_n را جمله عمومی یا جمله n ام دنباله می نامیم.

$f(n)=a_n$
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$

همگرایی دنباله ها: آن دسته از دنباله هایی که با افزایش n ، جملات دنباله به یک عدد نزدیک و نزدیک تر می شـوند (حد وجود داشته) می گوییم آن دنباله همگرا یا متناوب است. در غیر این صورت دنباله واگراست.

تعریف همگرایی دنباله: دنباله $\{a\}$ را همگرا به عدد L می گوییم و با نماد $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ نمایش می دهیم، هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ni n\geq M\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon$$

سوال: ثابت کنید $a_n=\frac{1}{n^2}$ به صفر میل می کند؟

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ni n\geq M\Rightarrow\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon\Rightarrow n>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\Rightarrow M=\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1$$

سوال: اگر $a_n=(-1)^n$ باشد، آیا این دنباله همگراست؟

فرض کنیم این دنباله همگرا باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ni n\geq M\Rightarrow|(-1)^n-L|<\varepsilon$$
$$if\quad\varepsilon=1\Rightarrow|(-1)^n-L|<1\Rightarrow\begin{cases}n=2k: & |1-L|<1\Rightarrow-1<1-L<1\Rightarrow 2>L>0\\ \\ n=2k-1: & |-1-L|<1\Rightarrow-1<-1-L<1\Rightarrow 0>L>-2\end{cases}$$

که این یک تناقض است.

سوال: ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$$|a_n-L|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|\frac{n+1-n}{n}\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$
$$M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

قضیه: هر دنباله همگرا حد منحصر به فرد دارد.

اثبات. فرض کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1 : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1 \in \mathbb{N} \ni n \geq M_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2 : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_2 \in \mathbb{N} \ni n \geq M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

حال اگر $M = \max(M_1, M_2)$ باشد و اگر $n \geq M$ آنگاه هر دو رابطه بالا برقرار است. پس:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

در نتیجه:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ni 0 \leq |L_1 - L_2| < \varepsilon \Rightarrow L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

سوال: ثابت کنید دنباله $\{n^2 - 4n\}$ واگراست.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M \in \mathbb{N} \ \ \ni n \geq M \Rightarrow |n^2 - 4n - L| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow |n^2 - 4n - L| < 1 \Rightarrow -1 < n^2 - 4n - L < 1 \Rightarrow L - 3 < (n-2)^2 < L + 5 \Rightarrow n < \sqrt{L+5} + 2$$

رابطه فوق یک تناقض است، زیرا نشان می دهد که اعداد طبیعی از بالا کراندار است.

سوال: ثابت کنید که عدد $L = 0$ حد دنباله $\left\{\dfrac{n^2 - 2}{2n^2 - 9}\right\}$ نیست.

اگر $L = 0$ حداین دنباله باشد، آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M \in \mathbb{N} \ \ \ni \ n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n^2 - 2}{2n^2 - 9}\right| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ , n \geq 3 \Rightarrow \left|\frac{n^2 - 2}{2n^2 - 9}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow n^2 - 1 < \frac{2n^2 - 9}{9} \Rightarrow 2n^2 - 4 < 2n^2 - 9 \Rightarrow -4 < -9$$ که یک تناقض است.

سوال: با استفاده از تعریف حد دنباله ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = 0$$

$$\left|\frac{2 + (-1)^n}{2^n}\right| < \varepsilon \longrightarrow \left|\frac{2 + (-1)^n}{2^n}\right| < \left|\frac{2+1}{2^n}\right| = \frac{3}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow n > \log_2^{3\varepsilon^{-1}} \Rightarrow M = \left[\log_2^{3\varepsilon^{-1}}\right] + 1$$

بنابراین:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad n \geq M \Rightarrow \left|\frac{2 + (-1)^n}{2^n}\right| < \frac{3}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2 + (-1)^n}{2^n}\right| < \varepsilon$$

سوال: نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ (یعنی رشد $n!$ از a^n بیشتر است.)

$$n>k \Rightarrow \frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}.\frac{a}{2}.\frac{a}{3}.\cdots.\frac{a}{n}=(\frac{a}{1}\frac{a}{2}\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{k})(\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n})$$

حال فرض کنید : $k>2a \Rightarrow a<\frac{k}{2}\ ,\ \frac{a}{k+1}<\frac{k}{2(k+1)}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{a}{l}<\frac{1}{2}\Rightarrow l\ge k+1$

$$\frac{a^n}{n!}<a^k(\frac{1}{2})^{n-k}=(2a)^k(\frac{1}{2})^n$$

می دانیم : $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0\Rightarrow \forall\varepsilon>0\quad (\frac{1}{2})^n<\frac{\varepsilon}{(2a)^k}$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{n!}<\frac{\varepsilon}{(2a)^k}\qquad \forall\varepsilon>0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

اعمال روی دنباله ها

اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند، دنباله های $\{a_n\pm b_n\}$، $\{a_nb_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ را می توان دنباله جدید تعریف کرد.

قضیه: اگر $a^n\to L_1$ و $b^n\to L_2$ همگرا باشند، آنگاه

۱) $a_n\pm b_n\to L_1\pm L_2$ ۲) $a_nb_n\to L_1L_2$ ۳) $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{L_1}{L_2}\quad (b_n\ne 0, L_2\ne 0)$

اثبات ۱:

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=L_1+L_2$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L_1:\ \forall\varepsilon>0\ \exists M_1\in\mathbb{N}\ni n\ge M_1\Rightarrow |a_n-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=L_2:\ \forall\varepsilon>0\ \exists M_2\in\mathbb{N}\ni n\ge M_2\Rightarrow |b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

حال اگر $M=\max(M_1,M_2)$ باشد و $n\ge M$ باشد، آنگاه داریم:

$$|a_n+b_n-(L_1+L_2)|=|a_n-L_1+b_n-L_2|\le|a_n-L_1|+|b_n-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=L_1+L_2$$

مثال: دنباله $\left\{\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{n+1}{n}\right\}$ همگراست، زیرا مجموع دو دنباله همگراست.

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ همگرا و $\{b_n\}$ واگرا باشد، دنباله های $\{a_n \pm b_n\}$، $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ واگرا خواهند بود.

اثبات:

if $c_n = a_n + b$ converges $\Rightarrow c_n - a_n$ also converges $c_n - a_n = b_n$ اما طبق فرض b_n واگراست.

if $c_n = a_n b_n$ converges $\Rightarrow \frac{c_n}{a_n \neq 0} = b_n$ also converges اما طبق فرض b_n واگراست.

if $c_n = \frac{a_n}{b_n \neq 0}$ converges $\Rightarrow c_n \times b_n = a_n$ طبق فوق واگراست، اما طبق فرض a_n همگراست.

نکته: اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، در مورد جمع و تفریق، ضرب و تقسیم آن ها حکم کلی وجود نـدارد و حاصل همواره می تواند همگرا یا واگرا باشد.

قضیه: بازای هر عدد حقیقی r دنباله ای از اعداد گویا وجود دارد که همگرا به r است.

$$\exists x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = r$$

اثبات.

$$r - \frac{1}{n} < x_n < r$$

طبق قضیه فشردگی خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

توجه! می توان با استفاده از کسر های مسلسل تقریب برخی اعداد را بدست آورد، مانند $\sqrt{5}$:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = A$$

$$1 + \frac{1}{A} = A \Rightarrow A^2 = 1 + A \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{5} = 2A - 1$$

کرانداری و یکنوایی

دنباله $\{a_n\}$ کراندار از بالا نامیده می شود، اگر $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le U \quad \ni \quad \exists U \in \mathbb{R}$ و U یک کران بالای آن نامیده می شود.

هم چنین این دنباله کراندار از پایین نامیده می شود، اگر $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \ge L \quad \ni \quad \exists L \in \mathbb{R}$ و L یک کران پایین آن می باشد.

دنباله را کراندار گوییم هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد.

$L \le a_n \le U \quad K = \max(|L|,|U|) \Rightarrow |a_n| \le K$

نکته:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \rightarrow n+1 > n \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} > a_n & \text{صعودی} , \quad a_{n+1} \ge a_n \quad \text{غیر نزولی(جملات صعودی یا ثابت)} \\ a_{n+1} < a_n & \text{نزولی} , \quad a_{n+1} \le a_n \quad \text{غیرصعودی(جملات نزولی یا ثابت)} \end{cases}$$

نکته:

دنباله صعودی $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ یا $a_{n+1} - a_n > 0$

دنباله نزولی $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ یا $a_{n+1} - a_n < 0$

توجه! بزرگترین کران پایین را $\inf a_n$ و کوچکترین کران بالا را $\sup a_n$ گویند.

قضیه: هر دنباله همگرا کراندار است.

اثبات: فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ باشد، آنگاه

$\exists K > 0 \quad \ni |a_n| \le K$

$|a_n| = |a_n - L + L| \le |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \quad \forall n \ge M$

$K = \max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{M-1}|,\varepsilon + |L|\} \Rightarrow |a_n| \le K$

نتیجه: هر دنباله همگرا کراندار است و دنباله ای که کراندار نباشد، واگراست.

مثال: دنباله $a_n = (-1)^n$ کراندار است ولی همگرا نیست پس عکس قضیه برقرار نمی باشد.

سوال: آیا دنباله $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ کراندار است؟ چون دنباله همگراست پس کراندار نیز است.

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi$$

قضیه: هر دنباله یکنوا و کراندار همگراست.

سوال: ثابت کنید که دنباله $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ همگراست؟

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{2^n(n+1)^2}{n^2 2^{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{n^2+2n+1}{2n^2}<1$$

$$a_1=\frac{1}{2}\ ,a_2=1\ ,a_3=\frac{9}{8}\ ,a_4=1\ ,a_5=\frac{25}{32}\ ,\ldots\Rightarrow 0<a_n<\frac{9}{8}$$

چون این دنباله یکنوا و کراندار است پس همگراست.

آزمون مقایسه

اگر $0\le a_n<b_n$ باشد، آنگاه داریم:

الف) اگر b_n همگرا باشد، آنگاه a_n نیز همگراست.

ب) اگر a_n واگرا باشد، b_n نیز واگراست.

عمل ضرب

اگر $a_n\to L_1$ و $b_n\to L_2$ باشد،آنگاه $a_nb_n\to L_1L_2$ می شود.حال اگر $|a_n|\le k$ (کراندار) و $b_n\to 0$ باشد، آنگاه $a_nb_n\to 0$

قضیه فشردگی در دنباله ها

اگر $a_n\to L$ و $b_n\to L$ و $a_n<c_n<b_n$ باشد، آنگاه $c_n\to L$ خواهد بود.

اثبات.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L:\ \forall\varepsilon>0\ \exists M_1\in\mathbb{N}\ni n\ge M_1\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon\Rightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=L:\ \forall\varepsilon>0\ \exists M_2\in\mathbb{N}\ni n\ge M_2\Rightarrow|b_n-L|<\varepsilon\Rightarrow L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon$$

حال اگر $M=\max(M_1,M_2)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$L-\varepsilon<a_n<c_n<b_n<L+\varepsilon\Rightarrow L-\varepsilon<c_n<L+\varepsilon\Rightarrow|c_n-L|<\varepsilon\Rightarrow c_n\to L$$

سوال: نشان دهید $a_n = \dfrac{n^2}{\sin n}$ واگراست؟

برهان خلف: فرض کنیم این دنباله همگرا باشد، آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M_1 \in \mathbb{N} \ni n \ge M_1 \Rightarrow \left| \frac{n^2}{\sin n} - L \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{n^2}{\sin n} - L < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \sin n \ge 0 \Rightarrow n^2 < \varepsilon \sin n + L \sin n \Rightarrow n < \sqrt{\varepsilon \sin n + L \sin n} \\ \sin n < 0 \Rightarrow n^2 > \varepsilon \sin n + L \sin n \Rightarrow n > \sqrt{\varepsilon \sin n + L \sin n} \end{cases}$$

که این یک تناقض است، پس فرض غلط و حکم ثابت است.

تمرینات فصل چهارم:

تمرین: اگر دنباله $a_n \to a^*$ و $b_n \to b^*$ باشد،ثابت کنید:

1. $c_n = a_n b_n \to \{c_n\} \to a^* b^*$

2. $c_n = \dfrac{a_n}{b_n} \to \{c_n\} \to \dfrac{a^*}{b^*}$

تمرین: همگرایی،یکنوایی و کرانداری هریک از دنباله های زیر را بررسی کنید؟

1. $a_n = \left\{ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} \right\}$

2. $a_n = \left\{ \cos \dfrac{\pi}{n+2} \right\}$

3. $a_n = \left\{ (1 - \dfrac{1}{n+2}) \cos \dfrac{\pi}{n+2} \right\}$

تمرین: همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید؟

1. $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \cos n\pi \right\}$

2. $\left\{ \dfrac{1}{n} \cos n\pi \right\}$

3. $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}} \right\}$

4. $\left\{ \dfrac{[x] + [2x] + \ldots + [nx]}{n} \right\}$

5. $\left\{ \dfrac{[x] + [2x] + \ldots + [nx]}{n^2} \right\}$

6. $\left\{ \dfrac{[x] + [x^2] + \ldots + [x^n]}{x^n} \right\}$

7. $\left\{ n \left[\dfrac{1}{n} \right] \right\}$

8. $\left\{ \dfrac{[kn]}{n} \right\}$

فصل پنجم: حد و پیوستگی

فرض کنید $y=f(x)$ تابعی باشد که برای تمام مقادیر نزدیک $x=x_0$ مگر خود x_0 تعریف شده باشد. می گوییم حد تابع $f(x)$، وقتی x به سمت x_0 نزدیک می شود، برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

1. $\lim\limits_{x\to 1} 3x-4=-1$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |3x-4+1|<\varepsilon$$

$$|3x-4+1|<\varepsilon \Rightarrow |3x-3|<\varepsilon \Rightarrow 3|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \xrightarrow{|x-1|<\delta} \delta\le\frac{\varepsilon}{3}$$

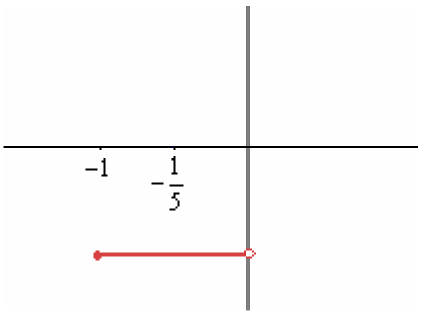
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$$

برای اینکه استلزام منطقی فوق همیشه صحیح باشد، باید : $\delta\le\frac{\varepsilon}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} [x]=-1$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<\left|x+\frac{1}{5}\right|<\delta \Rightarrow |[x]+1|<\varepsilon$$

در واقع هدف پیدا کردن یک همسایگی محذوف از نقطه $x=-\frac{1}{5}$ می باشد که در این همسایگی برای هر ε دلخواه $|[x]+1|<\varepsilon$. با توجه به نمودار تابع در اطراف $x=-\frac{1}{5}$ داریم:



$$\delta<+\frac{1}{5} \Rightarrow \left|x+\frac{1}{5}\right|<\delta<\frac{1}{5} \Rightarrow \left|x+\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5}<x<0$$

$$\Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow |[x]+1|=0<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta<\frac{1}{5}\ \ni 0<\left|x+\frac{1}{5}\right|<\delta \Rightarrow |[x]+1|<\varepsilon$$

حد چپ و حد راست

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L^+ \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<x-a<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L^+\right|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L^- \quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni -\delta<x-a<0 \Rightarrow \left|f(x)-L^-\right|<\varepsilon$$

$$\text{if}\ \ L^+=L^- \Rightarrow f(x)\to L$$

سوال: اگر $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ 3-x & x<1\end{cases}$ باشد، آنگاه ثابت کنید $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

بررسی حد راست : $0<x-1<\delta_1 \Rightarrow |x+1-2|<\varepsilon \Rightarrow \delta_1\le\varepsilon$

بررسی حد چپ : $0<1-x<\delta_2 \Rightarrow |1-x|<\varepsilon \Rightarrow \delta_2\le\varepsilon$

$$\delta\le\min\{\delta_1,\delta_2\}$$

همواره برقرار است. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

1- $\lim_{x\to -2} x^2=4$

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \ni 0<|x+2|<\delta \Rightarrow |x^2-4|<\varepsilon$$

