بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم

مروری بر نظریه گراف

براساس کتاب ساختمان های گسسته پیام نور (ویرایش جدید)

فصل چهارم(گراف) و فصل پنجم(درخت)

تهیه و تنظیم اسلایدها: جعفر اوج بگ

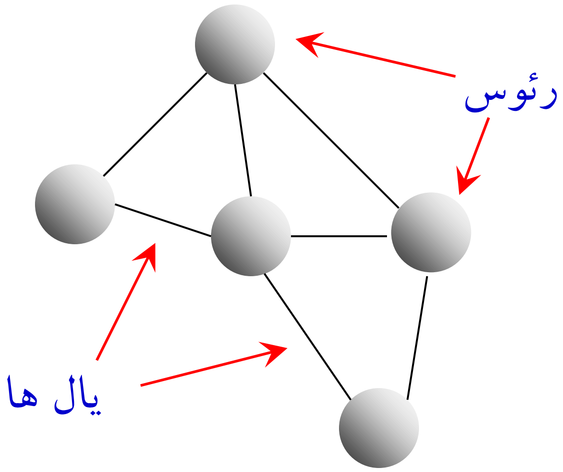
تعریف گراف

فرض کنید V یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی، $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی متشکّل از تمامِ زیرمجموعه‌های دوعضوی V و $E \subseteq \mathcal{M}$. زوجِ مرتّبِ (V, E) را یک گرافِ ساده می‌نامند.

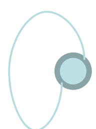
گرافِ ساده‌ی (V, E) را معمولاً با G نمایش می‌دهند و می‌نویسند $G = (V, E)$.

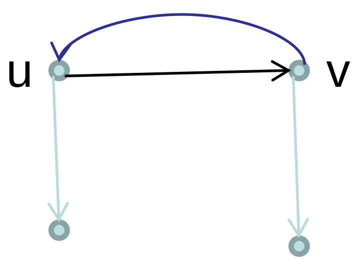
- اندازه گراف (تعداد یال)
- مرتبه گراف (تعداد راس)
- درجه راس (تعداد یالهای متصل به راس)

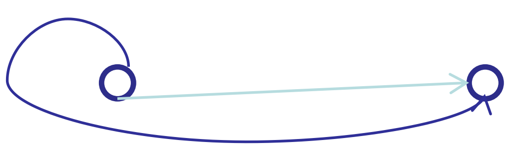
$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{e \in E} \deg(e)$$



گراف تهی، حلقه، یال موازی، گراف ساده، گراف مختلط



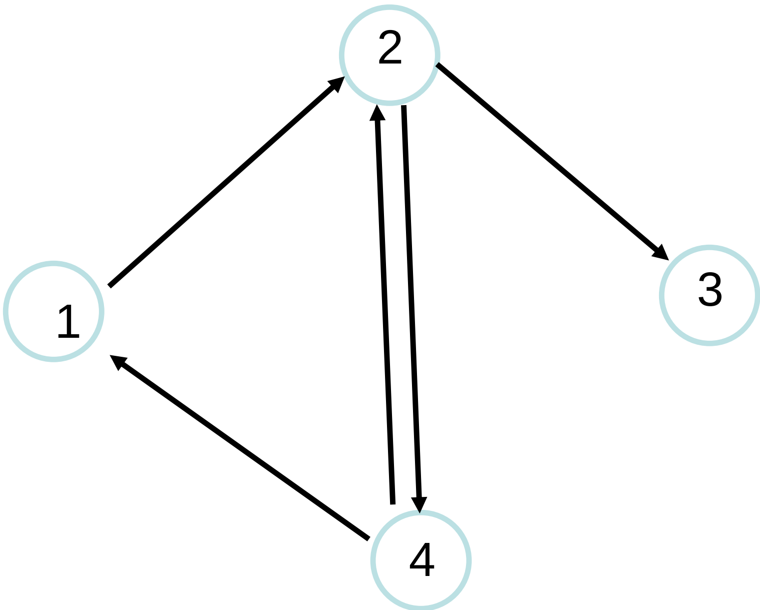




- گراف بدون یال را گراف تهی می نامند.
- یالی که تنها یک راس دارد را طوقه یا حلقه می خوانیم.
- در گراف جهت دار **(u,v)** و **(v,u)** متمایز از یکدیگر هستند.
- هرگاه بین دو راس یک گراف بیش از یک یال موجود باشد، آن یال ها را یال های موازی گوییم.
- گراف فاقد یال موازی و طوقه را گراف ساده می خوانیم.
- گرافی که شامل یال های جهتدار و غیر جهتدار باشد، گراف مختلط نامیده می شود.

مثال

• گراف جهتدار



• $V = \{1, 2, 3, 4\}, |V| = 4$

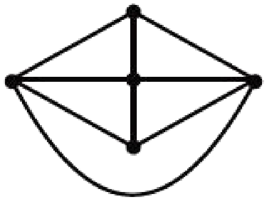
• $E = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2)\}, |E| = 5$

تعداد گراف های ساده، گرافِ چندگانه

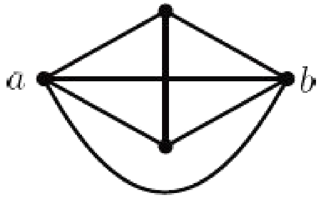
تعدادِ گراف‌های ساده‌ای که می‌توان روی مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ بنا کرد برابر با $2^{\frac{p(p-1)}{2}}$ است.

از تعریفِ گرافِ ساده واضح است که بین هر دو رأس از گرافِ ساده، حدّاکثر یک یال وجود دارد. ولی گاهی نیاز داریم که بین برخی از رأس‌های یک گراف، بیش از یک یال رسم کنیم. چنین گراف‌هایی را گرافِ چندگانه می‌نامند.

گرافِ

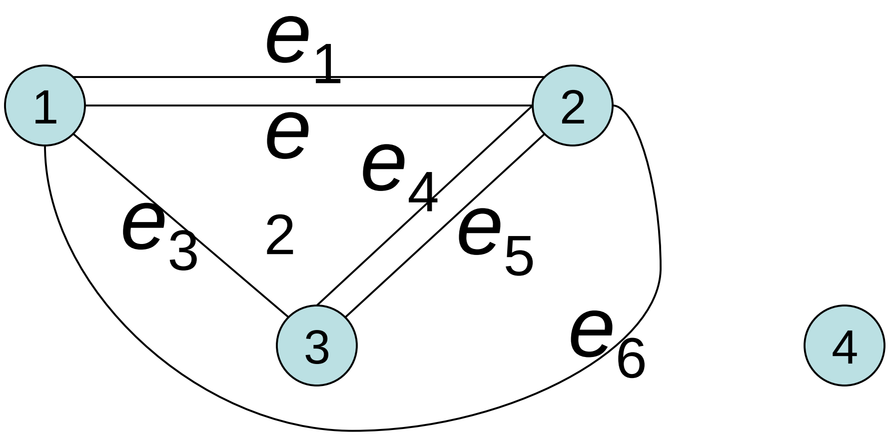


یک گرافِ ساده ولی گرافِ



یک گرافِ چندگانه است زیرا بینِ دو رأسِ a و b دو یال وجود دارد.

مثال: گراف چندگانه



$e_1 \rightarrow \{1,2\}$, $e_2 \rightarrow \{1,2\}$, $e_3 \rightarrow \{1,3\}$,
$e_4 \rightarrow \{2,3\}$, $e_5 \rightarrow \{2,3\}$, $e_6 \rightarrow \{1,2\}$