باید بازه ای برای x تعیین کرد که داشته باشیم:

$$0<|x+2|<\delta \Rightarrow |x+2|<\frac{\varepsilon}{|x-2|}$$

اگر مقدار A را طوری در این بازه پیدا کنیم که داشته باشیم $|x+2|<A<\frac{\varepsilon}{|x-2|}$ آنگاه خواهیم داشت $\frac{\varepsilon}{|x-2|}<|x+2|$، یعنی باید یک کران پایین برای $\frac{\varepsilon}{|x-2|}$ تعیین کنیم که در واقع معادل با حداکثر $|x-2|$ باشد.

$$\text{if}\ \ \delta_1=1 \Rightarrow |x+2|<1 \Rightarrow 3<|x-2|<5 \Rightarrow \max(|x-2|)+5$$

پس : $\delta\le\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$

یعنی : $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \ni |x+2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{5}<\frac{\varepsilon}{|x+2|}$

$$\begin{cases} 0<|x+2|<1 \Rightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5} \\ \\ 0<|x+2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}<\dfrac{\varepsilon}{|x+2|} \end{cases}$$ در واقع

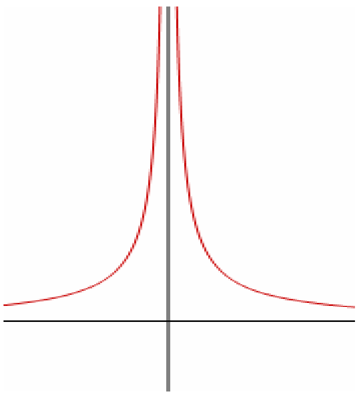
2- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2}{x-2}=7$

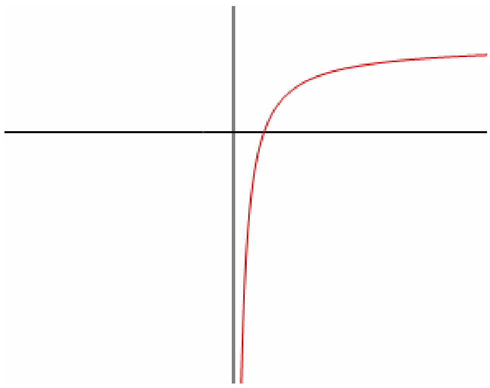
$$\left|\frac{x^2-2}{x-2}-7\right|=|x-3|\frac{|x-4|}{|x-2|}<\varepsilon$$

$$|x-3|<A<\frac{\varepsilon|x-2|}{|x-4|} \qquad A=\min\frac{\varepsilon|x-2|}{|x-4|}$$

$$\delta=\frac{1}{2}\Rightarrow|x-3|<\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}0.5<|x-2|<1.5\\ \\ 0.5<|x-4|<1.5\end{cases}\Rightarrow A=\frac{0.5}{1.5}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow\delta\le\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

حد بی نهایت





$$\lim_{x \to a} f(x)=+\infty \quad \equiv \quad \forall N>0 \quad \exists\delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>N$$
$$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty \quad \equiv \quad \forall N>0 \quad \exists\delta>0 \quad 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<-N$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$\lim_{x\to -3}\left|\frac{5-x}{x+3}\right| = +\infty$$

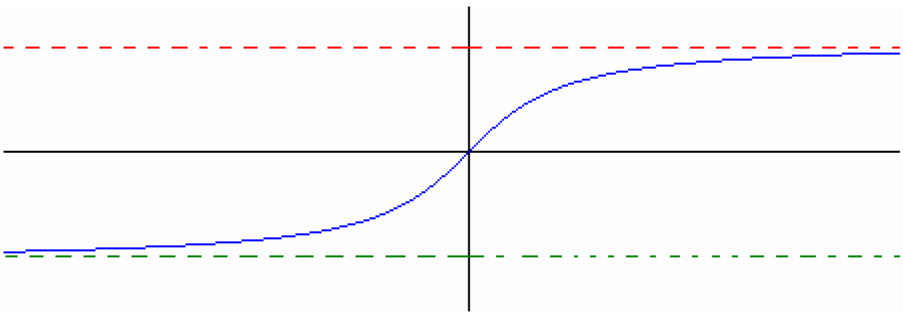
$$\forall N>0 \quad \exists \delta>0 \quad \ni \quad 0<|x+3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{5-x}{3+x}\right|>N$$

$$\left|\frac{5-x}{3+x}\right|>N \Rightarrow |x+3|\frac{1}{|x-5|}<\frac{1}{N} \Rightarrow |x+3|<A<\frac{|x-5|}{N} \qquad A=\min\frac{|x-5|}{N}$$

$$\text{if} \quad \delta=1 \Rightarrow -4<x<-2 \Rightarrow -4-5<x-5<-2-5$$

$$\Rightarrow -9<x-5<-7 \Rightarrow 7<|x-5|<9$$

حد در بی نهایت



$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=L \quad \equiv \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad \ni x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \quad \equiv \quad \forall N>0 \quad \exists M>0 \quad \ni x<-M \Rightarrow f(x)>N$$

سوال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists M>0 \quad \ni \; x<-M \Rightarrow \left|\frac{x}{x-1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x}{x-1}-1\right|=\left|\frac{x-x+1}{x-1}\right|=\left|\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow 1-x>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$x<1-\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow -M<1-\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

قضیه هاین (حد توابع و دنباله ها)

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و دنباله حقیقی $\{a_n\}$ به a همگرا باشد، بطوریکه $\forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\neq a\ ,\ a_n\in D_f$ آنگاه دنباله $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگرا خواهد بود.

اثبات :

فرض
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon & *\\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ \ni n\geq M \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon & **\end{cases}$$

حکم $\forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ \ni n\geq M \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon$

$\xrightarrow{**}\varepsilon=\delta\Rightarrow:\ n\geq M\Rightarrow 0<|a_n-a|<\delta\Rightarrow|f(a_n)-a|<\varepsilon$ حکم برقرار است.

توجه کنید که چون $\forall n:\ a_n\neq a$ پس $0<|a_n-a|$

قضیه فوق ابزاری برای اثبات عدم وجود حد می باشد.

نتیجه: برای اثبات عدم وجود حد یک تابع در نقطه a ، دو دنباله مانند a_n و b_n پیدا کنید، بطوریکه

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\begin{cases}a_n\neq a & a_n\in D_f\\ b_n\neq b & b_n\in D_f\end{cases}$$

و هر دو به a همگرا باشد. حال نشان دهید که دنباله های جدید $\{f(a_n)\}$ و $\{(f(b_n)\}$ به دو عدد متفاوت همگرا باشند.

سوال: ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در هیچ نقطه ای حد ندارد.

فرض کنید، بخواهیم حد این تابع را در نقطه $x=a$ بررسی کنیم. طبق قضایای فصل دنباله ها داریم:

$$\exists x_n\in\mathbb{Q}:\quad x_n\to x_0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}f(x_n)\to 1\\ \\ f(x'_n)\to 0\end{cases}\qquad\Rightarrow 1\neq 0$$
$$\exists x'_n\notin\mathbb{Q}:\quad x'_n\to x_0$$

بنابراین $f(x)$ در هیچ نقطه حد ندارد.

سوال: اگر $f(x)=\begin{cases}a_1 & x\in\mathbb{Q}\\ a_2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ باشد، تابع $g(x)=(x^2-2)f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

$x^2-2=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow\pm\sqrt{2}$

سوال: نشان دهید تابع $f(x)=x[x]$ در نقطه $x=1$ حد ندارد.

$\{a_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}\to 1 \qquad \{b_n\}=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}\to 1 \qquad a_n,b_n\in D_f=\mathbb{R}$

$$f(a_n)=(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{1}{n}\right]=(1+\frac{1}{n})\times 1 \quad \lim f(a_n)=1$$

$1\neq 0$ حد ندارد.

$$f(b_n)=(1-\frac{1}{n})\left[1-\frac{1}{n}\right]=(1-\frac{1}{n})\times 0 \quad \lim f(b_n)=0$$

سوال: ثابت کنید $f(x)=\sin(\frac{1}{2x})$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

$$a_n=\frac{1}{4\pi n}\to 0 \qquad f(a_n)=\sin 4\pi n\to 0$$

حد ندارد.

$$b_n=\frac{1}{\pi+4\pi n}\to 0 \qquad f(b_n)=\cos 4\pi n\to 1$$

سوال: نشان دهید $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

$\{a_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}\to 0 \qquad \{f(a_n)\}=\{f(a_n)\}=\left\{(-1)^n\right\}$ واگراست

پس $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

سوال: ثابت کنید $y=\begin{cases}2x & x\in\mathbb{Q}\\ x+1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است و در تمام نقاط بجز $x=1$ ناپیوسته است.

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ a_n\neq 1\ ,\ \ \{a_n\}\to 1 \qquad f(a_n)=\begin{cases}2a_n & a_n\in\mathbb{Q}\\ \\ a_n+1 & a_n\notin\mathbb{Q}\end{cases} \qquad \Rightarrow f(a_n)\to 2$$

بنا به قضیه هاین : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)\Rightarrow$ تابع در $x=1$ پیوسته است.

حال $a\neq 1$

$$\{a_n\}=\left\{a+\frac{1}{n}\right\}\to a \qquad f(a_n)=2a+\frac{2}{n}\to 2a$$

$$2a\neq a+1 \text{ as } a\neq 1$$

$$\{b_n\}=\left\{a+\frac{\sqrt{2}}{n}\right\}\to a \qquad f(bn)=a+\frac{\sqrt{2}}{n}+1\to a+1$$

بنابراین f در a پیوسته نیست.

عکس قضیه هاین

اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به a $(\forall n: x_n \neq a)$ داشته باشیم،که $\{f(x_n)\}$ به L همگراست. آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = L$

سوال: ثابت کنید $\lim_{x\to -2} x^2 = 4$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{a_n\} \to -2 \Rightarrow \{f(a_n)\} = \{a_n^2\}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = (-2)^2 = 4$$

پیوستگی

تعاریفی برای تابع پیوسته
$$\begin{cases} \\ 1.\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a) \\ 2.\ \forall \varepsilon>0\ \ \exists \delta>0\ \ \ni |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon \\ 3.\ \text{if } \{a_n\}\to a \Rightarrow \{f(a_n)\}\to f(a) \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(\lim\limits_{x\to a} x) \\ 4.\ \text{if } x,y\in\mathbb{R}\ ,D_f=\mathbb{R}\Rightarrow\ |f(x)-f(a)|\le |x-a| \\ 5.\ \lim\limits_{x\to 0} f(x+a)=f(a)\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x+a)=f^+(a) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x+a)=f^-(a) \end{cases} \end{cases}$$

توجه! تعاریف بیان شده معادل هم هستند.

نکته: تابع f را در فاصله $[a,b]$ پیوسته گویند، اگر

۱- به ازای تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد. $\forall c\in(a,b)\to \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

۲- به ازای x=b پیوستگی چپ داشته باشد. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

۳- به ازای x=a پیوستگی راست داشته باشد. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

سوال: اگر تابع f در بازه $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $x\in[a,b]$ و $\forall x\in\mathbb{Q}$ داشته باشیم $f(x)=0$ آنگاه
$\forall t\notin\mathbb{Q}\ni t\in[a,b]\Rightarrow f(t)=0$

هدف: تابع پیوسته باید هم برای اعداد گویا و هم برای اعداد اصم صفر شود.

$\exists x_n\in\mathbb{Q}\ \ \ni x_n\to t$

$f(t)=f(\lim\limits_{x\to\infty} x_n)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)\xrightarrow{f(x)=0} 0$

سوال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right] & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ باشد، مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع پیوسته باشد؟

$$g(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}\Rightarrow g(\frac{1}{n})=n-[n]=0\longrightarrow a_n\to 0\ \ ,\ \ g(a_n)\to 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{g}(\mathrm{a}_n)\neq g(b_n)$$

$$\{b_n\}=\frac{1}{n+\frac{1}{8}}\Rightarrow g(b_n)=n+\frac{1}{8}-n=\frac{1}{8}\longrightarrow b_n\to 0\ \ ,\ \ g(b_n)\to\frac{1}{8}$$

پس $\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$ در هیچ نقطه حد ندارد، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

سوال: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\left[\cot\frac{\pi}{4}x\right] & x<3\\ 2b & x=3\\ \left[\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x\right]+3a & x>3\end{cases}$ در x=3 پیوسته باشد؟

$$\lim_{x\to 3^-}\left[\cot\frac{\pi}{4}x\right]=-1$$

$$\Rightarrow 2b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$f(3)=2b$$

$$-1<\cos\frac{\pi}{4}x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -\sqrt{2}<\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x<-1\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}[\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}x]=-2$$

$$-2+3a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

نکته: اگر f و g دو تابع پیوسته باشند و نتیجه ۴ عمل اصلی بر روی این دو تابع به شرط این که مخرج صفر نشود، همواره پیوسته خواهد بود.

نکته: اگر f و g یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آنگاه جمع و تفریق آن ها ناپیوسته خواهد بود ولی در مورد ضرب و تقسیم چیزی نمی توان گفت.

سوال: تابع $f(x)=\left[(x-1)^2\right]$ در چند نقطه از بازه $(-1,1]$ ناپیوسته است؟

$$(x-1)^2=k\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow x=1\pm\sqrt{k}$$

$k=0\Rightarrow x=1$ $\quad k=1\Rightarrow x=2,0$ $\quad k=2\Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$ $\quad k=3\Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ $\quad k=4\Rightarrow x=1\pm 2$

بنابراین ۶ نقطه در بازه مذکور بدست آمد ($\left\{0,1,1\pm\sqrt{2},1\pm\sqrt{3}\right\}\in(-1,1]$) ولی این تابع در نقطه $x=1$ که تابع صفر می شود، پیوسته است. بنابراین در ۵ نقطه تابع پیوسته نیست.

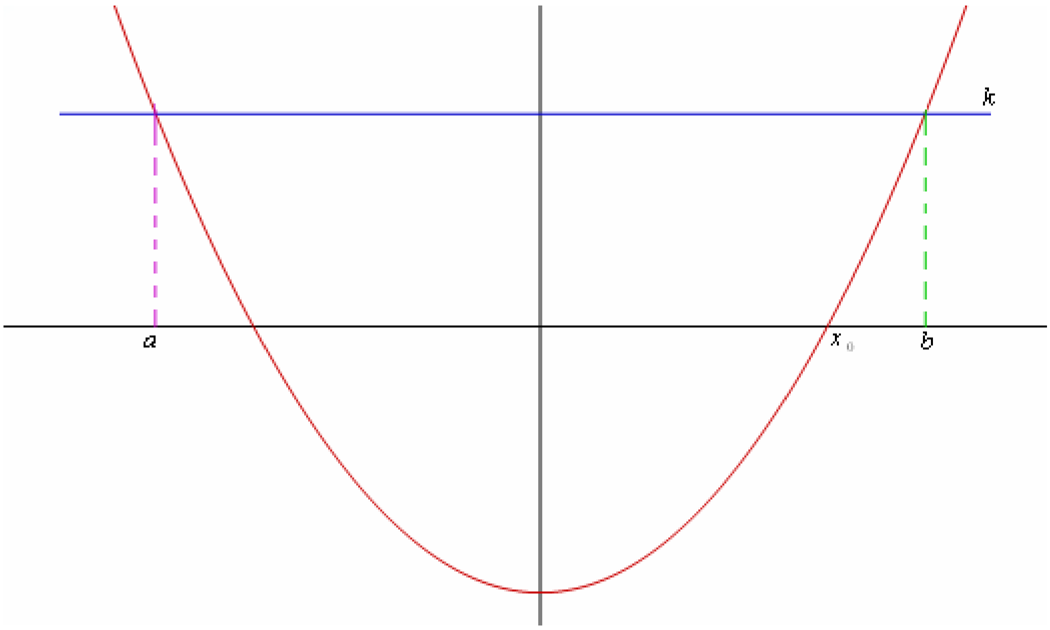
قضیه حد و ترکیب توابع: اگر $\lim_{x\to a}g(x)=b$ و $b\in D_f$ باشد و f نیز در b پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}(fog)(x)=\lim_{x\to a}f(g(x))=f(\lim_{x\to a}g(x))=f(b)$$

مثال: $\lim_{x\to 0}\cos(\sin x)=\cos(\lim_{x\to 0}\sin x)=1$

توجه! چون تابع log همواره روی دامنه اش پیوسته است پس $\lim_{x\to a}\log^{f(x)}=\log^{\lim_{x\to a}f(x)}$

قضیه مقدار میانی: اگر تابع f در فاصله $[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a)<k<f(b)$ باشد، آنگاه $f(x)-k=0$، حداقل یک ریشه بین a و b دارد. $(\exists x_0\in[a,b] \ni f(x_0)=k)$

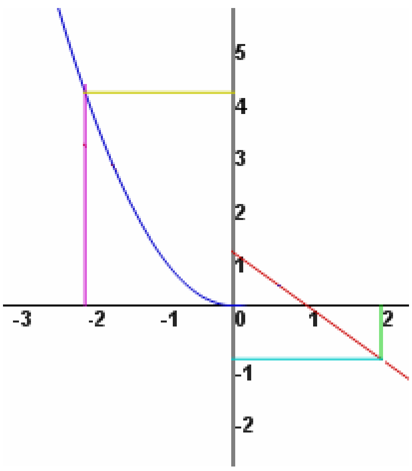


اثبات. فرض کنیم $g(x)=f(x)-k$ باشد، آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=f(a)-k \\ g(b)=f(b)-k \end{array}\right\} \Rightarrow g(a)g(b)<0$$

اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$، آنگاه بین $[a,b]$ حداقل یک ریشه است.

سوال: شرایط قضیه مقدار میانی را برای تابع $f(x)=\begin{cases}1-x & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ در بازه $[-2,2]$ بررسی کنید؟



پس شرایط اولیه قضیه برقرار نیست ولی ریشه وجود دارد، در نتیجه عکس قضیه درست نیست.

اگر f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ در $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

سوال: بیشترین مقدار k که تابع $y=[x^2]$ روی بازه $[2,2+k[$ پیوسته باشد را بیابید؟

$f(2)=4 \qquad f(\sqrt{5})=5$

$4\le x^2\le 5\Rightarrow \sqrt{4}\le x\le\sqrt{5}\Rightarrow 2\le x\le\sqrt{5}$

$2+k=\sqrt{5}\Rightarrow k=\sqrt{5}-2$

سوال: فرض کنید $y=f(x)$ روی $[0,1]$ پیوسته باشد و برای هر x در این بازه $0\le f(x)\le 1$ باشد، در این صورت ثابت کنید، وجود دارد نقطه c متعلق به بازه $[0,1]$ به طوری که $f(c)=c$ می باشد؟

اگر $f(0)=0, f(1)=1$ حکم ثابت است. حال فرض کنیم:

$f(0)>0$

$$\Rightarrow h(x)=f(x)-x\rightarrow\begin{cases}h(0)=f(0)>0\\ \\ h(1)=f(1)-1<0\end{cases}\xrightarrow{I.V.P}\exists c\in[a,b]\ \ni h(c)=0$$

$f(1)<1$

$h(c)=f(c)-c=0\Rightarrow f(c)=c$

پس بنا به قضیه مقدار میانی وجود دارد x_0 به طوری که $f(x_0)=0$.

سوال: فرض کنید $a,b,c,d,\lambda\in\mathbb{R}$ باشد، به طوری که $a<b<c<d$ باشد،ثابت کنید معادله $f(x)=(x-a)(x-c)+\lambda(x-b)(x-d)$ ریشه حقیقی دارد.

چون f(x) چند جمله ای است پس روی اعداد حقیقی پیوسته می باشد.

$f(a)=\lambda(a-b)(a-d)$

$$\Rightarrow f(a)f(c)=\lambda^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\Rightarrow f(a)f(c)<0$$

$f(c)=\lambda(c-b)(c-d)$

پس در بازه $[a,c]$ یک ریشه دارد.

$f(b)=(b-a)(b-c)$

$$\Rightarrow f(b)f(d)=(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)\Rightarrow f(b)f(d)<0$$

$f(d)=(d-a)(d-c)$

پس در بازه $[b,d]$ یک ریشه دارد.

قضیه: اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

۱- تابع f کراندار است. $\exists k>0 \quad \forall x\in[a,b] \quad |f(x)|\le k$

۲- f دارای max و min مطلق است. $\exists x_1,x_2\in[a,b] \ \ni f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$

سوال: آیا تابعی پیوسته و پوشا مانند $f:[a,b]\to(c,d)$ وجود دارد؟ نه!!!!!

با تعریف پوشا بودن: $R_f=(c,d)$

$$\Rightarrow (c,d)\neq[f(x_1),f(x_2)]$$

با توجه به قضیه و پیوستگی: $R_f=[f(x_1),f(x_2)]$

پیوستگی توابع مرکب

قضیه: اگر تابع $u=g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد و تابع $y=f(u)$ در نقطه $u_0=g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه $(fog)x$ در نقطه $x=a$ پیوسته است.

$$u=g(x)\longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=x_0$$

$$y=f(u)==f(g(x))\longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(u)=f(g(x_0))$$

پس تابع (fog)(x) در نقطه x_0 پیوسته است.

سوال: آیا تابع زیر پیوسته است؟

$y=\sin(\tan x) \qquad x=0$

اگر $g(x)=\tan x$ باشد، آنگاه $\tan x$ در $x=0$ پیوسته است.پس اگر $f(x)=\sin x$ باشد، چون $x=0$ در دامنه sin قرار دارد پس این تابع پیوسته است.

سوال: فرض کنید $h(x)=f(x)^{g(x)}$ و $f(x)\neq 1$ و $f(x)>0$ باشد و اگر توابع f(x) و g(x) در x_0 دارای حد باشند، آنگاه $\lim_{x\to x_0} h(x)=(\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

اثبات.

$$h(x)=f(x)^{g(x)}\Rightarrow \log^{h(x)}=\log^{f(x)^{g(x)}}=g(x)\log^{f(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\log^{h(x)}=\lim_{x\to x_0} g(x)\log^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

$$\log^{\lim_{x\to x_0} h(x)}=(\log^{\lim_{x\to x_0} f(x)})^{\lim_{x\to x_0} g(x)}\Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x)=(\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

توجه! اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، در صورت وجود $\lim_{x\to x_0} h(x)$، تابع h(x) نیز x_0 پیوسته خواهد بود.
$h(x)=f(x)^{g(x)}$

نکته: $if \quad x\to x_0 \Leftrightarrow f(x_0)\to\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$

سوال: حدهای زیر را حساب کنید؟

1. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})^x$

$$\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x^3})^{x^3}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^0=1$$

2. $\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{g(x)}$

$$\lim_{x\to x_0}\left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{f(x)g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{f(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)}$$

پیوستگی یک تابع معکوس

اگر تابع $y=f(x)$ در فاصله I معین، پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه یک معکوس منحصر بفرد $x=f^{-1}(y)$ وجود دارد که در حوزه مقادیر $y=f(x)$ معین، پیوسته و یکنواست.

سوال: ثابت کنید معادله $x-\alpha\sin x=y=f(x)$ و $0<\alpha<1$ فقط یک معکوس پیوسته دارد.
یکنوا بودن تابع را بررسی می کنیم:

$x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)=x_2-\alpha\sin x_2 \quad , \; f(x_1)=x_1-\alpha\sin x_1$

$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1-\alpha(\sin x_2-\sin x_1)$

$$|\sin x_2-\sin x_1|=2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\le 2\frac{|x_2-x_1|}{2}=x_2-x_1$$

then $\quad \alpha|\sin x_2-\sin x_1|\le x_2-x_1$ then $\quad (x_2-x_1)-\alpha(\sin x_2-\sin x_1)>0$

چون تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و یکنواست، واورن آن یکتا و پیوسته است.

تمرینات فصل پنجم:

تمرین: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

تمرین: ثابت کنید هرچند جمله ای از درجه فرد، حداقل یک ریشه دارد.

تمرین: نشان دهید تابع $y=\sin x+\cos x$ در بازه $[0,\pi]$ ریشه دارد.

تمرین: نقاط پیوسته و نا پیوسته توابع زیر را در بازه های داده شده تعیین کنید؟

1. $f(x)=\left[\sqrt{x}\right]+\left[x^2\right]$ $\qquad [0,4]$

2. $f(x)=[\operatorname{sgn} x][\cos \pi x]$ $\qquad (-2,2)$

3. $f(x)=\left[-x^2\right]+\left|x+\sqrt{2}\right|$ $\qquad \left[-\sqrt{3},\sqrt{2}\right]$

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases}-x & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}0 & x>-1\\ x+2 & x\leq -1\end{cases}$ باشد،نقاط ناپیوستگی و یا پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید؟

تمرین: ثابت کنید $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ ریشه حقیقی دارد.

تمرین: تعداد ریشه های معادله $\sin x=\frac{x}{100}$ را بدست آورید؟

تمرین: به ازای چه مقدار c تابع $f(x)=\begin{cases}\tan x-\sec x & x\neq \frac{\pi}{2}\\ c & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ دربازه $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ پیوسته است؟

تمرین: حدود زیر را بدون استفاده از هوپیتال حساب کنید؟

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^3}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+4\tan x}}{x}$

6. $\lim_{x\to\infty} \left|x^2-x^3\sin\frac{1}{x}\right|$

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$

8. $\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

9. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^x}$

10. $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

11. $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-(1-t)}{t}$

12. $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x})$

13. $\lim_{x\to 0} (\frac{(2^{\sin x}-1)\ln(1+\sin 2x)}{x\arctan x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{1+x^2}-1}$

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^n+x^n)}{n}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{chx-1}{x^2}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}$

18. $\lim_{x\to a} (\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$

19. $\lim_{x\to 0} (\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

20. $\lim_{x\to a} \frac{\cosh x-\cosh a}{x-a}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{-e^{\sin x}+e^{\sin 2x}}{\tanh x}$

22. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cosh x)}{\ln(\cos x)}$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

فصل ششم: توابع هذلولی

دو تابع نمایی $X=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $Y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ را در نظر بگیرید، این دو مقدار در معادله هذلولی $x^2-y^2=1$ صدق می کنند، یعنی می توان این دو مقدار را به عنوان شکل پارامتری هذلولی در نظر گرفت. اگر مجموعه این معادلات را با شکل پارامتری دایره مقایسه کنیم، به خاطر شباهت معادلات هذلولی و دایره می توان $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ را $\cosh x$ و $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ را $\sinh x$ نامگذاری کرد.

معادله هذلولی : $x^2-y^2=1$

معادله پارامتری هذلولی : $\begin{cases} X=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x>0 \\ Y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x \end{cases}$

معادله دایره : $x^2+y^2=1$

معادله پارامتری دایره : $\begin{cases} X=\cos x \\ Y=\sin x \end{cases}$

روابط بین توابع مثلثاتی هذلولی

۱) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

$\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$ $\quad$ $\sinh x=\pm\sqrt{1+\cosh^2 x}$

۲) $\cosh x+\sinh x=e^x$

$\cosh x-\sinh x=e^{-x}$

۳) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

۴) $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

۵) $1-\tanh^2 x=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

۶) $\coth x-1=\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

۷) $\sinh(x+y)=\dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\dfrac{e^x e^y-e^{-x}e^{-y}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left[(\cosh x+\sinh x)(coshy+\sinh y)-(\cosh x-\sinh x)(\cosh y-\sinh y)\right]$

$\Rightarrow \sinh(x+y)=\cosh x\,\sinh y+\sinh x\,\cosh y$

۸) $\sinh(x-y)=\cosh x\,\sinh y-\sinh x\,\cosh y$

۹) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\,\cosh y\pm\sinh x\,\sinh y$

۱۰) $\tanh(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\,\tanh y}$

۱۱) $\dfrac{1}{\coth(x+y)}=\dfrac{\dfrac{1}{\coth x}+\dfrac{1}{\coth y}}{1+\dfrac{1}{\coth x\,\coth y}}\Rightarrow \coth(x\pm y)=\dfrac{1\pm\coth x\,\coth y}{\coth x\pm\coth y}$

توجه! اگر x=y باشد، آنگاه داریم:

۱) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

۲) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

۳) $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

مشتق توابع هذلولی

$$y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(e^u)' = u'_x e^u \Rightarrow y'_x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$y = f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(\tanh x)'}{\tanh^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\tanh^2 x - 1}{\tanh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

وارون توابع هذلولی

روش اول:

$$y = f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \longrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow 2ye^x = (e^x)^2 - 1$$

$$\xrightarrow{e^x = A} A^2 - 2yA - 1 = 0 \Rightarrow A = y \pm \sqrt{y^2+1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

روش دوم:

$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2 + 1} = \sqrt{y^2+1}$$

$$\cosh x + sinhx = e^x \Rightarrow y + \sqrt{y^2+1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \longrightarrow f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$y = f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \pm\sqrt{y^2-1} \longrightarrow y \pm \sqrt{y^2-1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$$

مشتق وارون توابع هذلولی

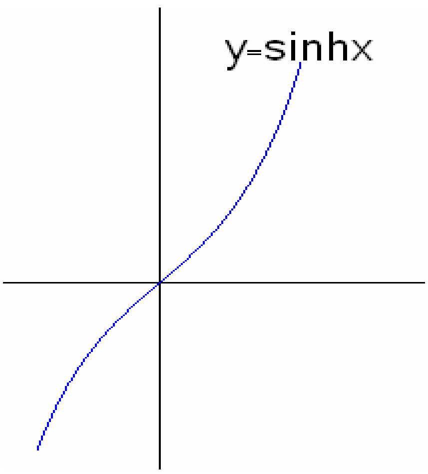
حالت کلی : $y = \sinh u \longrightarrow y' = u'_x \cosh u$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$ رابطه ۱

$$y = f(x) = \cosh x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

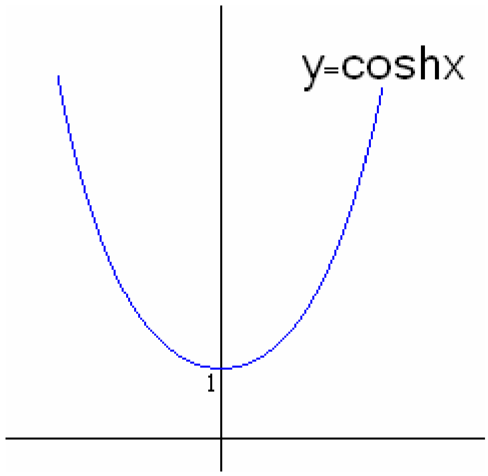
طبق رابطه ۱ : $\frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\pm\sqrt{y^2 - 1}} \Rightarrow \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$

نمودار توابع هذلولی



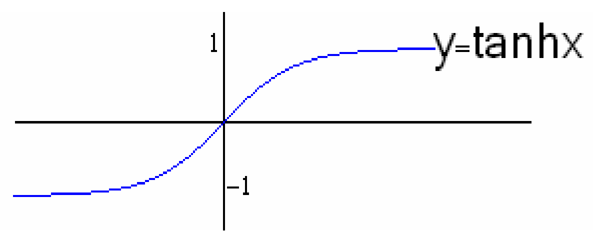
$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}$



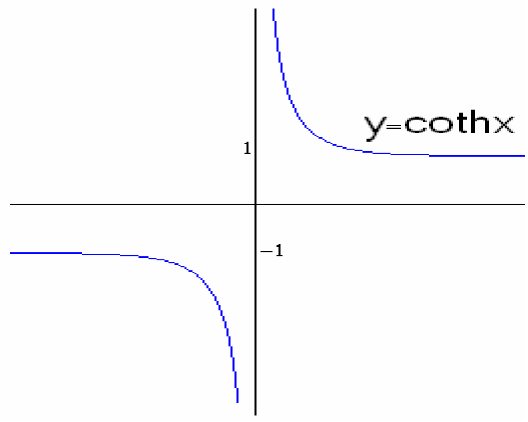
$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [1, +\infty]$



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = (-1, 1)$



$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

تمرینات فصل ششم:

تمرین: فرض کنید $f(x) = \tanh^{-1}(x)$

الف) دامنه، برد و مشتق f را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) ثابت کنید $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

فصل هفتم: مشتق

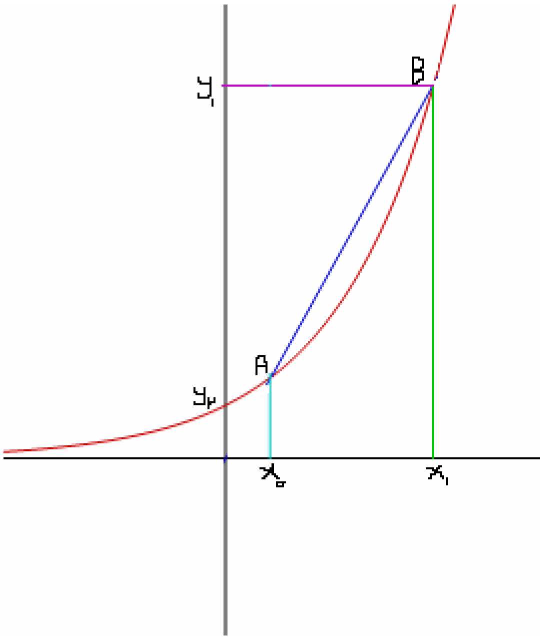
فرض کنید تابع y=f(x) در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد، مشتق تابع f در نقطه x_0 با $f'(x)$ نـشان داده و بـه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$1.\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$2.\ f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر حد بالا موجود و متناهی باشد، گوییم تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است.