دنباله گرافیکی، گراف منتظم، گراف مکمل

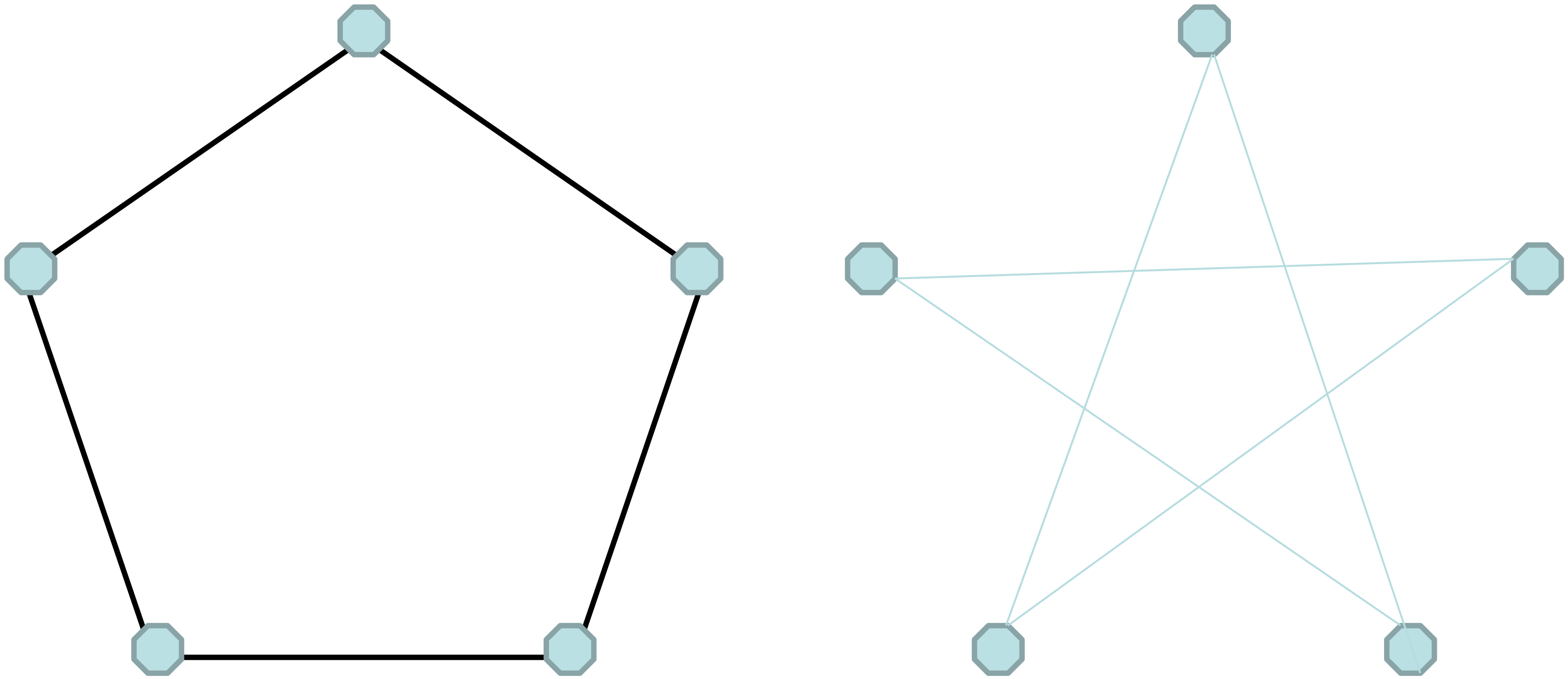
دنباله‌ی نزولی «$d_1, d_2, \ldots, d_p$»، متشکّل از عددهای صحیحِ نامنفی را یک دنباله‌ی گرافیک می‌نامند هرگاه گرافِ ساده‌ای یافت شود که این دنباله، دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های آن باشد.

فرض کنید r یک عددِ صحیحِ نامنفی باشد. گرافِ ساده‌ای را که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن برابر با r باشد، گرافِ rـ‌منتظم می‌نامند.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گرافِ ساده و M مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دوعضویِ V باشد. در این صورت زوجِ مرتّبِ $(V, \bar{E})$ را که در آن $\bar{E} = M - E$، مکمّلِ G نامیده و آن را با $\bar{G}$ نمایش می‌دهند.

در واقع گرافِ مکمّل گرافی با همان مجموعه‌ی رأسی است که در آن یال‌هایی که در گرافِ اصلی رسم شده‌اند، رسم نمی‌شوند ولی یال‌هایی که در گرافِ اصلی رسم نشده‌اند، رسم می‌شوند.

مثالی از گراف مکمل



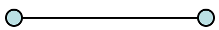
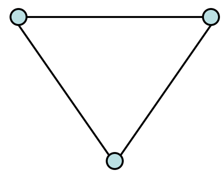
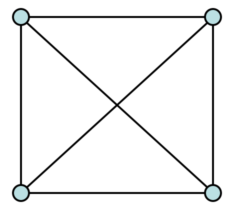
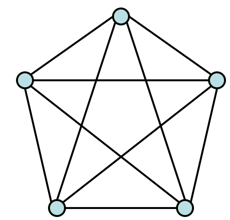
با به دست آوردن ماتریس مجاورت خواهیم دید که ماتریس مجاورت آنها یکسان است.

اجتماع یک گراف با مکمل خود از مرتبه n، گراف کاملی از مرتبه n خواهد بود.

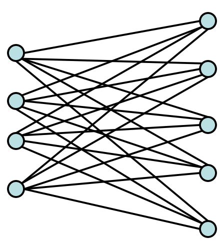
گراف های کامل K_n

- گراف های کامل

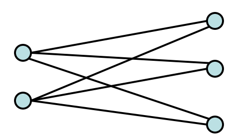
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- گراف های دوبخشی کامل



$K_{4,5}$



$K_{2,3}$

❑ گراف های کامل K_n، $(n-1)$–منتظم است.

زیرگراف، زیرگراف سره

تعریف. گراف G را زیر گراف H گوییم اگر و فقط اگر $V(G) \subseteq V(G)$, $E(G) \subseteq E(H)$

می‌نویسیم $G \subseteq H$

تعریف. زیر گراف سره:

اگر $G \subseteq H$ بوده ولی $G \neq H$ باشد G را زیر گراف سره H می نامند و می نویسند $G \subseteq H$

زیرگراف فراگیر، زیرگراف القایی

تعریف. زیر گراف فراگیر:

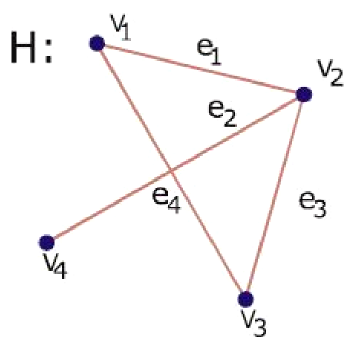
اگر $H \subseteq G$ $V(G)=V(H)$ ، G را زیـر گـراف فراگیـر H مـی نامنـد (یعنـی همـه رئـوس H در G آمده)

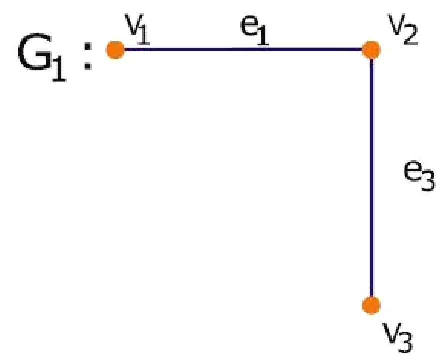
تعریف. زیر گراف القایی:

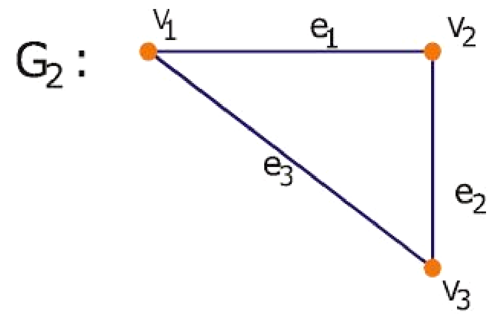
G را زیر گراف القایی H می نامند اگر :

$V(G) \subseteq V(H)$ بوده و میان رئوس $V(G)$ تمام یالهای موجود بین همین رئوس در H نیـز وجـود داشته باشد.

مثال







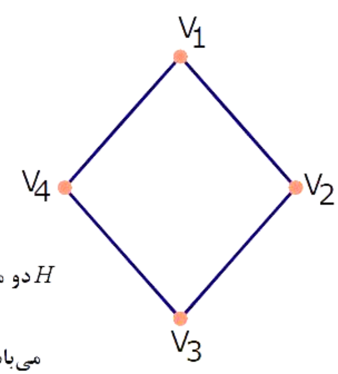
G_1, G_2 هر دو زیر گراف H می باشند ولیکن G_1 زیر گراف القایی H نیست

زیرا یال e_3 میان v_1, v_3 در G_1 موجود نمی باشد ولیکن در H موجود می باشد.

چند نکته

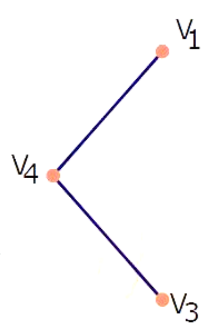
- زیر گراف یک گراف دو بخشی همواره دو بخشی بوده
- زیر گراف یک گراف کامل همواره کامل بوده
- زیر گراف یک گراف تهی نیز همواره تهی بوده
- ولیکن زیر گراف یک $k-$منتظم الزاماً $k-$ منتظم نمی باشد

مثال نقض.