تعبیر هندسی مشتق



$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\xrightarrow{x_1=x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

سوال: معادلات خطوط قائم و مماس بر منحنی y=f(x) در نقطه ای به طول x_0 را بدست آورید؟

$$A(x_0,f(x_0))$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\xrightarrow{m'=-\frac{1}{m}}y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

سوال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^n$ را بدست آورید؟

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\sum_{r=2}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}h^r-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

نکته: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

سوال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید؟

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}$$

$$\text{if } a=\sqrt[n]{x} \quad , \quad b=\sqrt[n]{x_0} \longrightarrow x-x_0=(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0})(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}x_0}+\dots+\sqrt[n]{xx_0^{\,n-2}}+\sqrt[n]{x_0^{\,n-1}})$$

$$A=(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}x_0}+\dots+\sqrt[n]{xx_0^{\,n-2}}+\sqrt[n]{x_0^{\,n-1}})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}\times\frac{A}{A}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{A}=\frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}$$

سوال: مشتق تابع $y=\log_a^x$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید؟

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a^{x+h}-\log_a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{n}\log_a^{\frac{x+h}{x}}=\lim_{h\to 0}(\log_a^{1+\frac{h}{x}})^{\frac{1}{h}}=\log_a(\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}})=\log_a^{e^{x^{-1}}}=\frac{1}{x}\log_a^e=\frac{1}{x\ln a}$$

قضیه: اگر تابع y=f(x) در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه پیوسته نیز هست.(عکس قضیه برقرار نیست.)

سوال: پیوستگی و مشتق پذیر بودن تابع $y=|x|$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید؟

$\lim_{x\to 0}|x|=|0|=0=f(0)$ تابع پیوسته است.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\Rightarrow\begin{cases}x\to 0^+ & \Rightarrow f'(0)=1\\ x\to 0^- & \Rightarrow f'(0)=-1\end{cases}$$ تابع مشتق پذیر نیست.

مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره ای

فرض کنید y=f(x) و u=g(x) باشد،تابع g در نقطه x مشتق پذیر و تابع f در نقطه u مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\times\frac{dy}{du}=u'_x f'(u)$$

سوال: مشتق توابع زیر را بیابید؟

1. $y=\sin u$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\times\frac{dy}{du}=\frac{du}{dx}(\sin u)'=u'_x\cos u$$

2. $y = \log_a^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} = \frac{du}{dx} (\log_a^u)' = \frac{u'_x}{u \ln a}$$

سوال(قضیه): اگر y=f(x) تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن x=g(y) باشد، مشتق g را برحسب مشتق f بدست آورید؟

$$g'(x) = \frac{dx}{dy}$$

$$(fog)(y) = f(g(y)) = y$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = x \longrightarrow f'(x)g'(y) = 1 \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

یا $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} = 1$

سوال: اگر $f(x) = \cot^{-1} x$ باشد، مشتق آن را بدست آورید؟

$$y = f(x) = \cot^{-1} x$$

$$x = f^{-1}(y) = \cot(y) = g(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{(1+\cot^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(y) = -(1+\cot^2 y)$$

مشتق تابع ضمنی

برای بدست آوردن مشتق تابع ضمنی از طرفین f(x,y)=0 نسبت به x مشتق می گیریم، معادله های بدست خواهد آمد که آن را بر حسب $\frac{dy}{dx}$ باید بدست آورد، پاسخ این معادله مشتق ضمنی است.

مثال: $(y^n)' = ny'_x . y^{n-1} = n\frac{dy}{dx} y^{n-1}$

سوال: مشتق عبارات زیر را بدست آورید؟

1. $y^3 - 3xy + x^3 = 0$

$$3\frac{dy}{dx} y^2 - 3(y + x\frac{dy}{dx}) + 3x^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(y^2 - x) = -x^2 + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2+y}{y^2-x}$$

2. $y = x^{\frac{p}{q}}$

$$y^q = x^p \longrightarrow q\frac{dy}{dx}y^{q-1} = p\frac{dx}{dx}x^{p-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}x^{p-1}y^{1-q}$$

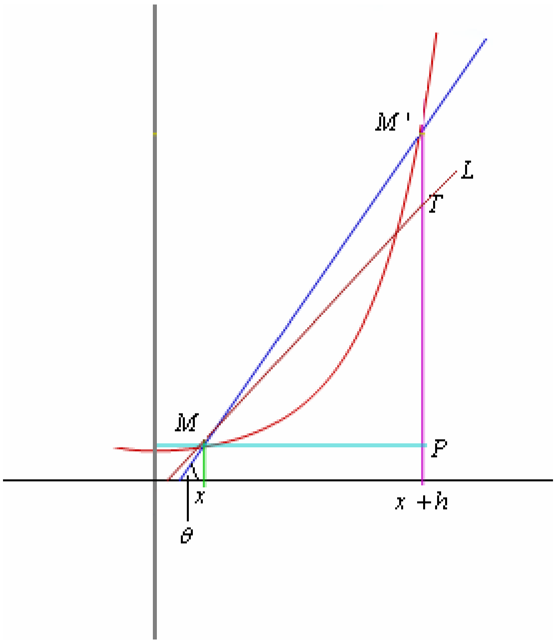
$$= \frac{p}{q}x^{p-1}x^{(1-q)^{\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{\frac{pq-q+p-pq}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

دیفرانسیل

فرض کنیم تابع y=f(x) در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل x را با $dx=\Delta x$ نشان می دهـیم. از آن جایی که x متغیر مستقل است، پس dx یا Δx هر مقداری را می تواند اختیار کند. دیفرانسیل y را با dy نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$dy=f'(x)dx$

تعبیر هندسی دیفرانسیل



$$M\begin{vmatrix}x\\f(x)\end{vmatrix} \qquad M'\begin{vmatrix}x+h\\f(x+h)\end{vmatrix} \qquad P\begin{vmatrix}x+h\\f(x)\end{vmatrix}$$

$\Delta f=f(x+h)-f(x)=M'P$

$f'(x)=\tan\theta=\dfrac{TP}{\Delta x}\Rightarrow TP=f'(x)\Delta x=f'(x)dx=dy$

$M'P=\Delta f=TP+M'T=dy+M'T$ رابطه ۱

$\longrightarrow \Delta f>dy$

$\Delta f>dy\xrightarrow{\div\Delta x}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}>\dfrac{dy}{\Delta x}\xrightarrow{(*)}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{dy}{\Delta x}+\varepsilon>0\Rightarrow\Delta f=dy+\Delta x\,\varepsilon$ رابطه ۲

$\Rightarrow\Delta f=f'(x).dx+\Delta x\,\varepsilon$

$(*)\ \ if\quad \Delta x\to 0\Rightarrow M'T\to 0\Rightarrow \Delta y=\Delta f=dy$

با مقایسه دو رابطه ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$M'T=\Delta x\,\varepsilon\xrightarrow{\Delta x\to 0}\Delta f\approx f'(x)dx$

$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx\Rightarrow f(x+\Delta x)\simeq f'(x)dx+f(x)$

خطی سازی

معادله خط L برابر است با: $L(x) = y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$M\left|\begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix}\right. \qquad M'\left|\begin{matrix} x_0+h \\ f(x_0+h) \end{matrix}\right. \qquad P\left|\begin{matrix} x_0+h \\ f(x_0) \end{matrix}\right. \qquad T\left|\begin{matrix} x_0+h \\ L(x_0+h) \end{matrix}\right.$$

$$if \quad h \to 0 \Rightarrow f(x_0+h) \to L(x_0+h)$$

$$f(x) \approx L(x) \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

سوال: صورت خطی $f(x) = \sqrt{1+x}$ را در نقطه $x_0 = 0$ بنویسید؟

$$f(x_0) = 1 \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$f(1) = \sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2}$$

تقریب : $f(0.2) = \sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.1$

$$f(0.06) = \sqrt{1.06} \approx 1 + \frac{0.06}{2} = 1.03$$

سوال: شعاع دایره ای در آغاز ۱۰ می باشد، آن را به اندازه ۰,۱ افزایش می دهیم، مساحت آن چه تغییری خواهد کرد؟

$$r_0 = 10 \qquad dr = 0.1$$

$$f(r) = A \Rightarrow f(r) = \pi r^2 \qquad f'(r) = 2\pi r$$

واقعی : $\Delta A = f(r+dr) - f(r) = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi(d^2r + 2rdr) \Rightarrow \Delta A = 2.01\pi$

تقریبی : $\Delta A \approx dA \longrightarrow f'(r) = dr = \Delta A \Rightarrow \Delta A = 2\pi r.dr \Rightarrow \Delta A = 2\pi$

دیفرانسیل های متوالی

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\Delta x) = f''(x)\Delta x + (\Delta x)'f'(x)$$

از مقدار جزئی $(\Delta x)'f'(x)$ صرف نظر می کنیم. پس:

$$d^2y = f''(x)\Delta x$$

حالت کلی : $d^n y = f^{(n)}(x).\Delta x$

دیفرانسیل مرتبه nام

$dy = f'(x)dx = g(x)$

$\Rightarrow d(dy) = d^2 y = (f'(x)dx)' = (f''(x)dx + (dx)'f'(x))dx \Rightarrow d^2 y = f''(x)dx^2$

$d(g(x)) = g'(x)dx$

حالت کلی : $\Rightarrow d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$

! توجه $\begin{cases} f(x+\Delta x) = f(x) + f'(c)(x-\Delta x) \\ \\ f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \end{cases}$ دقیق / تقریبی

کاربرد مشتق

قضیه: اگر تابع f در فاصله $I \in D_f$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و اگر در این فاصله صعودی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) > 0$$

و اگر تابع در این فاصله نزولی باشد، آنگاه

$$\forall x \in I \Rightarrow f'(x) < 0$$

اثبات : $if \;\; f(x+\Delta x) \geq f(x) \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$$if \;\; f(x+\Delta x) \leq f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

مثال: تابع $f(x) = x^3 - x + 2$ را در نظر بگیرید:

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

نقاط اکسترمم نسبی

تابع f در نقطه x_0 دارای ماکزیمم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام xهای متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \ni \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

تابع f در نقطه x_0 دارای می نیمم نسبی است، اگر یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که برای تمام xهای متعلق به این همسایگی داشته باشیم:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

نکته: با توجه به تعاریف اکسترمم های نسبی می توان ماکزیمم و می نیمم مطلق را به صورت زیر تعریف کرد:

ماکزیمم مطلق: $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$

می نیمم مطلق: $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$

قضیه: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 و در همسایگی آن پیوسته بوده و تابع در نقطه x_0 مشتق پذیر نیز باشد. اگر x_0 یک اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(x_0)=0$ است.

اثبات: با توجه به تعریف اکسترمم های نسبی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=0\Rightarrow f'(x_0)=0$$

مثال : $f(x)=\sqrt{9-x^2}\qquad D_f=[-3,3]$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}=0\Rightarrow x=0$$

نقاط بحرانی : $x=0,\pm 3\longrightarrow\begin{cases} f(0)=3 \\ \\ f(\pm 3)=0\end{cases}\Rightarrow R_f=[0,3]$

قضیه رول

فرض کنیم، تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته و در نقاط (a,b) مشتق پذیر باشد، اگر $f(a)=f(b)$ باشد، نقطه $c\in(a,b)$ به طوری که $f'(c)=0$

تعمیم قضیه رول (قضیه مقدار میانگین برای مشتق)

فرض کنیم شرایط قضیه رول برای تابع f برقرار باشد(به غیر از $f(a)=f(b)$) در این صورت:

$$\exists c\in(a,b)\quad \ni \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

اثبات.

$$h'(c)=f(b)-f(a)-f'(c)(b-a)\longrightarrow h(x)=x(f(b)-f(a))-f(x)(b-a)$$

تابع پیوسته و مشتق پذیر است و $f(a)=f(b)$ می باشد. پس شرایط قضیه رول برقرار است، در نتیجه

$$h'(c)=f(b)-f(a)-f'(c)(b-a)=0\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

مثال: نشان دهید تابع $y=x^{2k+1}+Px+q=0$ با شرط $k\ge 0$ و $P>0$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

$f(x)=x^{2k+1}+Px+q \qquad D_f=\mathbb{R} \quad , \quad f(-\infty)<0 \quad , \quad f(+\infty)>0$

برهان خلف: فرض کنیم تابع f دو ریشه دارد به طوری که $x_1<x_2$ باشد، آنگاه در بازه $[x_1,x_2]$ داریم:

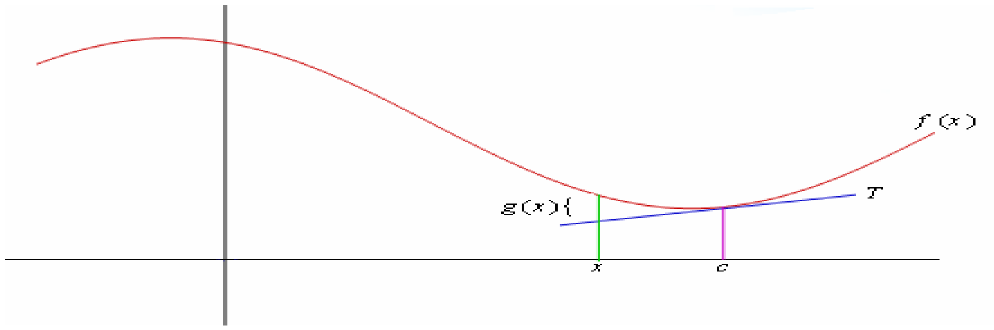
$f(x_1)=f(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=(2k+1)x^{2k}+P>0$

معادله $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس x_2 ای وجود ندارد و تابع فقط یک ریشه دلرد.

تقعر منحنی و نقطه عطف

تابع y=f(x) در نقطه x=c دارای تقعر رو به بالاست (تقعر مثبت): اگر در نقطه c، مشتق تابع در این نقطه و یک همسایگی آن موجود باشد، به طوری که نمودار f بالای خط مماس بر منحنی در این نقطه باشد.

تابع محدب: هر خط مماس بر منحنی که رسم کنیم، منحنی یا نمودار در بالای آن خط مماس باشد.



$T(x)=y=f(c)+f'(c)(x-c) \qquad ,f(x)>T(c)$

$$\Rightarrow g(x)=f(x)-T(c)=f(x)-(f(c)+f'(c)(x-c))\Rightarrow\begin{cases} if \quad g(x)>0\Rightarrow f(x)>T(x) & \text{تقعر مثبت} \\ if \quad g(x)<0\Rightarrow f(x)<T(x) & \text{تقعر منفی}\end{cases}$$

قضیه: فرض کنیم تابع f در نقطه c و همسایگی آن دارای مشتق باشد، تابع در نقطه (c,f(c)) دارای تقعر مثبت است، اگر $f''(c)>0$ و اگر $f''(c)<0$ باشد، تابع دارای تقعر منفی است. (در تقعر مثبت در همسایگی $g(x)>0$ و در تقعر منفی در همسایگی $g(x)<0$)

اثبات.

$f''(c)>0 \Rightarrow \exists N(c,\delta) \ni if \ x<c \Rightarrow f'(x)<f'(c)$

$f''(c)<0 \Rightarrow \exists N(c,\delta) \ni if \ x>c \Rightarrow f'(x)>f'(c)$

$g(t)=f(t)-[f(c)-f'(t-c)] \qquad [c,x]$

$MVT: \ \dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}=g'(z) \qquad c<z<x \ \Rightarrow \dfrac{g(x)}{x-c}=g'(z)\Rightarrow g(x)=(x-c)g'(z)$

$\Rightarrow g(x)=(x-c)(f'(z)-f'(c))\Rightarrow g(x)>0$

تعین اکسترمم های نسبی به کمک مشتق دوم

فرض کنیم تابع f تابعی باشد که x=c یک نقطه بحرانی برای آن است و هم چنین فرض کنیم f' در یک همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت f(c) ماکزیمم نسبی است. اگر $f''(c) < 0$ باشد و $f(c)$ می نیمم نسبی است، اگر $f''(c) > 0$ باشد.

اگر $f''(c) = 0$ باشد، از مشتق دوم برای تعیین ماکزیمم و می نیمم نسبی نمی توان استفاده کرد.

مثال : $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{3x^4 - 3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^4 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ نقاط بحرانی

$f''(x) = \dfrac{12x^3 x^2 - 2x(3x^4 - 3)}{x^4} = \dfrac{6x^4 + 6}{x^3} = 6x + \dfrac{6}{x^3}$

$f''(1) = 12 > 0 \longrightarrow x = 1$ A (1, 4) می نیمم نسبی

$f''(-1) = -12 < 0 \longrightarrow x = -1$ B (-1,-4) ماکزیمم نسبی

نقطه عطف

نقطه (c,f(c)) را نقطه عطف تابع f گویند، اگر یک همسایگی c مانند (a,b) وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در فاصله (a,c) داشته باشیم $f''(x) > 0$ و برای هر x در فاصله (c,b) داشته باشیم $f''(x) < 0$ و یا به عکس. پس $f''(c) = 0$ نقطه عطف است.

قضیه: اگر تابع f، تابعی باشد که برای نقطه‌ای مانند x=c وجود دارد، به طوری که $f''(x) = 0$. در صورتی نقطه (c,f(c))، نقطه عطف این تابع است که یک همسایگی از c مانند (a,b) وجود داشته باشد، به طوری که:

۱) $f''(x)$ در همسایگی مذکور وجود داشته و برای هر x در این فاصله (به جز x=c) $f''(x) \neq 0$ باشد.

۲) $f''(a) f''(b) < 0$

قضیه کوشی (تعمیم مقدار میانگین)

فرض کنیم توابع f و g در فاصله (a,b) مشتق پذیر باشد و هم چنین بازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم، $g'(x) \neq 0$ آنگاه نقطه‌ای مانند $z \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ باشد. (به شرط این که $(g(b) \neq g(a)$)

اثبات.

تابع $h(x) = g(x)(f(b)-f(a)) - f(x)(g(b)-g(a)) \longrightarrow h(a) = h(b)$ پیوسته و مشتق پذیر است و هم چنین

طبق قضیه رول $\Rightarrow \exists z \in (a,b) \ni h'(z) = 0$

سوال: با استفاده از قضیه کشی ثابت کنید: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \quad (x > 0)$

$$f(t) = \ln(t+1) \qquad b = x_1 \quad a = 0$$
$$g(t) = t$$

$$\frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x+1-1} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1} \Rightarrow \ln(x+1) = \frac{x}{z+1} \qquad 0 < z < x$$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{z+1} < \frac{x}{0+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

قضیه هوپیتال (شرط استفاده از این قضیه فقط برقراری شرایط)

فرض کنیم تابع f و g در یک همسایگی از c مشتق پذیر باشد (احتمالاً غیر از خود c)، اگر $g'(x) \neq 0$ باشد، بازای $x \neq c$ و اگر $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ یا $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$ باشد، آنگاه $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

اثبات.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq c \\ 0 & x = c \end{cases}$$

کشی : $\frac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)} = \frac{F'(z)}{G'(z)} \qquad c < z < x$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(z(x))}{g'(z(x))} = k$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(z(x))}{g'(z(x))} = \lim_{z \to c} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

قضیه تیلور

فرض کنیم تابع $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ طوری باشد، که مشتقات اول تا n ام آن روی فاصله $[a,b]$ موجودند، تعریف شود و هم چنین مشتق n ام تابع f روی فاصله $[a,b]$ پیوسته و در روی نقاط داخلی آن مشتق پذیر باشد، در این صورت:

$$P(x)=\sum_{r=0}^{n}c_r(x-a)^r$$

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)\longrightarrow f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)=c_0+c_1(x-a)$$

$$f(a)=c_0 \Leftrightarrow P(a)=f(a)$$

$$P'(a)=f'(a)\Rightarrow c_1=f'(a)$$

$$P''(a)=f''(a)\Rightarrow c_2=\frac{f''(a)}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)\Rightarrow c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\Rightarrow P(x)=\sum_{r=0}^{n}c_r(x-a)^r=c_0+c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(a)(x-a)^r}{r!}$$

$$\Rightarrow \quad \exists c\in(a,b) \quad \ni f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)(b-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

توجه! به $\frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ باقی مانده می گویند.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و مشتقات پیوسته تا مرتبه $n-1$ در این فاصله داشته باشد و مشتق متناهی مرتبه n ام در نقاط داخلی (a,b) موجود باشد، آنگاه

$$\forall x\in[a,b] \qquad f(x)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{f^{r}(a)(x-a)^r}{r!}+f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad \xi\in(a,b)$$

$$\xi=a+\theta(x-a) \qquad 0<\theta<1$$

تعمیم قضیه مقدار میانگین

$$if \quad n=0\Rightarrow f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$$

توجه ! $f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{r}(a)(x-a)^r}{r!}+\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad n\in\mathbb{Z}^+$

بسط مک لورن

$$\text{if } a=0\longrightarrow f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(0)x^r}{r!}+\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

سوال: بسط مک لورن هریک از توابع زیر را بنویسید؟

1. $f(x)=e^{x}$

$f^{(n)}(x)=e^{x}$

$$\Rightarrow f(x)=e^{x}=\sum_{r=0}^{n}\frac{x^{n}}{r!}+\frac{e^{x}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n)}(0)=e^{0}=1$

2. $f(x)=\sin x$

$(\sin x)^{n}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$f(x)=\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots$

3. $f(x)=\cos x$

$(\cos x)^{n}=\cos(x-\frac{n\pi}{2})$

$f(x)=\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\cdots$

نکته: می توان برای تابع $f(x)=e^{x}$ سری به صورت زیر تعریف کرد:

$f(x)=e^{x}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{r!}$

$f(x)=e^{-x}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n}}{r!}$

سوال: یک قوطی کنسرو با حجم مشخص با شکل استوانه‌ای دایره‌ای قائم را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم در ساخت آن از کم ترین مواد استفاده کنیم، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن چقدر خواهد بود؟

$$V = \pi r^2 h \longrightarrow V' = 0$$
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$\frac{dV}{dr} = \pi(2rh + \frac{dh}{dr}r^2) = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dr} = \frac{-2h}{r}$$
$$\frac{ds}{dr} = 0 \Rightarrow 2\pi(2r + h + r\frac{dh}{dr}) = 0 \Rightarrow \frac{h}{r} = 2$$

سوال: مایعی که در قیف کوچکی به شکل مخروط ریخته شده است، با آهنگ $12\ cm^3/s$ از ته قیف بیرون مـی ریـزد. ارتفاع قیف $20\ cm$ و شعاع قاعده بالایی آن $4\ cm$ است. وقتی که سطح مایع $5\ cm$ بالاتر از ته قیف قرار دارد، ارتفاع مایع با چه سرعتی کم می شود؟

$$V' = -12\,cm^3/s \qquad h_0 = 20\ cm \qquad r_0 = 4\ cm \qquad h'_t = ?$$
$$\frac{h(t)}{r(t)} = \frac{h_0}{r_0} = \frac{20}{5} = 5$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)h(t) \longrightarrow V'(t) = 2r'(t)r(t)h(t) + h'(t)r^2(t) = \frac{-36}{\pi}$$
$$\xrightarrow{\frac{dV}{dt} = -12cm^3/s} \begin{cases} h(t) = 5r(t) \\ h'(t) = 5r'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{-12}{\pi} \end{cases}$$

سـوال: میله ای به طول $2+\sqrt{\pi}$ موجود است. از نقطه ای روی آن، آن را به دو قسمت تقسیم می کنیم، سپس یکی را به شکل دایره و قسمت دیگر را به شکل مربع در می آوریم. نقطه برش را طوری بدست آورید که مساحت دایــره و مربــع حاصل برابر شوند؟

$$S_1 = \pi r^2 \qquad P_1 = 2\pi r_1 = 2+\sqrt{\pi} - x$$
$$S_2 = r^2 \Rightarrow S_2 = \frac{x^2}{16} \qquad P_2 = 4r_2 = x \Rightarrow r_2 = \frac{x}{4}$$
$$2\pi r_1 = 2+\sqrt{\pi} - x \Rightarrow r_1 = \frac{2+\sqrt{\pi}-x}{2\pi} \longrightarrow S_1 = \pi r_1^2 = (\frac{2+\sqrt{\pi}-x}{2\pi})^2.\pi$$
$$S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{(2+\sqrt{\pi}-x)^2}{4\pi} = \frac{x^2}{16} \Rightarrow (2+\sqrt{\pi}-x)^2 = \frac{x^2\pi}{4} \Rightarrow 2+\sqrt{\pi}-x = \pm\frac{\sqrt{\pi}x}{2}$$
$$\Rightarrow 2+\sqrt{\pi}-x = -\frac{\sqrt{\pi}x}{2} \Rightarrow 4+2\sqrt{\pi}-2x = -\sqrt{\pi}x \Rightarrow 4+2\sqrt{\pi} = x(2-\sqrt{\pi})$$
$$\Rightarrow x = \frac{4+2\sqrt{\pi}}{2-\sqrt{\pi}} \times \frac{2+\sqrt{\pi}}{2+\sqrt{\pi}} \Rightarrow x = \frac{8+2\pi+8\sqrt{\pi}}{4-\pi}$$

سوال: ثابت کنید، اگر $x^m y^n = c$ باشد، آنگاه $x+y$ حداقل است. هرگاه $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ باشد. (c=cte)

$$x^{-m}c = y^n \Rightarrow y = \sqrt[n]{\frac{c}{x^m}}$$
$$f(x) = x + \sqrt[n]{cx^{-m}} = x + c^{\frac{1}{n}} x^{\frac{-m}{n}} \longrightarrow f'(x) = 1 - \frac{m}{n} c^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}-1} = 0$$
$$\frac{n}{m} c^{-\frac{1}{n}} = x^{-\frac{m}{n}-1} \Rightarrow x^{-\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m} c^{-\frac{1}{n}}$$
$$\frac{1}{x^{\frac{m+n}{n}}} = \frac{n}{m} c^{-1} \Rightarrow x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{m}{n} c \Rightarrow x = \sqrt[n]{(\frac{m}{n} c)^{m+n}} \Rightarrow x = \frac{m}{n} c \sqrt[n]{(\frac{m}{n} c)^m}$$

سوال: طول مستطیلی که مساحت ثابت $800mm^2$ دارد، با آهنگ $4 m/s$ افزایش می یابد. در لحظه ای که عرض مستطیل با آهنگ $0.5 m/s$ کاهش یابد، عرض مستطیل چقدر است.

t طول مستطیل در لحظه : $L(t)$

t عرض مستطیل در لحظه : $W(t)$

$$L(t)W(t) = 800mm^2 \qquad W'(t) = -0.5 L'(t) = 4$$

از طرفین مشتق می گیریم، آنگاه

$$L'(t)W(t) + W'(t)L(t) = 0$$

$$W(t) - 0.5L(t) = 0 \Rightarrow \frac{W(t)}{L(t)} = \frac{0.5}{4} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{W(t)}{L(t)} = \frac{1}{8} \Rightarrow L(t) = 8W(t)$$

$$8(w(t))^2 = 800 \Rightarrow W(t) = 10mm$$

سوال: ذره ای روی منحنی $x^2 - 18y^2 = 9$ طوری حرکت می کند که مختص y آن با آهنگ ثابت ۹ واحد در ثانیه افزایش می یابد. وقتی $x = 9$ ، مختص x ذره با چه آهنگی تغییر می کند؟

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

$$2xx' - 36yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{xx'}{18y} \qquad y' = 9 \ , \ x = 9$$
$$\Rightarrow x' = 18y$$
when $x = 9 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x' = \pm 18 \times 2 = \pm 36$

تمرینات فصل هفتم:

تمرین: معادلات خطوط مماس بر منحنی $y=f(x)=3x$ رادر نقطه $A(-1,-1)$ بدست آورید؟

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ باشد، پیوستگی و مشتق پذیری آن را بررسی کنید؟

تمرین: ثابت کنید:

$1)\left|\tan^{-1}y-\tan^{-1}x\right|\leq|y-x|$

$2)\left|\sin^{-1}x-\sin^{-1}y\right|\leq|x-y|$

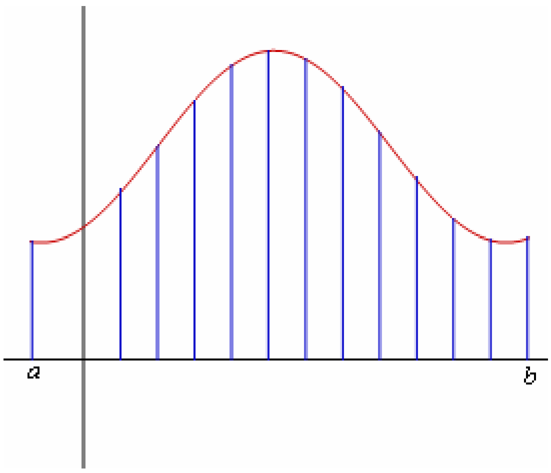
تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ را بدست آورید؟

تمرین: وارون و مشتق تابع $\tanh x$ را بدست آورید؟

تمرین: ثابت کنید که $e^x\geq 1+x$ می باشد.

فصل هشتم: انتگرال

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ تعریف شده باشد، بازه $[a,b]$ را به n قسمت تقسیم می کنیم. (n قسمت لزوماً مساوی نیتند.) [با انتخاب $n-1$ نقطه دلخواه در فاصله $[a,b]$] که آن را یک افراز از آن می نامیم. $P=\{x_0,...,x_n\}$.
طول هر زیر فاصله را Δx می نامیم، یعنی فاصله $[x_{i-1},x_i]$ را $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ تعریف می کنیم.
طول بزرگترین مقدار Δx_i را طول (طول بزرگترین زیر فاصله) نرم افراز گوییم و با علامت $\|\Delta\|$ نشان می دهیم.



$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$
$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1<x_2]\ ,\ \cdots\ ,\ [x_{n-1},x_n] \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
$$\|\Delta\| = \max\{\Delta x_i\}$$

اگر فرض کنیم تابع f صعودی باشد، آنگاه $f(x_i)>f(x_{i-1})$ خواهد بود، بنابراین مساحت مستطیل بزرگتر از زیر فاصله i ام $\Delta x_i f(x_i)$ و مستطیل کوچکتر $\Delta x_i f(x_{i-1})$ خواهد بود. اگر مجموع مساحت مستطیل های بزرگتر و کوچکتر را حساب کنیم، واضح است که مساحت زیر منحنی $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ مابین این دو مساحت خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_{i-1}) \le S \le \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(x_i)$$

حال اگر تعداد زیر فاصله ها را افزایش دهیم مساحت مستطیل های کوچکتر و بزرگتر به هم دیگر نزدیک خواهند بود و در حالت حدی وقتی $n\to\infty$ میل می کند، این دو مساحت با هم دیگر برابر می شوند، در نتیجه با توجه به قضیه فشردگی مساحت زیر منحنی نیز برابر مساحت مستطیل ها خواهد بود.
مجموع ریمانی تابع f(x) را در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(c_i) \qquad c_i\in[x_{i-1},x_i]$$

اگر f(x)>0 باشد، مساحت f(x) در فاصله $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(c_i)$$

انتگرال معین : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(c_i)$

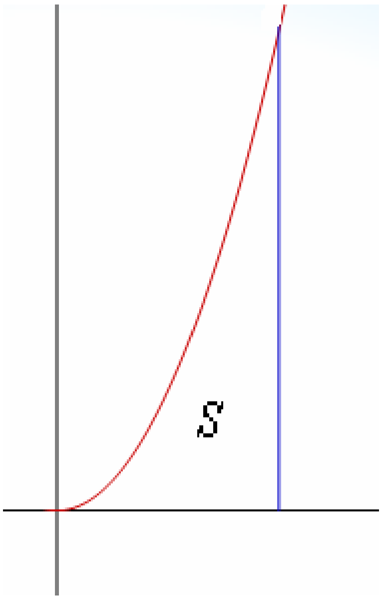
با توجه به تعریف بالا تابع f(x) در فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر است، اگر حد بالا موجود باشد.