H دو منتظم

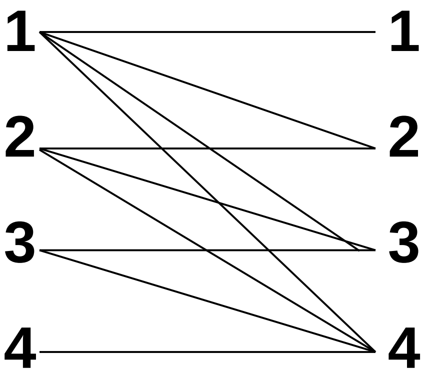
می‌باشد



GCH

منتظم نیست

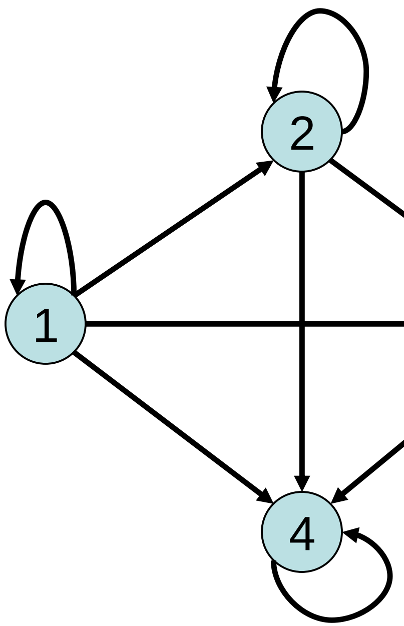
ماتریس مجاورت گراف جهت دار



راسها

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

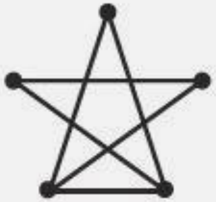
راسها



سوال

ماتریسِ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریسِ مجاورتِ کدام گراف است؟

۱) 

۲) 

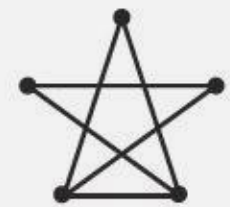
۳) 

۴) 

پاسخ

ماتریسِ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریسِ مجاورتِ کدام گراف است؟

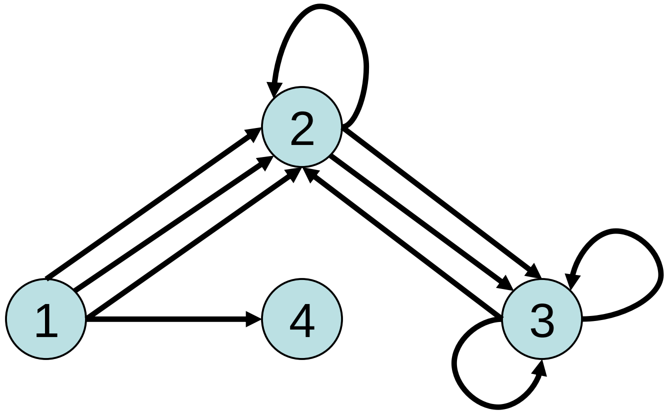
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

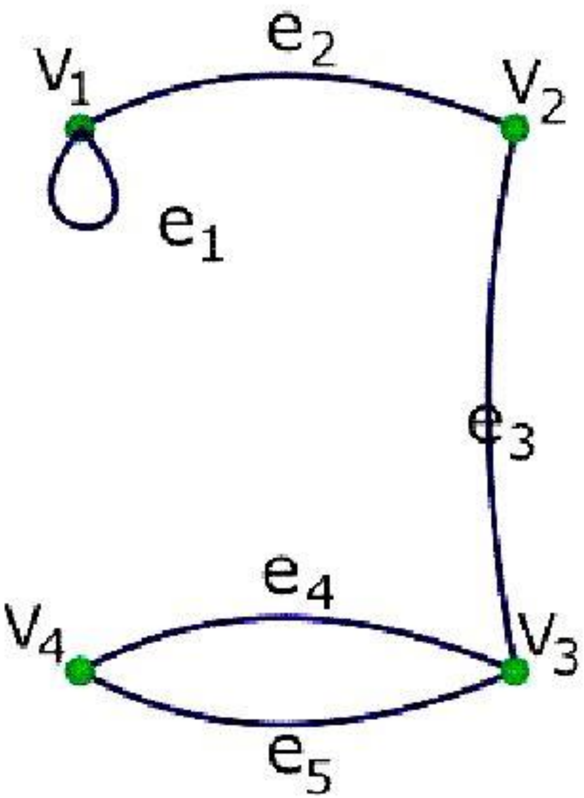
ماتریس مجاورت گراف جهت دار چندگانه



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس وقوع گراف

مثال.



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

چند نکته

1. در ماتریس وقوع همواره مجموع اعداد هر ستون 2 می باشد. زیرا هر ستون معرف یک یـال بوده و هر یال تنها دو سر دارد!
2. مجموع اعداد هر سطر برابر با درجه آن راس می باشد زیرا بیانگر تعداد یالهایی است که این راس یکی از دو سر آن می باشد.
3. عناصر ماتریس وقوع، 0 یا 1 می باشند اگر طوقه نداشته باشد.

تست

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

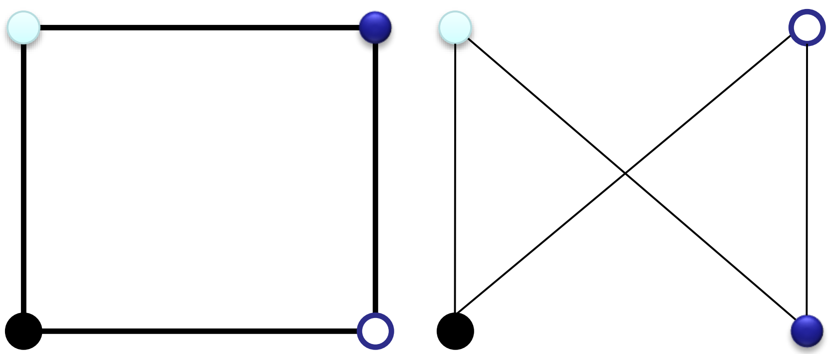
- ماتریس وقوع گرافی به صورت زیر است:
- مقدار **x+y** و درجه راس **v3** را بیابید.
- چون مجموع هر ستون ۲ است لذا **x=1** و **y=1** درنتیجه **x+y=2**
- چون مجموع هر سطر درجه مربوط به راس متناظر است لذا
- **Deg(v3)=2**

دو گراف یکریخت

- دو گراف ساده $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت گویند، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f:V_1\to V_2$ بتوان یافت به طوری که:

$$\forall v_i,v_j: \qquad v_iv_j\in E_1 \Leftrightarrow f(v_i)f(v_j)\in E_2$$

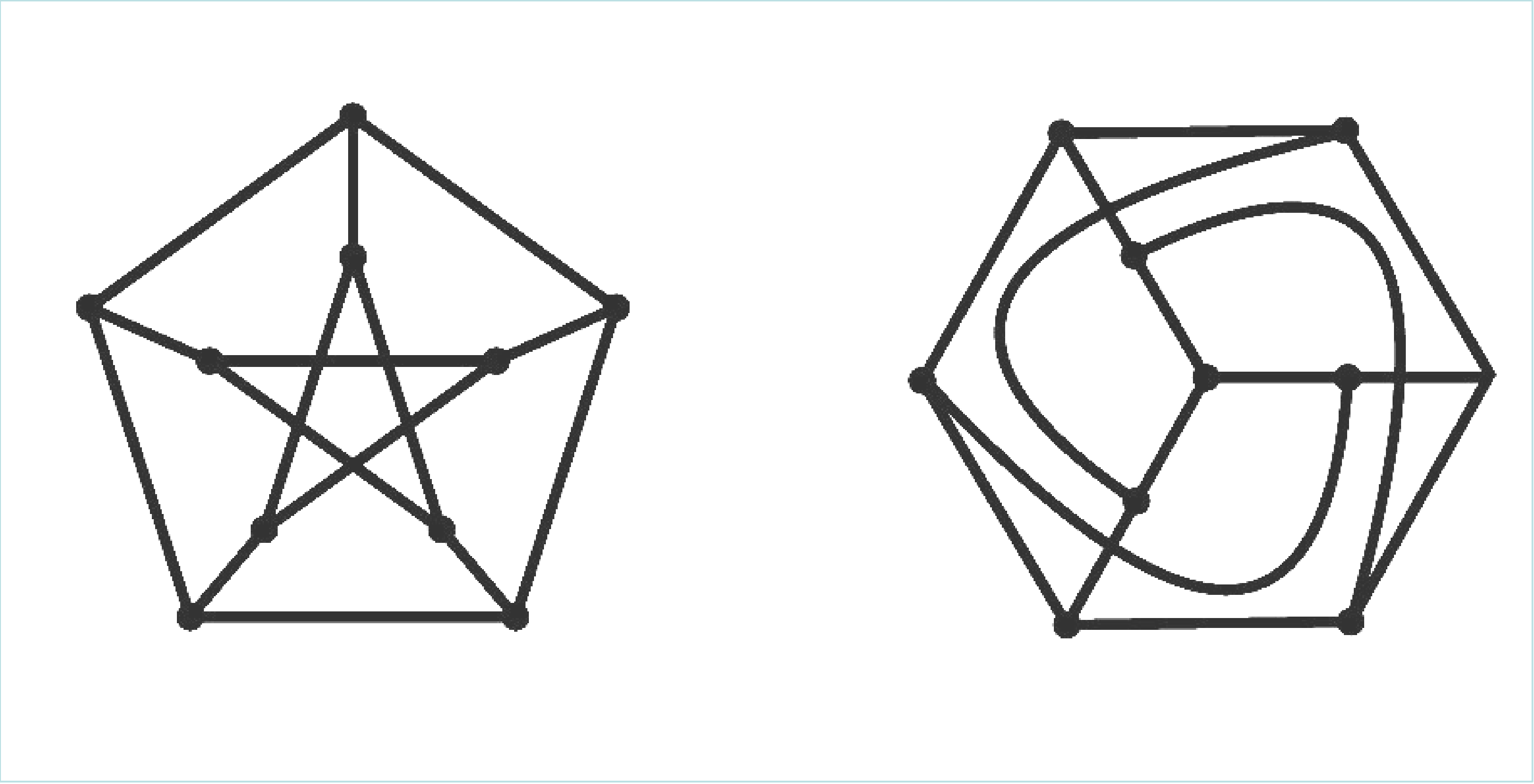
مثال



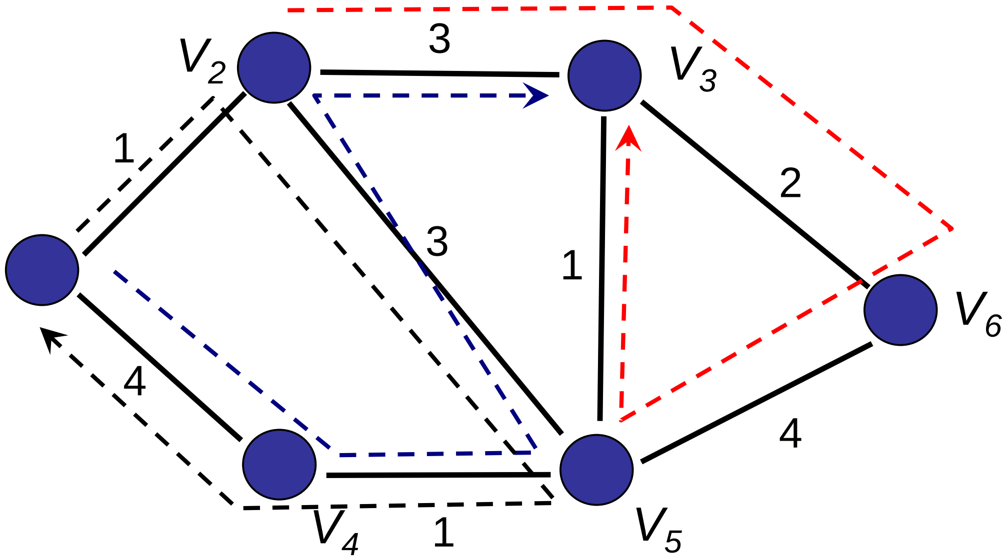
- دو گراف روبرو با هم یکریخت می باشند
- ماتریس مجاورت دو گراف یکریخت مطابق با سطر و ستون های تابع تعریف شده، یکسان هستند. به عبارتی به کمک عملیات سطری مقدماتی از ماتریس اولی می توان دوی را به دست آورد.

سوال

آیا دو گراف زیر یکریخت اند؟



گشت، مسیر، دور



❖گشت: یک گشت از راس **U** به راس **V**، دنباله ای از رئوس و یال هاست که از راس **U** شروع و به راس **V** ختم می شود. تعداد یالهای پیموده شده را نیز طول گشت گوییم.

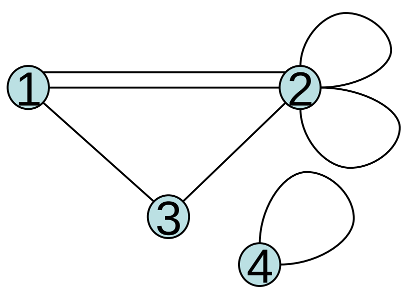
❖مسیر: اگر هیچ راسی در گشت تکراری نباشد، آن را مسیر گویند.
❖گذر: اگر هیچ یالی در گشت تکراری نباشد، آن را گذر گویند.

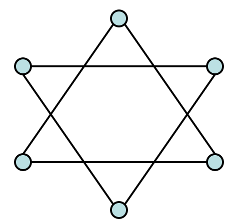
❖مدار (گذر بسته)، گذری است که راس شروع و راس پایانی یکسان باشد.

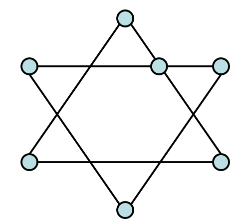
همبندی

- گرافی همبند است که بین هر دو راس آن یک مسیر موجود باشد.

- کدامیک از گراف های زیر همبند است؟

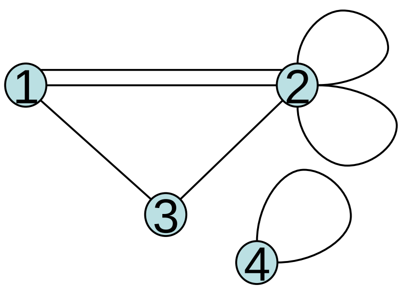


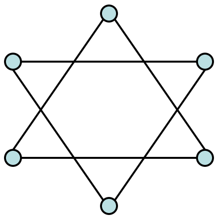


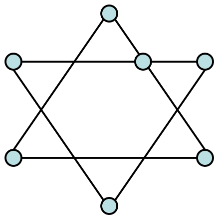


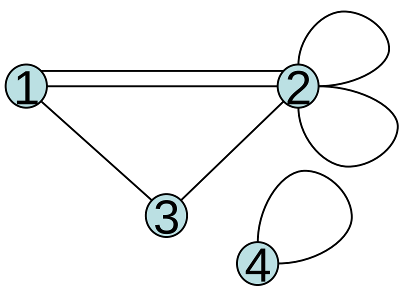
همبندی

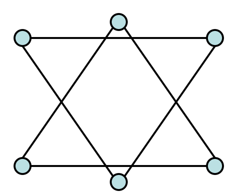
جواب)

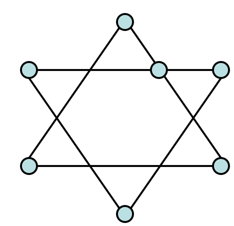


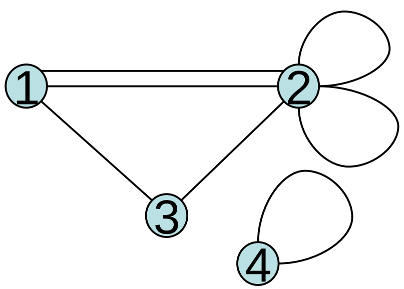


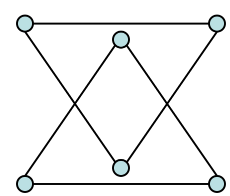


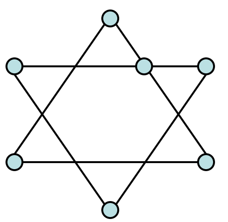

1
2
3
4

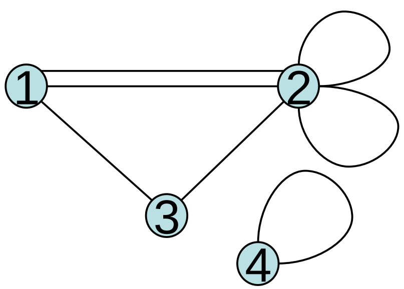


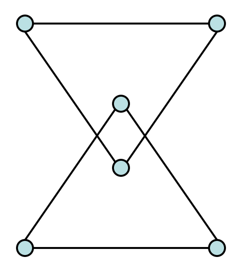


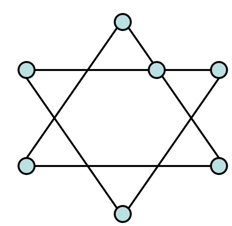

1
2
3
4

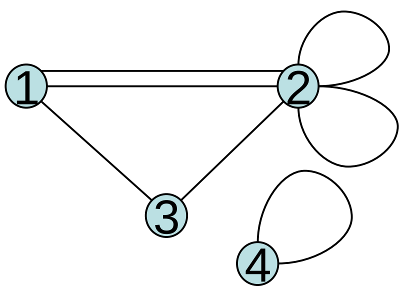
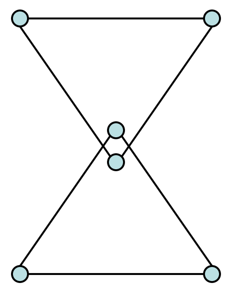
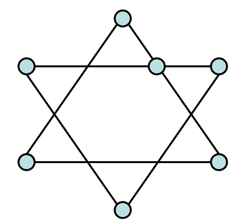