توجه ! $h(x)=f(x)+g(x)$ اگر موجود باشد این گونه است. $\sum_{n=0}^{\infty} h(x)=\sum f(x)+\sum g(x)$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{2}=\Delta x$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = a \\ x_1 = a+\frac{b-a}{2} \\ x_2 = a+2(\frac{b-a}{2}) \\ \vdots \\ x_i = a+i(\frac{b-a}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{2}f(c_i)$$

سوال: فرض کنید $f(x)=x^3$ و مساحت محصور بین خطوط x=1 و x=0 را با تعریف مساحت انتگرال معین حساب کنید؟



$$x_i = \frac{b-a}{2}=\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n}(\frac{i}{n})^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n} i^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^4}(\frac{n^2(n+1)^2}{4})=\frac{1}{4}$$

مثال : $f(x)=\int_0^x t^3dt = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x}{n}(\frac{ix}{n})^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{n^4}\sum_{i=0}^{n} i^3 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{n^4}(\frac{n^2(n+1)^2}{4})=\frac{x^4}{4}$

خواص انتگرال معین

۱) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

۲) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

۳) $\int_a^a f(x)dx = 0$

۴) $if \quad a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

۵) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

۶) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b f(x)dx$

قضیه: اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر است. (عکس قضیه برقرار نیست.)

اگر تابع f انتگرال پذیر نباشد، پس پیوسته نخواهد بود.

سوال: اگر $\int_a^b (x^2-1)g(x)dx$ موجود نباشد، چه شرطی باید g(x) داشته باشد؟ اگر تابع g(x) پیوسته نباشد، پس مشتق پذیر نیز نخواهد بود.

سوال: آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ انتگرال پذیر است؟ چون ریمان بالا و پایین با هم برابر نیست، پس انتگرال پذیر نخواهد بود:

ریمان بالا : $U(f,P) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i \qquad M_i = Sup(f(x))$

$$x \in [x_{i-1}, x_i]$$

ریمان پایین : $L(f,P) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i \qquad m_i = Inf(f(x))$

$$L(f,P) \le \int_a^b f(x)dx \le U(f,P)$$

چون $U(f,P) = 1$ و $L(f,P) = 0$ پس انتگرال پذیر نیست، زیرا:

$$L(f,P) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum \Delta x_i m_i = 0$$

$\Rightarrow 0 \ne b - a \longrightarrow$ انتگرال پذیر نیست

$$U(f,P) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum \Delta x_i M_i = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum \Delta x_i \times 1 = b - a$$

سوال: انتگرال زیر را حساب کنید؟

$$\int_0^{\sqrt[3]{4}}\left[x^3\right]dx=\int_0^1\left[x^3\right]dx+\int_0^{\sqrt[3]{2}}\left[x^3\right]dx+\int_0^{\sqrt[3]{3}}\left[x^3\right]dx+\int_0^{\sqrt[3]{4}}\left[x^3\right]dx$$
$$=0+(\sqrt[3]{2}-1)+2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})+3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})$$

توجه! $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f \qquad c_0=a<c_1<\cdots<c_n<b=c_{n+1}$

نکته : $\int_a^b kdx=\frac{b-a}{n}k=(b-a)k$

قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

اگر تابع f(x) در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه ای مانند c در فاصله $[a,b]$ وجود دارد به طوری که
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(x)$$

اثبات.

$$\forall x\in[a,b]\ \ m\le f(x)\le M\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$
$$\Rightarrow m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M\xrightarrow{I.V.T}\exists c\in[a,b]\ \ni\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(x)$$

مثال : $f(x)=\cos^n\pi x \qquad [0,1]\quad ,n=2k+1$

$$-1\le\cos^n\pi x\le1\Rightarrow-1\le\int_0^1\cos^n\pi x\le1$$
$$\Leftrightarrow f(0)=1\ ,\ f(-1)=-1\ ,\ f'(x)=-n\sin\pi x\cos^{n-1}\pi x\xrightarrow{f'(x)=0}x=0\ ,x=\frac{1}{2}\ ,\ x=1$$
$$if\ \ n=2k$$
$$f(1)=1\ ,f(0)=1\ ,f(\frac{1}{2})=0\ ,f(-1)=1\Rightarrow0\le\int_0^1\cos^n\pi xdx\le1$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر تابع f روی بازه I که شامل نقطه a است، پیوسته باشد:

الف) اگر تابع F به صورت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تعریف شود، این تابع خوش تعریف است، معین است و مشتق پذیر می باشد و $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$

اثبات: $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)f(c)}{h}\xrightarrow{c\in[x,x+h]}$
$\lim_{h\to 0}f(c)=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$

ب) اگر F^* یک تابع اولیه برای f باشد، یعنی $\frac{dF^*(x)}{dx}=f(x)$ است، در این صورت بازای هر $b\in I$ خواهیم داشت:

$$\forall b\in I\quad \int_a^b f(t)dt=F^*(b)-F^*(a)=F(b)-F(a)$$

اثبات.

$if\quad F(x)=\int_a^b f(t)dt\quad ,$ می دانیم $F'(x)=f(x)$

$$\Rightarrow (F^*-F)'=0\Rightarrow F^*-F=-k\Rightarrow F^*=F+k\Rightarrow\begin{cases}F(b)=F^*(b)+k\\F(a)=F^*(a)+k=0\Rightarrow -F^*(a)=k\end{cases}$$

تفاوت F^* و F برابر k است.

بیان دیگر : $\int_a^b f(t)dt=\int_{a_0}^b f(t)dt-\int_{a_0}^a f(t)dt=F(b)-F(a)$

اثبات دیگر: تابع جدید $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ را در نظر می گیریم، با توجه به قسمت (الف) قضیه اساسی داریم: $F'(x)=f(x)$ و چون بنا به فرض مسئله $F^{*'}(x)=f(x)$ است و با توجه به قضیه مقدار میانگین تفاضل این دو تابع مقدار ثابتی خواهد بود، یعنی $(k\in\mathbb{R})\quad F(x)=F^*(x)+k$ پس خواهیم داشت:

$F(b)=F^*(b)+k=\int_a^b f(t)dt$ رابطه ۱

$F(a)=F^*(a)+k=\int_a^a f(t)dt=0\Rightarrow k=-F^*(a)$

اگر در رابطه ۱، $k=-F^*(a)$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$F(b)=F^*(b)-F^*(a)=\int_a^b f(t)dt$$

مثال : $\int_2^3 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3=\frac{1}{3}(3^3-2^3)=\frac{19}{3}$

مشتق گیری از انتگرال

فرض کنیم، تابع $F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(x)$ است، در این صورت: $F'(x)=h'(x)f(h(x))-g'(x)f(g(x))$

مثال : $(\int_{x}^{2x} \tan t dt)'=2\tan(2x)-\tan x$

تابع اولیه یا انتگرال نامعین

اگر مشتق تابع $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ باشد، به تابع F یک تابع اولیه f گویند.

توجه! هر تابعی، تابع اولیه ندارد و مفهوم انتگرال پذیر بودن در حالت کلی مستقل از تابع اولیه داشتن است. مانند: e^{x^2}، $\frac{\sin x}{x}$، $x\tan x$ یا $\frac{1}{x+\sin x}$. در حالی که $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\pi}$.

روش کلی برای بدست آوردن تابع اولیه

روش عمومی این است که در زیر علامت انتگرال مشتق تابع و خود تابع را ظاهر کنیم، مانند:

$$\int x^m dx=\frac{1}{m+1}x^{m+1}+c \qquad \int u'_x u^m dx=\frac{1}{m+1}u^{m+1}+c$$

سوال: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

1) $\int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}+c$

2) $\int (1+\tan^2 x)dx=\tan x+c$

3) $-\int -\sin x \cos^n x dx=-\frac{\cos^{n+1}}{n+1}+c$

روش های انتگرال گیری

۱ - روش تغییر متغیر

اگر u یک تابع مشتق پذیر در فاصله (a,b) باشد و تعریف کنیم: $u_{(a)}=A$ و $u_{(b)}=B$ و تابع f روی بـرد u پیوسـته باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_a^b u'_x . f(u(x))dx = \int_a^b f(u)du$$

سوال: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.dx$

$$\sqrt{x}=u \longrightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}}=du \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,du=2udu$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.dx=\int \frac{\sin u}{u}.(2udu)=2\int \sin u du=-2\cos u+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

2) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

روش اول : $-3\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.dx=-3\sqrt{1-x^2}+c$

$$1-x^2=t \longrightarrow -2xdx=dt \Rightarrow xdx=\frac{-dt}{2}$$

روش دوم :

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\int \frac{\frac{-3}{2}dt}{\sqrt{t}}=-3\int \frac{dt}{2\sqrt{t}}=-3\sqrt{t}+c=-3\sqrt{1-x^2}+c$$

۲ - روش جز به جز

فرض کنید u و v توابعی از x باشند، آنگاه

$$d(u.v)=u.dv+v.du \longrightarrow u.dv=d(u.v)-v.du \Rightarrow \int u.dv=\int d(u.v)-\int v.du$$

سوال: حاصل را بیابید؟

1) $I=\int x\cos x dx$

$$\begin{cases} x=u \\ \cos x dx=dv \end{cases} \to \begin{cases} dx=du \\ \sin x=v \end{cases} \Rightarrow I=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+c$$

2) $I=\int x^2\sin x dx$

$$\begin{cases} x^2=u \\ \sin x dx=dv \end{cases} \to \begin{cases} 2xdx=du \\ -\cos x=v \end{cases} \Rightarrow I=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$$

3) $I=\int \cos(\ln x)dx$

$$\ln x=t\Rightarrow x=e^t\Rightarrow \frac{dx}{x}=dt\Rightarrow dx=e^t.dt$$

$$I=\int e^t\cos t.dt$$

$$\begin{cases} e^t=u \\ \cos tdt=dv \end{cases} \to \begin{cases} du=e^t.dt \\ v=\sin t \end{cases} \Rightarrow I=e^t\sin t-\int e^t\sin t.dt$$

$if\quad J=\int e^t\sin t.dt$

$$\begin{cases} e^t=u \\ \sin t.dt=dv \end{cases} \to \begin{cases} du=e^t.dt \\ v=-\cos t \end{cases} \Rightarrow J=-e^t\cos t+\int e^t\cos t.dt$$

$$I=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos t.dt\Rightarrow 2I=e^t\sin t+e^t\cos t\Rightarrow I=\frac{1}{2}(e^t\sin t+e^t\cos t)$$

4) $I=\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

$$\xrightarrow[3x^2dx=du]{x^3=u}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=Arc\sin u+c=Arc\sin x^3+c$$

5) $I=\int\frac{dx}{1+e^{x}}$

$$e^{x}=t\longrightarrow e^{x}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^{x}}=\frac{dt}{t}\longrightarrow I=\int\frac{dt}{t(1+t)}$$

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{t(A+B)+A}{t(t+1)}\Rightarrow\begin{cases}t(t+1)=t(t+1)\\ t(A+B)+A\equiv 1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow B=-1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}=\ln|t|-\ln|t+1|+c=x-\ln\left|1+e^{x}\right|+c$$

6) $I=\int\sec x\,dx$

توجه ! $if\ \ f(x)=\ln(\sec x+\tan x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sec x+\tan x}=\sec x\left(\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\right)\Rightarrow f'(x)=\sec x$

$$\Rightarrow I=\int\sec x\,dx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c$$

روش دیگر : $\sec x=u\rightarrow\cos x=\dfrac{1}{u}\Rightarrow-\sin x\,dx=\dfrac{-du}{u^2}\Rightarrow dx=\dfrac{du}{u^2\sin x}=\dfrac{du}{u^2\sqrt{1-\dfrac{1}{u^2}}}=\dfrac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}}=dx$

$$I=\int\sec x\,dx=\int\frac{u\,du}{|u|\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\cosh^{-1}u+c=\cosh^{-1}(\sec x)+c$$

روش انتگرال گیری از کسر های گویا

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}$$

انتگرال کسری ساده نوع اول

$$I=\int\frac{dx}{(ax+b)^{n}}=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\ln\left|ax+b\right|+c & n=1\\[2ex] \dfrac{1}{a(1-n)}(ax+b)^{1-n}+c & n\neq 1\end{cases}$$

$$I=\int\frac{Px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx \qquad (b^2-4ac<0)$$

$$I=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)-\frac{Pb}{2a}+q}{(ax^2+bx+x)^n}dx=\frac{P}{2a}\int\frac{2ax-b}{(ax^2+bx+c)^n}dx+\int\frac{q-\frac{Pb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$J=\int\frac{q-\frac{Pb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx=q-\frac{Pb}{2a}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\xrightarrow[\frac{x+A}{B}=\tan t]{ax^2+bx+c\equiv(x+A)^2+B^2}$$

سوال: انتگرال $I=\int\frac{xdx}{x^2+2x+3}$ را حساب کنید؟

$$\int\frac{\frac{1}{2}(2x+x)-1}{(x+1)^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x+1)^2+2}dx-\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}\xrightarrow[dx=\sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt]{\frac{x+1}{\sqrt{2}}=\tan t}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\int\frac{\sqrt{2}(1+\tan^2 t)dt}{2(1+\tan^2 t)}=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}t+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+2\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}Arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

قضیه اویلر

هر چند جمله ای مانند g(x) قابل تجزیه به عبارت درجه اول $(x-a)^r$ و عبارت درجه دوم فاقد ریشه $(ax^2+bx+c)^m$ می باشد که از اولی ریشه های حقیقی و از دومی ریشه های مختلط مزدوج نتیجه می شود.

$$g(x)=(x-a)^n g_1(x)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{ni}\prod_{i=m+1}^{n}(a_ix^2+b_ix+c_i)^{n_i}$$

مثال:

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x+1)=(x-1)(x^2+1)$$

$$(x^6-1)^2=((x^3)^2-1)^2=((x^3-1)(x^3+1))^2=(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

قضیه: فرض کنیم $x=a$ ریشه مکرر مرتبه n ، g(x) باشد، (یعنی $g(x)=(x-a)^n g_1(x)$) در این صورت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)}+\frac{f_n(x)}{g_1(x)}$$

اثبات. $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n g_1(x)}=\frac{A_1g_1(x)+f(x)-A_1g_1(x)}{(x-a)^n g_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{f(x)-A_1g(x)}{(x-a)^n g_1(x)}$

پس $\forall A\in\mathbb{R}$ برقرار است.

مجدد A_1 را چنان انتخاب می کنیم که $f(x)-A_1g_1(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر باشد. یعنی

$$f(a)-A_1g_1(a)=0\longrightarrow A_1=\frac{f(a)}{g_1(a)}$$

$$\longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)^n g_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}g_1(x)}$$

$$f(x)-A_1g_1(x)=(x-a)f_1(x)$$

با تکرار این فرآیند برای تابع $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}g_1(x)}$ به این نتیجه خواهیم رسید.

قضیه: فرض کنید $g(x)=(ax^2+bx+c)^m g_1(x)$ که در آن $b^2-4ac<0$ (ریشه حقیقی ندارد) کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می توان به صورت زیر نوشت: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+x)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)}+\frac{f_n(x)}{g_n(x)}$

تجزیه کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$

برای تجزیه کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ با استفاده از سه قضیه قبل کسر را به صورت عوامل $\frac{A_ix+B_i}{(ax^2+bx+c)^{n-i+1}}$ و $\frac{C_i}{(x-a)^{n-i+1}}$ تجزیه می کنیم.سپس با متحد قرار دادن طرف اول و طرف دوم ضرایب مجهول را بدست می آوریم. توجه داشته باشید که هر کدام از اجزای تجزیه به شکل انتگرال کسری ساده نوع اول و نوع دوم می باشند که نحوه محاسبه آن بیان شده است.

مثال : $I=\int\frac{2xdx}{x^3-x^2+x-1}$

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}\qquad\longrightarrow Ax^2+Bx-Ax-B+Cx^2+C\equiv 2x$$

$$x^2(A+C)+x(B-A)+C-B=2x\quad\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\B-A=2\\C-B=0\end{cases}\quad\Rightarrow C=1,\ A=-1,\ B=1$$

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+1}dx=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\int\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+Arc\tan x+c$$

تغییر متغیر های اویلر

$$I=\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

اگر $b^2-4ac<0$ باشد، آنگاه تغییر متغیر $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{ax}+t$ را اعمال می کنیم.

اگر یک ریشه حقیقی داشته باشد($ax^2+bx+c=0$)، آنگـاه تغییـر متغیـر $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ را اعمـال خواهیم کرد.

مثال :

1) $I=\int\cos x(f(\sin x))dx$

$\sin x=t\longrightarrow dt=\cos x\ dx$
$I=\int f(t)dt$

2) $I=\int\sin x(f(\cos x))dx$

$\cos x=t\longrightarrow dt=-\sin x\ dx$
$I=-\int f(t)dt$

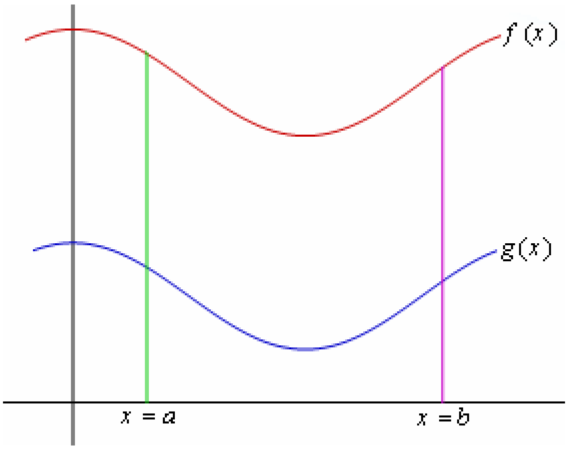
3) $I=\int f(\tan x)dx$

$\tan x=t\longrightarrow dt=(1+\tan^2 x)dx$
$I=\int\frac{f(t)dt}{1+t^2}$

4) $I=\int f(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$

$$\xrightarrow{\tan x=t} I=\int f\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$$

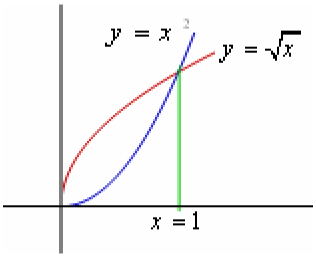
کاربرد انتگرال



$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)-0|dx \rightarrow S = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

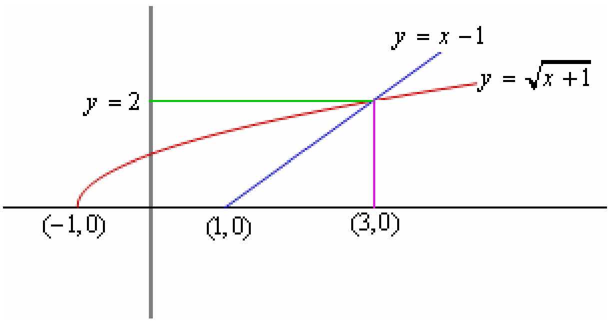
برای محاسبه مساحت دو منحنی در فاصله (a,b) باید توجه داشت که مرزها را مشخص می کنند، در طول کل فاصله نباید تغییر کنند، اگر در نقطه ای مانند c ($a<c<b$) یک یا دو مرز تغییر کردند، باید در نقطه c ، انتگرال را تقسیم کرد.

سوال: مساحت محصور به منحنی های $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و خط $x=1$ و محور x ها بدست آورید؟



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

سوال: ناحیه محدود به منحنی $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ و خط $y = g(x) = x-1$ و خط $y=0$ را حساب کنید؟



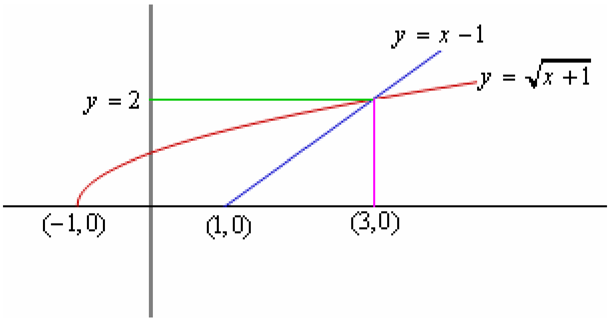
$$S = \int_{-1}^1 (\sqrt{x+1} - 0)dx + \int_1^3 (\sqrt{x+1} - x + 1)dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^1 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + x\Big|_1^3$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{10}{3}$$

در محاسبه مساحت بطور معمول تابع را برحسب x در نظر می گیریم و مساحت را براساس تغییرات x بدست می آوریم و می توان مساحت را برحسب تغییرات y نیز بدست آورد. به این صورت که $\int_a^b f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$ می باشد. دامنه تغییرات y را وقتی x از a تا b تغییر می کند، بدست می آوریم و تابع زیر انتگرال را بر حسب y می نویسیم، یعنی x تابعی از y خواهد بود.

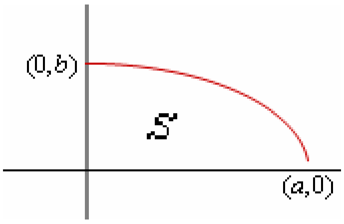
سوال: ناحیه محدود به منحنی $y=f(x)=\sqrt{x+1}$ و خط $y=g(x)=x-1$ و خط $y=0$ را حساب کنید؟



$$y=x-1 \longrightarrow x=y+1$$
$$y=\sqrt{x+1} \longrightarrow x=y^2-1$$

$$S=\int_0^2 (y+1-y^2+1)dy=(\frac{1}{2}y^2+y-\frac{1}{3}y^3+y)\Big|_0^2=\frac{10}{3}$$

سوال: مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حساب کنید؟



$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} \Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$S=\int_0^a (b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})dx$$

$$\frac{x}{a}=\sin t \longrightarrow x=a\sin t \Rightarrow dx=a\cos t\ dt \longrightarrow \int(\sqrt{a^2-x^2})dx=\int a^2\cos^2 t\ dt=\int a^2(\frac{1+\cos 2t}{2})dt$$
$$=a^2(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)+c$$
$$S=\frac{b}{a}(a^2(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=ab(\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\pi ab}{4}$$

مساحت بیضی $\longrightarrow 4S=\pi ab$

حجم

فرض کنیم S جسمی باشد که بین صفحات x=a و x=b قرار گرفته است، هم چنین فرض کنید $A(x_0)$ مساحت مقطع این جسم با صفحه $x=x_0$ باشد، به طوری که $A(x)$ یک تابع انتگرال پذیر است. در این صورت مساحت این حجم برابر است با:

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

سوال: حجم کره ای به شعاع r را حساب کنید؟

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

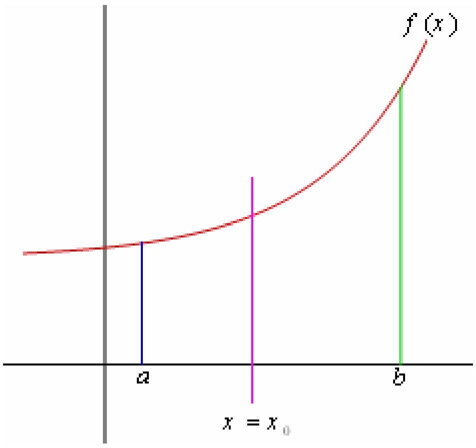
حال اگر $z=z_0$ دایره ای به صورت زیر بدست می آید:

$$x^2+y^2=r^2-z^2 \longrightarrow A(z)=\pi(r^2-z^2)$$

$$V=\int_{-r}^{r} A(z)dz=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-z^2)dz=\pi(r^2z-\frac{1}{3}z^2)\Big|_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

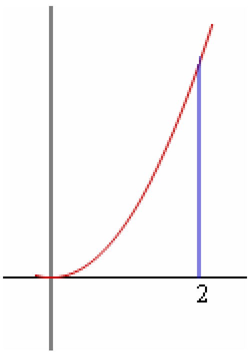
حجم جسم دورانی

فرض کنید منحنی $y=f(x)$ حول محور x ها دوران می یابد، اگر x را در فاصله (a,b) در نظر بگیریم، جسم حاصل یک شکل سه بعدی است که اگر آن را با صفحه $x=x_0$ قطع دهیم، سطح مقطع آن محل قطع صفحه با شکل یک دایره می باشد که شعاع دایره $f(x_0)$ است.



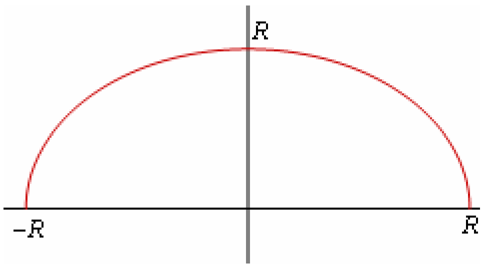
$$A(x_0)=\pi(f(x_0))^2 \longrightarrow V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b \pi(f(x_0))^2dx$$

سوال: حجم جسم با ضابطه $y=f(x)=x^2$ را در فاصله $0\le x\le 2$ را با محور x ها دوران یافته را بیابید؟



$$V=\int_0^2 \pi(f(x))^2=\int_0^2 \pi x^4dx=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^2 \Rightarrow V=\frac{32\pi}{5}$$

سوال: حجم کره ای به شعاع r را حساب کنید؟

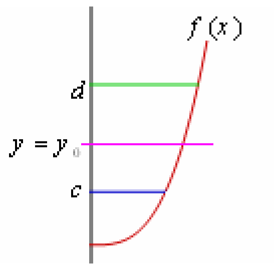


$$x^2+y^2=R^2 \longrightarrow y=\sqrt{R^2-x^2}$$

$$A(x)=\pi(R^2-x^2)$$

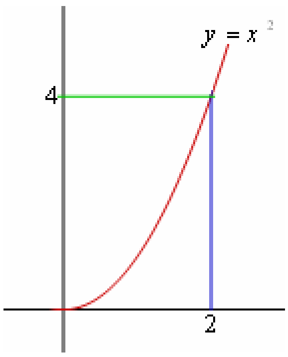
$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

اگر تابع f(x) حول محور y ها دوران یابد، مثل حالت قبل جسمی سه بعدی به وجود خواهد آمد که در سطح آن با $y=y_0$ دایره ای است، به شعاع $f^{-1}(y)$ یعنی برای محاسبه این حجم باید تابع را برحسب y نوشت، یعنی $x=f^{-1}(y)$ و سپس حدود تغییرات y را بدست آوریم، زیرا با تغییر $A(y_0)$ جسم مذکور حجمش به طور کامل جارو خواهد شد.



$$V=\int_{c}^{d}\pi(f^{-1}(y))^2dy$$

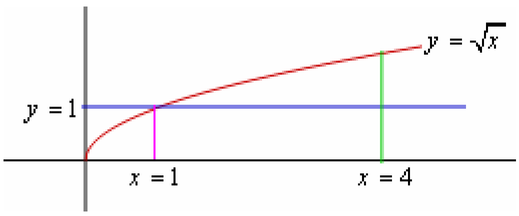
سوال: تابع $y=x^2$ را حول محور y ها دوران می دهیم، وقتی $0<x<2$ می باشد، حجم حاصل را بیابید؟



$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}=f^{-1}(y)$$

$$V=\int_0^4\pi y dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi$$

سوال: حجم جسمی دورانی را از دوران ناحیه محدود به $y=\sqrt{x}$ و خطوط $y=1$ و $x=4$ حول خط $y=1$ به وجود می آید را حساب کنید؟

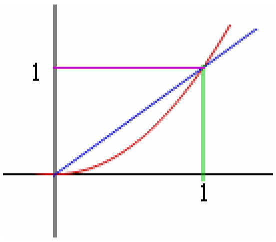


شعاع : $\sqrt{x_0}-1$

$$A(x_0)=\pi(\sqrt{x_0}-1)^2$$

$$\int_1^4\pi(x+1-2\sqrt{x})dx=\pi(\frac{1}{2}4^2+4-2(\frac{2}{3})\sqrt{4^3})-(\frac{1}{2}+1-2(\frac{2}{3}))=\pi(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{2}{3})=\frac{7\pi}{6}$$

سوال: مساحت محدود به $y=f(x)=x^2$ ، $y=x$ و $x>0$. این مساحت را حول محـور y هـا دوران دهـیم، حجـم حاصل از این دوران را بدست آورید؟

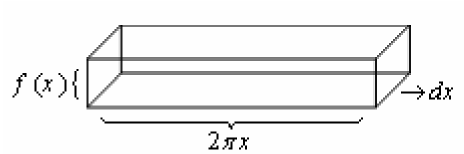


$$r(y_0)=y_0 \qquad R(y_0)=\sqrt{y_0}$$

$$V=\int_c^d \pi(R^2(y)-r^2(y))dy=\int_0^1 \pi(y-y^2)dy=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\Rightarrow V=\frac{\pi}{6}$$

روش پوسته های استوانه ای

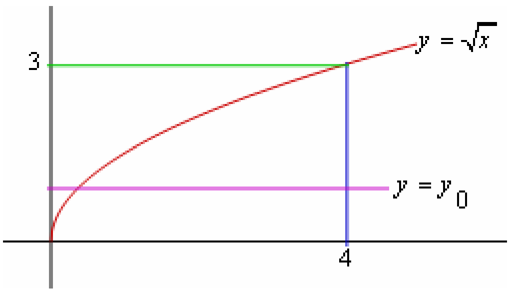
اگر نوار های مستطیلی تقریب زننده، ناحیه ای که حول آن دوران می یابد، با آن محور موازی باشد، اجسـام حاصـل بـه شکل پوسته های استوانه ای خواهند بود، در این صورت حجم حاصل از دوران تابع f(x) به صورت زیر خواهد بود:



$$V=\int_a^b 2\pi x(f(x))dx$$

که در آن x شعاع داخلی استوانه و f(x) ارتفاع خواهد بود.

سـوال: اگر $y=f(x)=\sqrt{x}$ باشد و حول محور x ها دوران دهیم، حجم جـسم حاصـل را حـساب کنیـد، وقتـی کـه $0\le x\le 4$ باشد؟

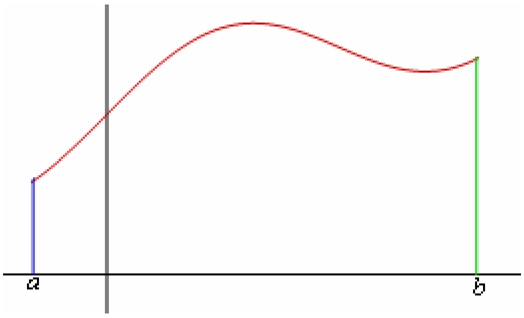


ارتفاع : $4-y_0^2$ شعاع : y_0

$$y_0=\sqrt{x_0}\Rightarrow x_0=y_0^2$$

$$V=\int_0^2 2\pi y(4-y^2)dy=8\pi$$

طول منحنی واقع در صفحه



$$c(x_{i-1},x_i)\longrightarrow(f(x_{i-1}),f(x_i))$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2} \qquad \text{رابطه ۱}$$

$$\exists c_i\in(x_{i-1},x_i)\Rightarrow f'(c_i)=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

طبق رابطه ۱ : $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(c_i)}.\Delta x\longrightarrow L=\int_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}dx=\int_c^d\sqrt{1+(x'_y)^2}dy$

محاسبه طول منحنی های پارامتری

اگر $\begin{cases}x=x_{(t)}\\ y=y_{(t)}\end{cases}$ باشد، می شود ثابت کرد که:

$$if\quad a\le t\le b\Rightarrow L=\int_a^b\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}.dt$$

سوال: محیط دایره ای به شعاع r را بدست آورید؟

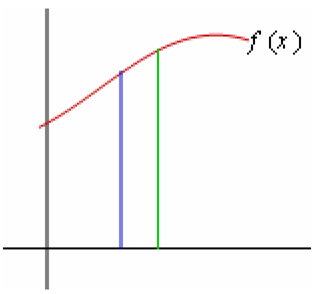
$$\begin{cases}x=r\cos t\\ & 0\le t\le 2\pi\\ y=r\sin t\end{cases}$$

$$\frac{L}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2(\sin^2t+\cos^2t)}.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r.dt\Rightarrow\frac{L}{4}=\frac{r\pi}{2}$$

$$L=4(\frac{r\pi}{2})\Rightarrow L=2\pi r$$

مساحت رویه های دورانی

اگر ds را جز طول نوار و ρ را شعاع فرض کنیم، آنگاه



$$y=f(x)\qquad a\le x\le b$$

$$S=\int_a^b2\pi\rho ds\Rightarrow S=\int_a^b2\pi y\sqrt{1+(y'_x)^2}.dx$$

سوال: مساحت رویه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را وقتی حول محور x ها دوران می دهیم، در بازه $0 \le x \le 4$ بدست آورید؟