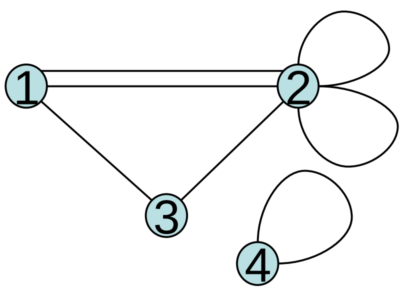


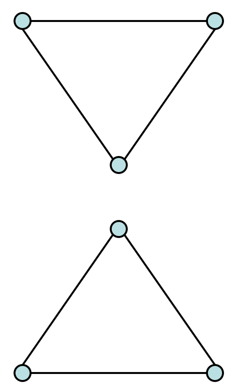

1
2
3
4

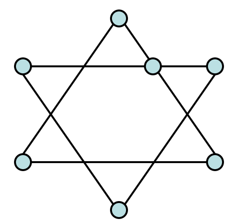





1
2
3
4




1
2
3
4



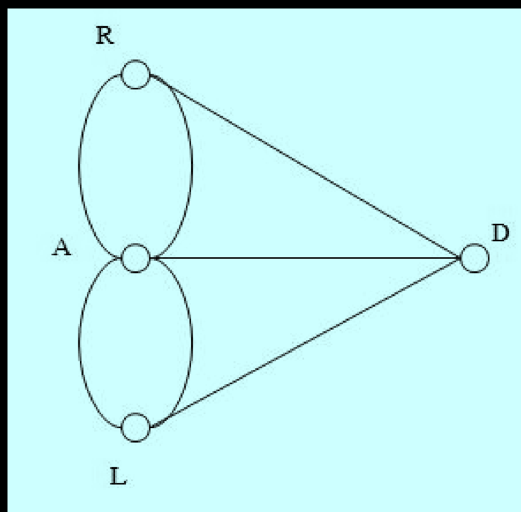


گراف اویلری

- مداری که از تمام یال های گراف عبور کند مدار اویلری نامیده می شود.
- گراف دارای مدار اویلری گراف اویلری نامیده می شود.
- یک گراف همبند(چندگانه) دارای مدار اویلری است اگرو تنها اگر همبند بوده و درجه تمام رئوس آن زوج باشد.
- گذری که از تمام یال های گراف عبور کند گذر اویلری نامیده می شود.
- یک گراف همبند(چندگانه) دارای گذر اویلری است اگرو تنها اگر دقیقاً دارای دو راس از درجه فرد باشد.
- بتابراین گذر اویلری از یک راس فرد شروع و به راس فرد دیگر ختم می شود

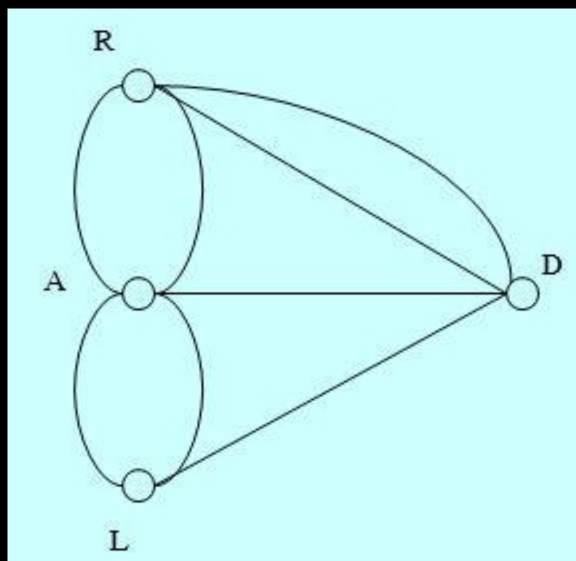
مثال ۱

- گراف زیر فاقد مدار و گذر اویلری است زیرا
- درجه تمام رئوس آن زوج نیست.
- دقیقاً دارای دو راس از درجه فرد نیست.



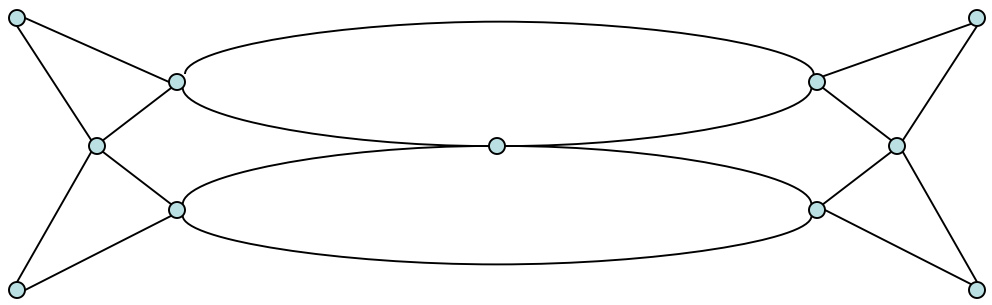
مثال۲

- گراف زیر چه طور؟



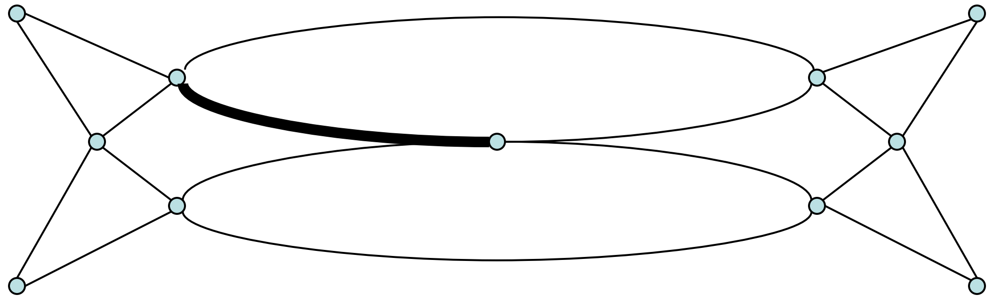
پیدا کردن مدار اویلری

برای گراف زیر گذر اویلری وجود ندارد ولی مدار اویلری وجود دارد، زیرا همبند ودرجه تمام رئوس آن زوج است.

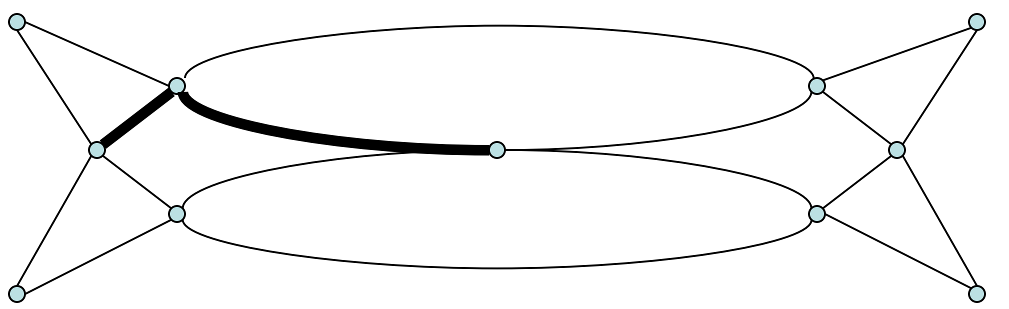


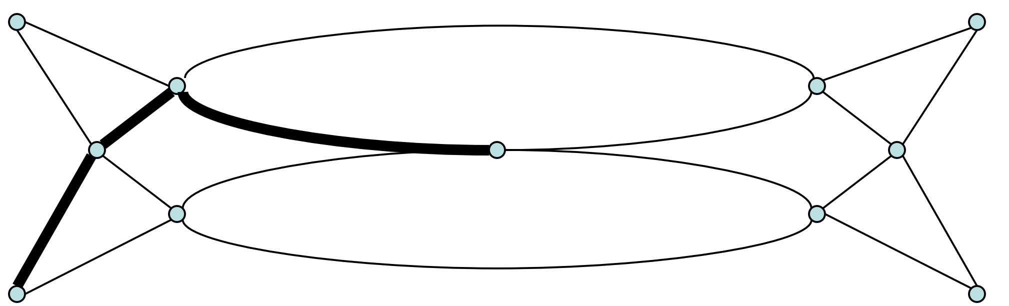
پیدا کردن مدار اویلری

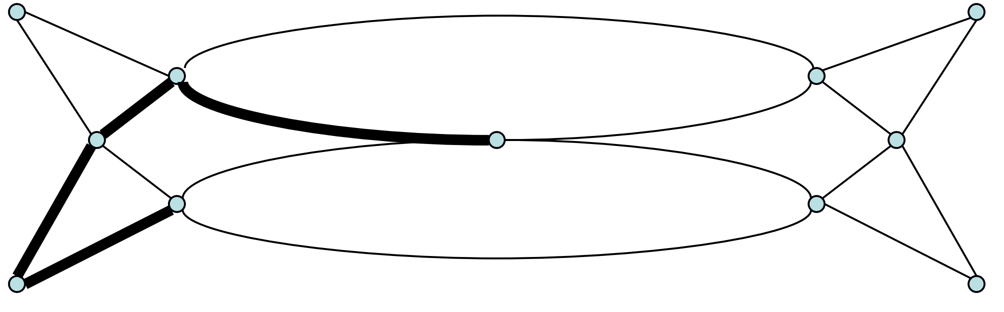
یک دور با شروع از راس میانی بیابید.