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\rho=f(x)=\sqrt{x}$$

$$S=\int_0^4 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=\pi\int_0^4\sqrt{1+4x}\,dx=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+4x)^{1+\frac{1}{2}}\Big|_0^4=\frac{\pi}{6}(1-17\sqrt{17})$$

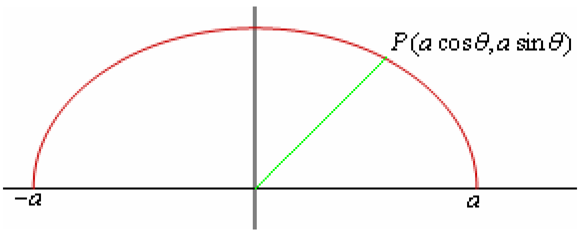
اگر معادله منحنی به شکل پارامتری باشد، آنگاه

$$x=x_{(t)} \qquad y=y_{(t)}$$

$$t_1\le t\le t_2 \qquad a\le x\le b$$

$$S=\int 2\pi\rho ds=\int_{t_1}^{t_2}2\pi\rho_{(t)}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$

سوال: نیمه بالای دایره $x^2+y^2=a^2$ حول محور x ها دوران می دهیم، مساحت رویه بدست آمده را حساب کنید؟



$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ & 0\le\theta\le\pi \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$

$$\rho(\theta)=a\sin\theta$$

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}\,d\theta=\sqrt{a^2(\sin^2\theta+cos^2\theta)}\,d\theta=a\,d\theta$$

$$S=\int_0^\pi 2\pi a^2\sin\theta\,d\theta=2\pi a^2\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta=4\pi a^2$$

محاسبه مساحت زیر سطح منحنی وقتی معادلات پارامتری داده شده، برابر است:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydy$$

$$x=x_{(t)}\longrightarrow dx=x'_{(t)}\,dt$$

$$\longrightarrow S=\int_{t_1}^{t_2}y_{(t)}x'_{(t)}\,dt$$

$$y=y_{(t)}$$

سوال: مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را حساب کنید؟

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ & 0\le\theta\le\pi \\ y = a\sin\theta \end{cases}$$

$$dx = -a\sin\theta$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta = -ab\,\frac{\pi}{4}$$

همانطور که ملاحظه می کنید مساحت منفی شده است پس با توجه به این که $\cos\theta$ در ربع اول کاهشی است. خـواهیم داشت:

$$x_i = a\cos\theta_i \qquad \Delta x_i = dx_i = a(\cos\theta_i - \cos\theta_{i-1}) \qquad d\theta \approx \theta_i - \theta_{i-1}$$

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta = ab\,\frac{\pi}{4}$$

بدست آوردن حجم از طریق معادله پارامتری

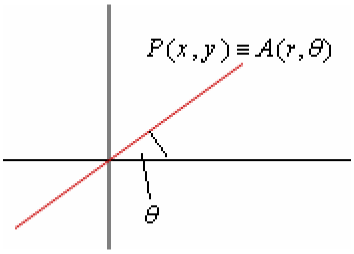
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \int_a^b \pi y^2 dx \qquad V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2_{(t)}.x'_{(t)}.dt$$

سوال: حجم حاصل از دوران $x = a\cos^3 t$ و $y = a\sin^3 t$ را حول محور x ها بدست آورید؟ ($0\le t\le\pi$)

$$dx = -3a\sin t\cos^2 t.dt$$
$$y^2_{(t)} = a^2\sin^6 t$$

$$V = \int_\pi^0 (-3a^3)\pi\sin^7 t\cos^2 t.dt = -3a^3\pi\int_\pi^0 \sin^7 t\cos^2 t.dt$$

مختصات قطبی



$$x = r\cos\theta \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$
$$y = r\sin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

سوال: شکل قطبی $y=x$ را بنویسید؟

$y=f(x)=x$

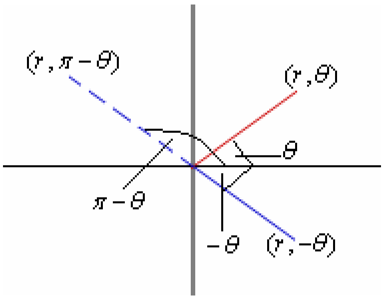
$r=1 \qquad \theta=\frac{\pi}{4} \;\; , r>0 \quad \theta=\frac{5\pi}{4} \;\; , r>0$

سوال: شکل قطبی $x^2+y^2=a^2$ را بنویسید؟ $(0\le\theta\le 2\pi)$

تقارن

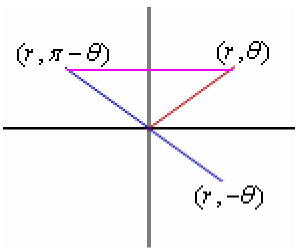
<u>*تقارن نسبت به محور x ها*</u>

تابع $r=f(\theta)$ نسبت به محور x ها تقارن دارد که اگر θ را به $-\theta$ تغییر دهیم، شکل تغییر نکند.



$$(r,\theta)\to(r,\pi-\theta)\Rightarrow r=f(\theta)\equiv -r=-f(\theta)$$

<u>*تقارن نسبت به محور y ها*</u>

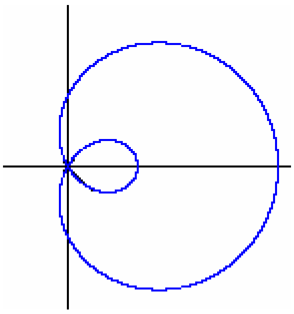


شرط تقارن : $\begin{cases}\theta\to\pi-\theta\\(r,\theta)\to(-r,-\theta)\end{cases}$

اکسترمم های نسبی r

معادله $r=f(\theta)$ را در نظر بگیرید که $f(\theta)$ یک تابع مشتق پذیر است بـا اسـتفاده از روش هـای مـشتق گیـری و اکسترمم می توان اکسترمم های نسبی آن را تعیین کرد ولی چون فاصله نقطه (r,θ) تا مبدا که همان قطب است برابـر $|r|$ است. ممکن است ماکزیمم و می نیمم های نسبی r نقاطی را بدست بدهند که فاصله آن ها تا قطب مـاکزیمم نـسبی باشد.

مثال : $r=f(\theta)=1+2\cos\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$



$$\frac{dr}{d\theta}=-2\sin\theta=0 \qquad \theta=0,\pi$$

$$f(0)=1+2=3 \qquad f(\pi)=-1$$

شیب و خطوط مماس

برای یافتن شیب یک خط مماس بر یک نمودار قطبی تابع مشتق پذیر $r=f(\theta)$ را در نظر می گیریم، هرگاه α زاویـه از محور ها قطبی به خط مماس در نقطه (r,θ) باشد، آنگاه $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$. پس

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\\ &x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta\\ &y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta\end{aligned}\right\}\longrightarrow \frac{f(\theta)\cos\theta+f'(\theta)\sin\theta}{-f(\theta)\sin\theta+f'(\theta)\cos\theta}=\tan\theta$$

قضیه (شیب یک شکل قطبی): هرگاه f یک تابع مشتق پذیر از θ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر نمودار $r=f(\theta)$ در نقطه (r,θ) برابر است با: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ به شرط آن که $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ باشد.

نتایج حاصل از قضیه

۱- جواب های معادله $\frac{dy}{d\theta}=0$، مماس های افقی را بدست می دهد، به شرط اینکه $\frac{dx}{d\theta}\neq 0$ باشد.

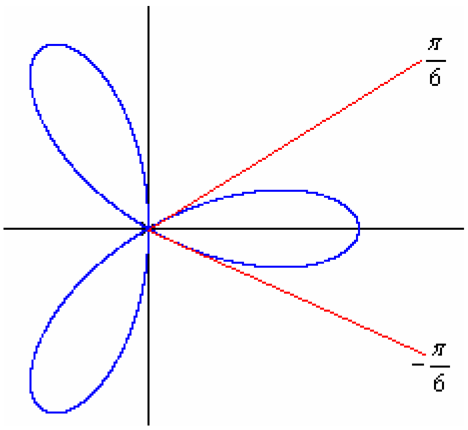
۲- جواب های معادله $\frac{dx}{d\theta}=0$ مماس های قائم را بدست می دهد، به شرط آن که $\frac{dy}{d\theta}\neq 0$ باشد.

۳- اگر $\frac{dx}{d\theta}=0$ و $\frac{dy}{d\theta}=0$ باشند، در مورد مماس ها نتیجه ای نمی توان گرفت.

قضیه (خطوط مماس در قطب): اگر $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)\neq 0$ باشد، آنگاه خط $\theta=\alpha$ در قطب بر نمودار مماس است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(\alpha)\sin\alpha+f(\alpha)\cos\alpha}{f'(\alpha)\cos\alpha-f(\alpha)\sin\alpha}=\tan\alpha$$

سوال: نمودار $r=3\cos 3\theta$ را رسم کنید. ($0\leq\theta<2\pi$)

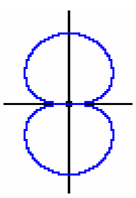


$$\cos 3\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
r	3	0	-2.25	-3

نکته: به طور کلی $\begin{cases} r=a\cos n\theta \\ r=a\sin n\theta \end{cases}$ یک n پر است.

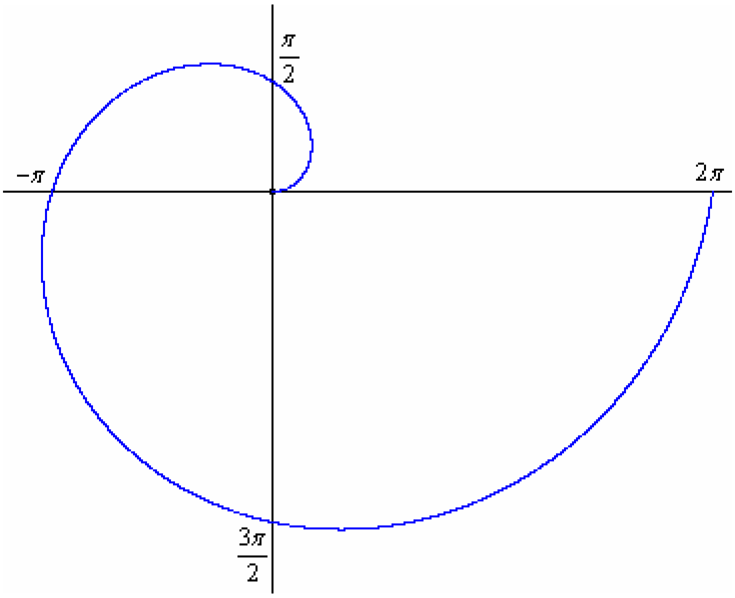
مثال : $r=\sqrt{|\sin\theta|}$



برای رسم نمودار $r = f(\theta)$ از طریق نقطه یابی خطوط $\theta = \theta_0$ را برای مقادیر θ_0 متعلق به دامنه $f(\theta)$ رسم می کنـیم. این خطوط، خطوطی هستند که از قطب می گذرند و با محور قطب زاویه θ_0 را می سازند. حال مقادیر $f(\theta_0)$ را بدسـت می آوریم و به اندازه مقدار $f(\theta_0)$ روی خط $\theta = \theta_0$، r_0 را انتخاب می کنیم. حال نقاط بدست آمده را به ترتیب به هـم وصل می کنیم، شکل تقریبی ظاهر می شود.

پیچ ارشمیدس

$0 \le \theta \le 2\pi$ $r = a\theta$ در حالت کلی $\longrightarrow r = \theta$



تبدیل قطبی به دکارتی

$$r = f(\theta) \rightarrow y = \sin\theta . f(\theta)$$

مساحت در مختصات قطب

ناحیه S محدود به منحنی $r = f(\theta)$ و $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ را در نظر بگیرید، برای بـه دسـت آوردن مـساحت ناحیـه S می توان زاویه $\beta - \alpha$ را به n قسمت افراز کرد. اگر فرض کنیم، تعداد این افراز ها تا حد معقولی زیاد اسـت، مـساحت قطاع i ام برابر خواهد بود با $\frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i$ که در آن r_i مقداری است بین $f(\theta_{i-1})$ و $f(\theta_i)$. اگر تمامی افراز ها را با هـم دیگر جمع بزنیم و n را به سمت ∞ میل دهیم مقدار واقعی مساحت به صورت زیر خواهد بود:

$$S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i \longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i \xrightarrow{n \to \infty} \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

سوال: مساحت محدود به منحنی $r=3\cos 3\theta$ را بدست آورید؟

$$S=(\frac{1}{2})\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 9\cos^2 3\theta d\theta=\frac{9\pi}{4}$$

طول منحنی در مختصات قطبی

$$L=\int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt$$

$$x=f(\theta)\cos\theta \longrightarrow dx=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)d\theta$$
$$y=f(\theta)\sin\theta \longrightarrow dy=(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)d\theta$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}\ d\theta$$

سوال: طول دور اول پیچ ارشمیدس را بدست آورید؟

$r=a\theta \qquad 0\le\theta\le 2\pi$

$r^2=a^2\theta^2$

$r'=a\rightarrow r'^2=a^2$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\theta+a^2}d\theta=|a|\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}d\theta=\frac{8|a|\pi}{3}$$

حجم منحنی در مختصات قطبی

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad \longrightarrow V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2_{(t)}x'_{(t)}\,dt$$

$$y(\theta)=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$
$$x(\theta)=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \longrightarrow x'(\theta)=(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)d\theta$$

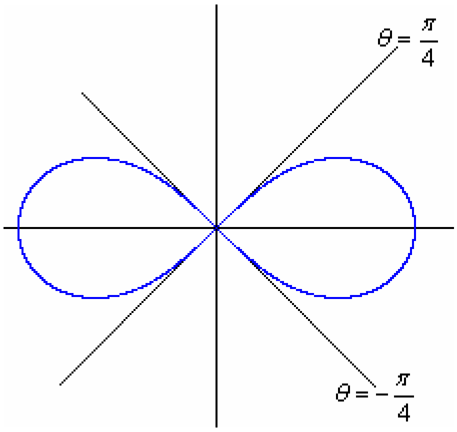
$$V=\pi\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\sin^2\theta(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)d\theta$$

مساحت رویه حاصل از دوران حول محور قطبی

$$S=\int 2\pi\rho ds \qquad ds=\sqrt{f^2(\theta)-f'^2(\theta)}d\theta$$

$$\Rightarrow S=\int_\alpha^\beta 2\pi f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^2(\theta)-f'^2(\theta)}d\theta$$

سوال: مساحت رویه ای که از دوران پر سمت راست پروانه $r^2 = 2a\cos^2 2\theta$ حول محور y ها را بدست آورید؟



$$\rho = x = r\cos\theta = \sqrt{2a^2\cos 2\theta}\cos\theta$$

$$ds = \sqrt{2a^2\cos 2\theta + r'}d\theta$$

$$2\pi\rho ds = 2\pi\cos\theta\sqrt{r^2dr^2 + r^4dr^2} = 4\pi a^2\cos\theta d\theta$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\pi a^2\cos\theta d\theta = 4\pi a^2\sqrt{2}$$

تمرینات فصل هشتم:

تمرین: مساحت محصور به نمودار $f(x)=x^2+2x+3$ و دو خط $x=0$ و $x=2$ و محور x ها را بدست آورید؟

تمرین: مشتق گیری از انتگرال را اثبات کنید.

تمرین: محیط بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید؟

تمرین: حجم بیضی گون به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را حساب کنید؟

تمرین: استوانه ای مستطیل (مقطع دایره) به شعاع R را در نظر بگیرید، صفحه ای از قطر قاعده آن می گذرد که با قاعده زاویه α می سازد، حجم قطعه بریده شده را تعیین کنید؟

تمرین: حجم مشترک دو استوانه به معادلات $x^2+y^2=r^2$ و $y^2+z^2=r^2$ را تعیین کنید؟

تمرین: حجم محدود به صفحات $x=a$ و $y=0$ و $z=0$ و سطوح استوانه ای $x^2=2Py$ و $z^2=2Px$ را محاسبه کنید؟ $(P>0)$

تمرین: انتگرال های زیر را حساب کنید؟

1) $\int 3^x e^x\,dx$

2) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

3) $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$

4) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

5) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+1}dx$

6) $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$

7) $\int (Arc\cos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})dx$

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$