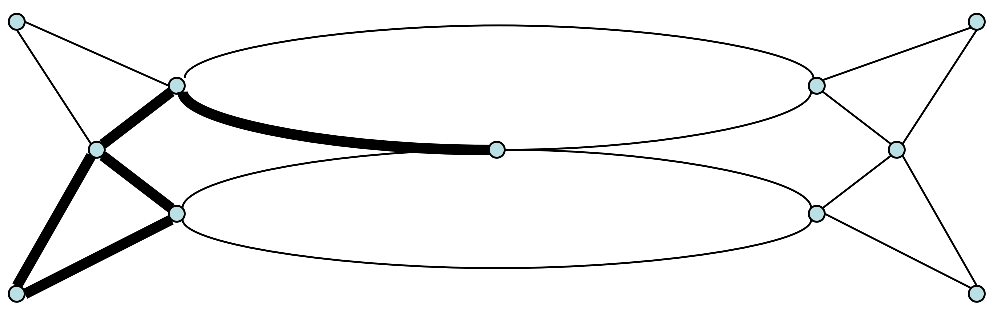


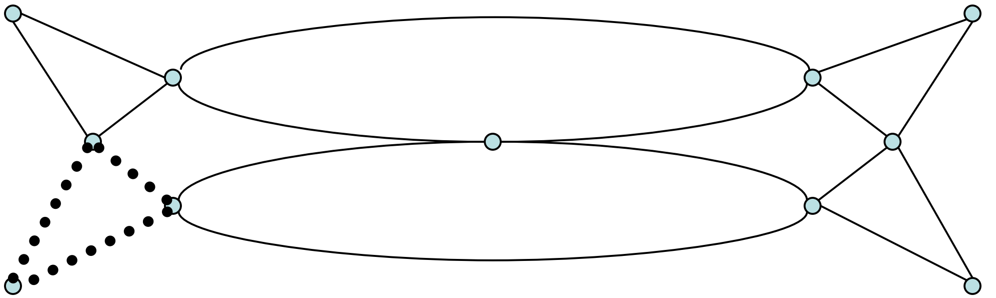
پاک کردن دور:

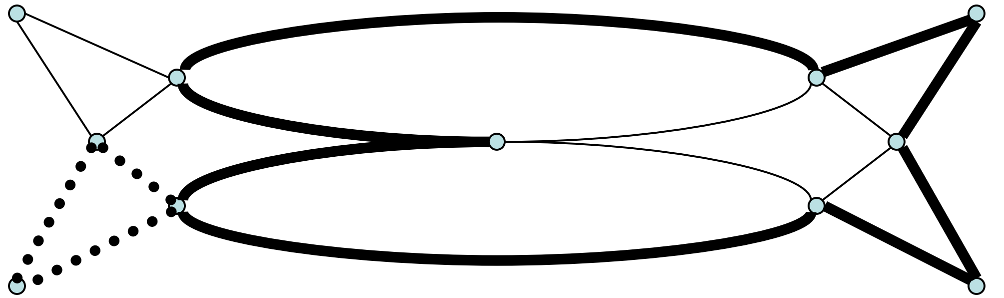


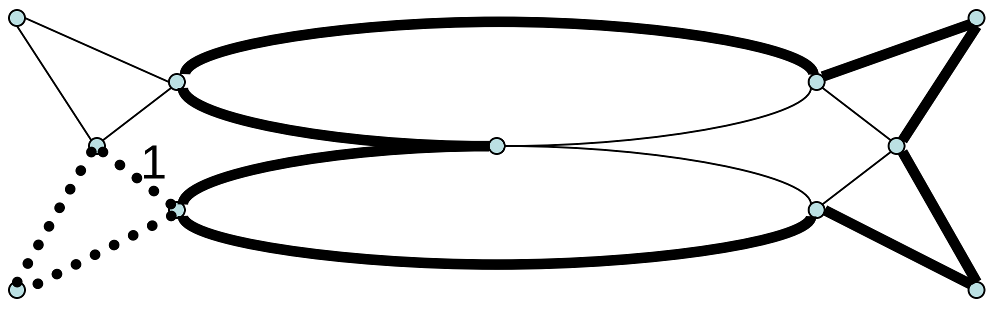


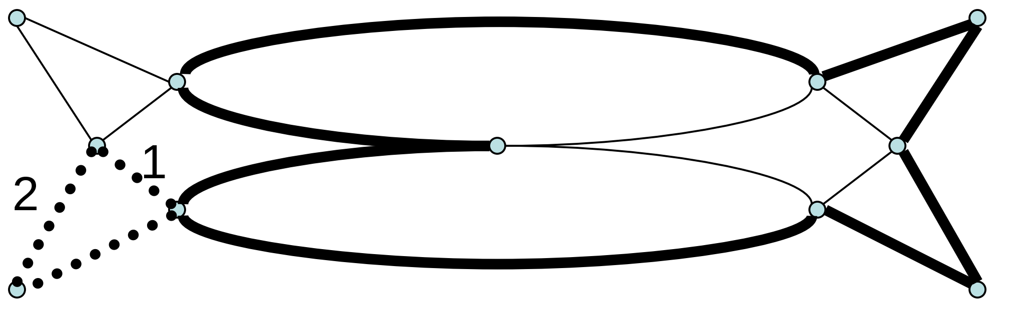


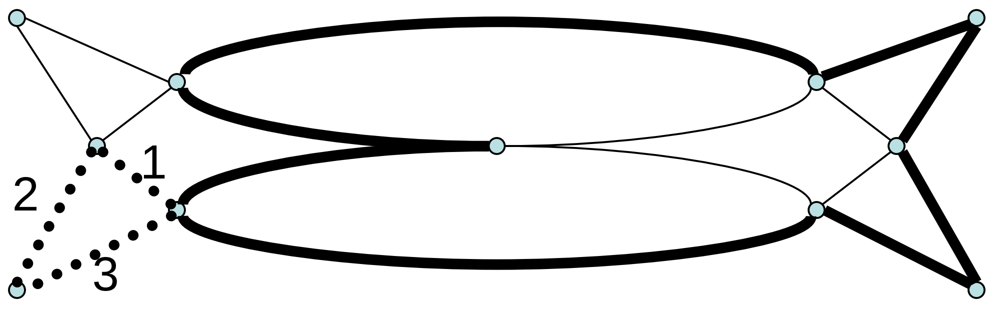


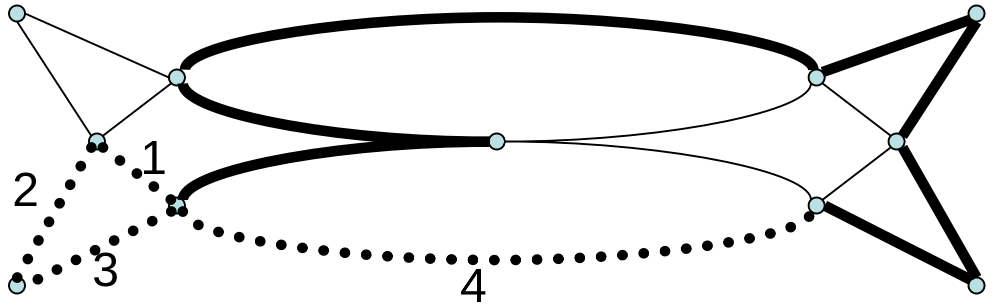


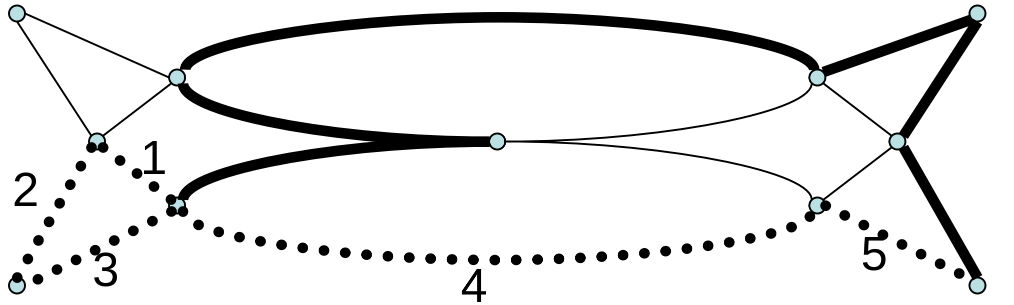


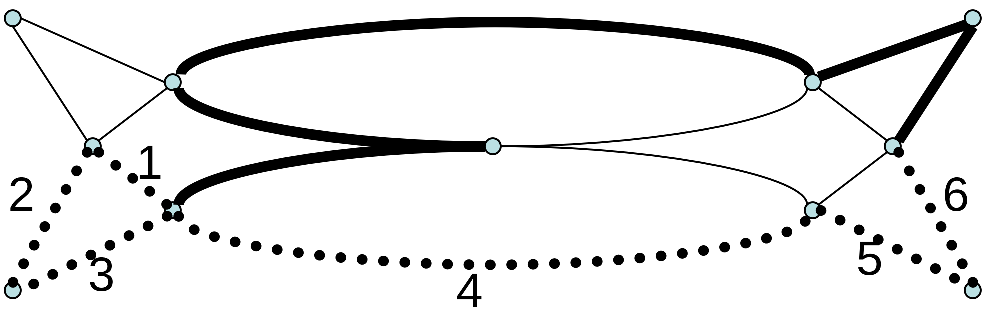

1

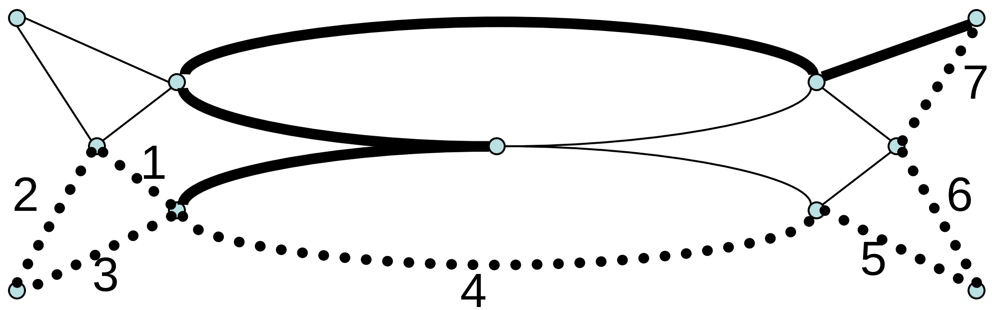

1
2

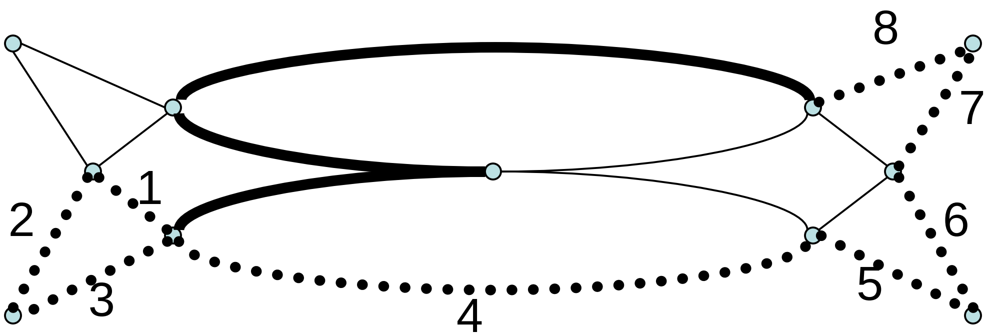

1
2
3

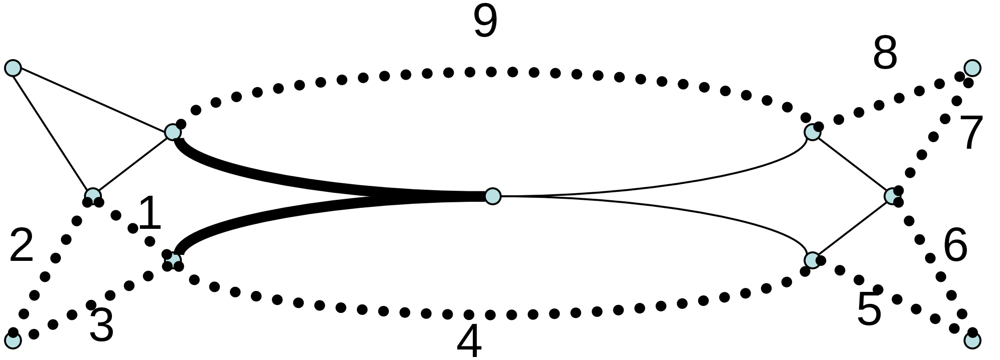

1
2
3
4

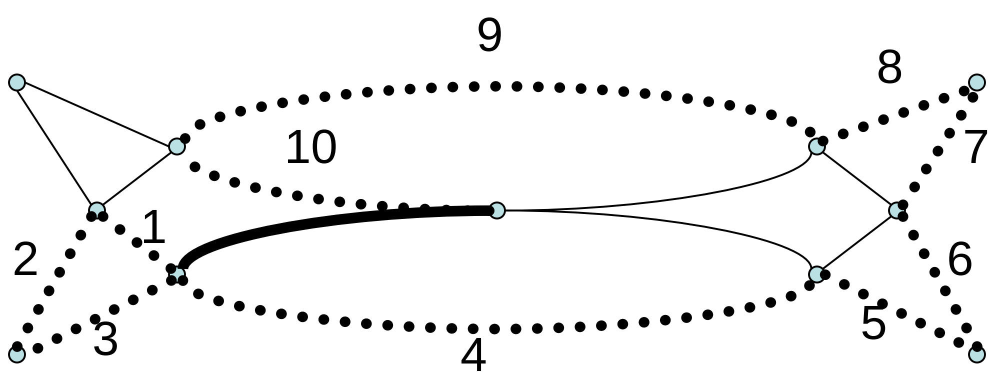

1
2
3
4
5


1
2
3
4
5
6

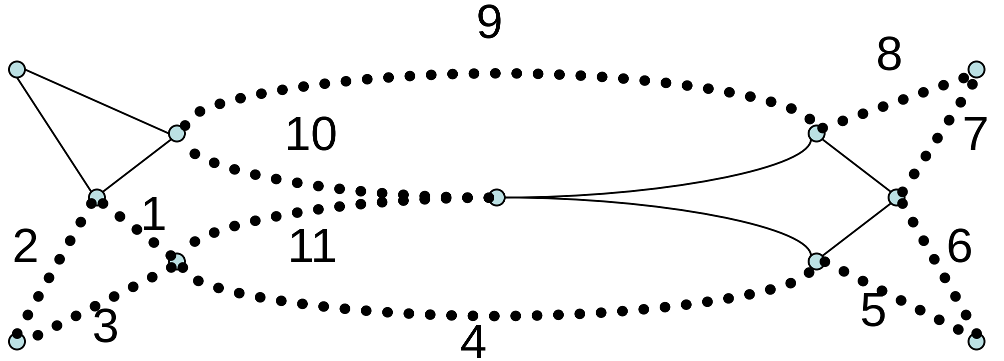

1
2
3
4
5
6
7

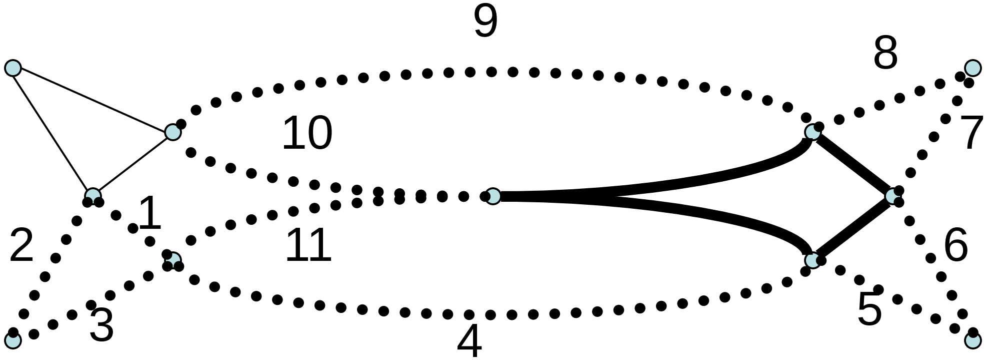

8
7
1
2
6
5
3
4


9
8
7
1
2
6
5
3
4

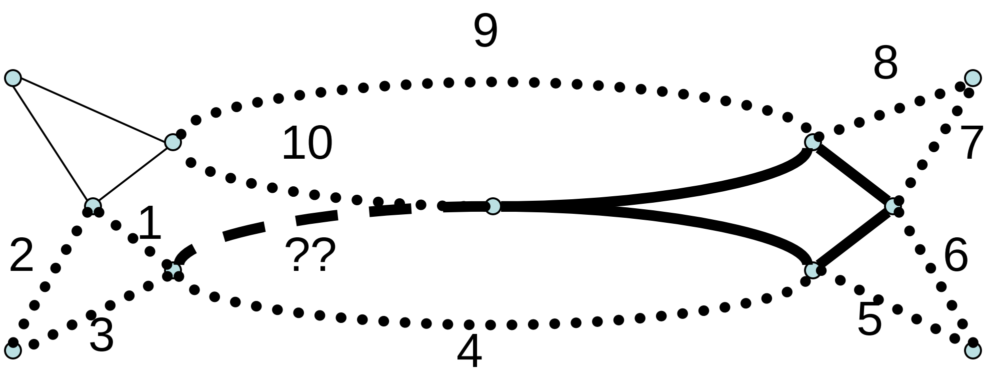


9
8
10
7
1
2
6
3
5
4

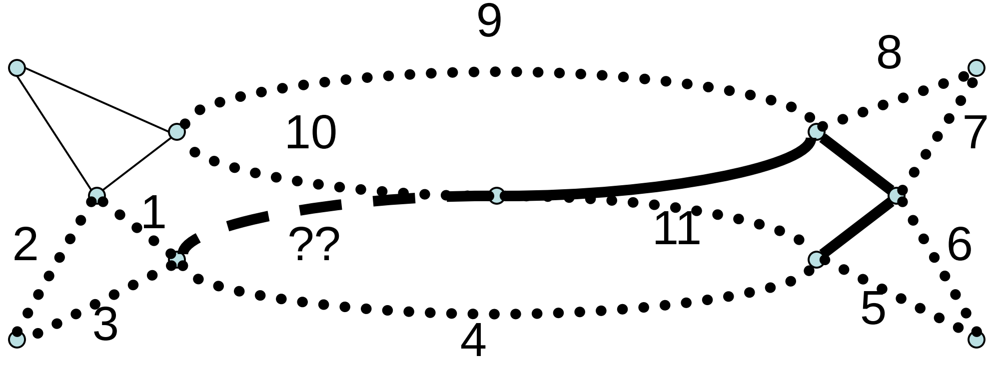

9
8
10
7
1
2
11
6
5
3
4

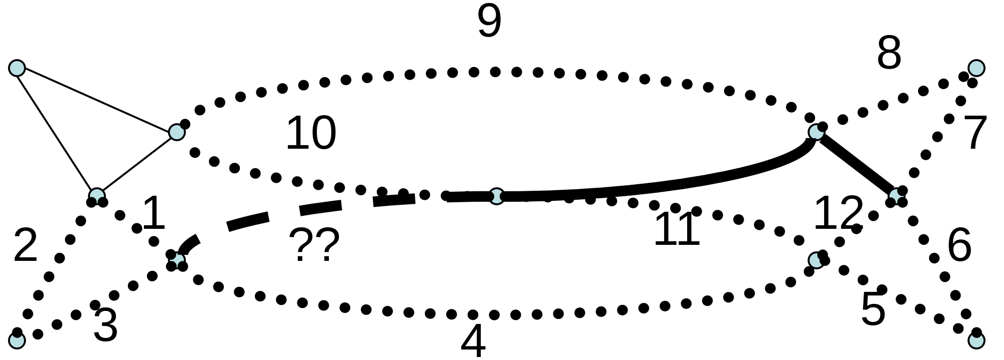


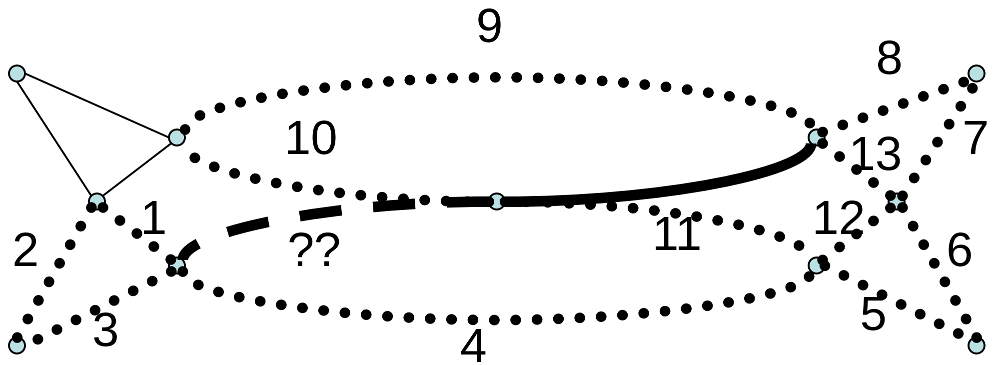
9
8
10
7
1
2
11
6
5
3
4

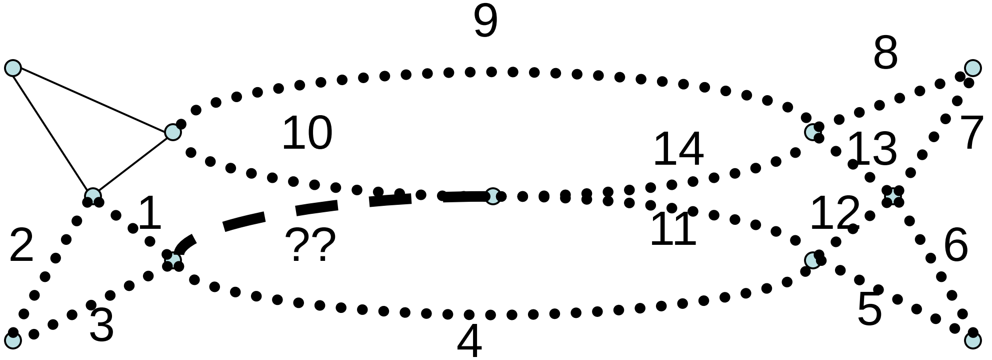


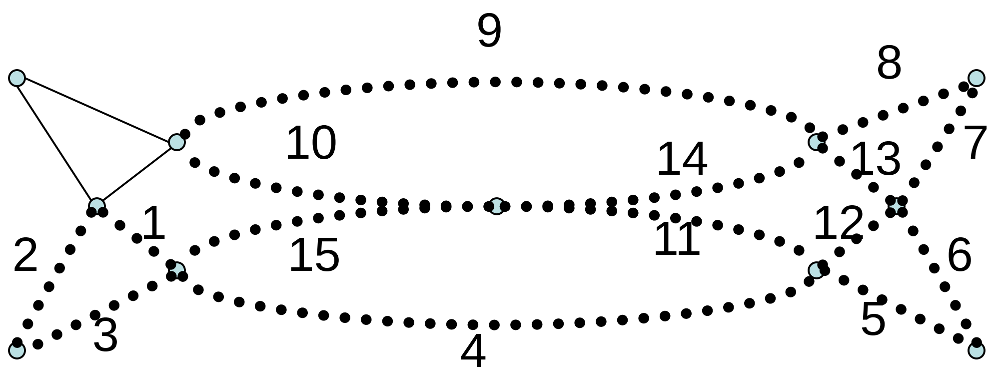
9
8
10
7
1
2
??
6
3
5
4


9
8
10
7
1
2
??
11
6
3
5
4

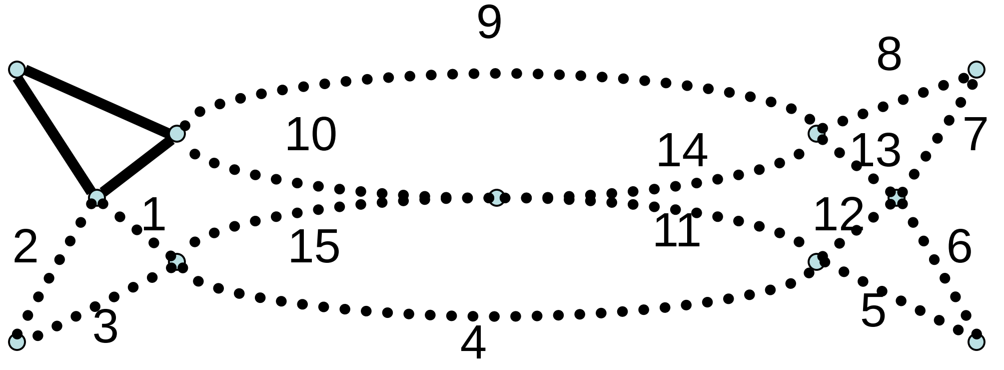

9
8
10
7
1
12
2
??
11
6
3
5
4

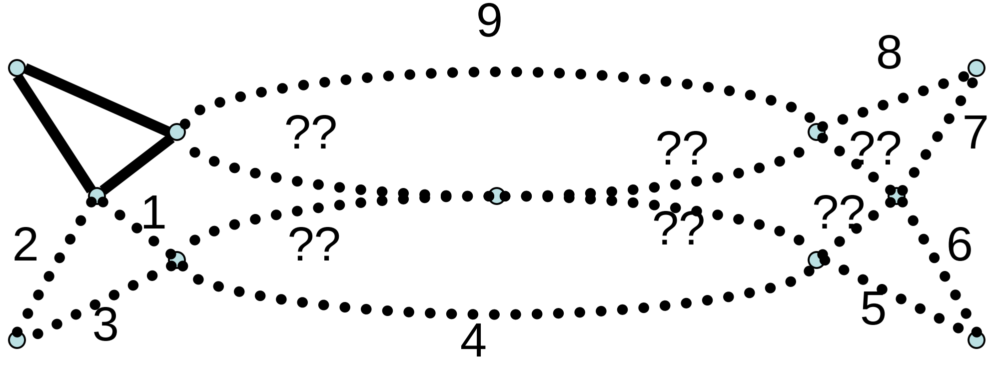

9
8
10
7
13
1
12
2
??
11
6
3
5
4


9
8
10
14
13
7
1
12
2
??
11
6
3
5
4



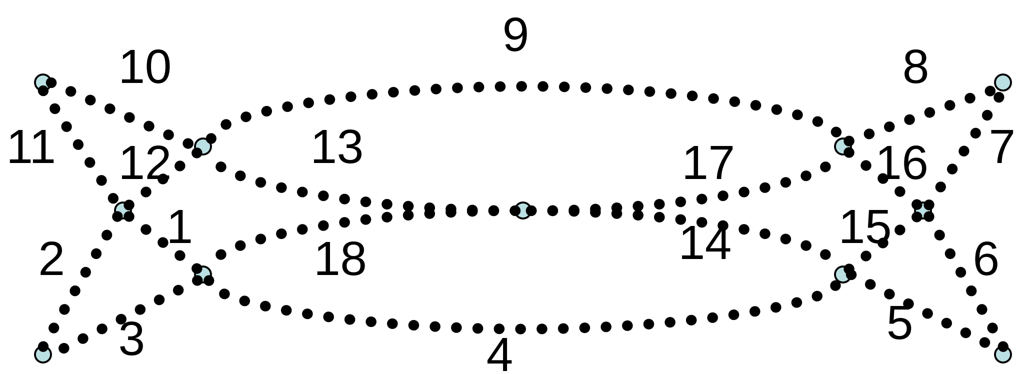
9
8
10
14
13
7
1
12
2
15
11
6
3
5
4


9
8
10
14
13
7
1
12
2
15
11
6
5
3
4

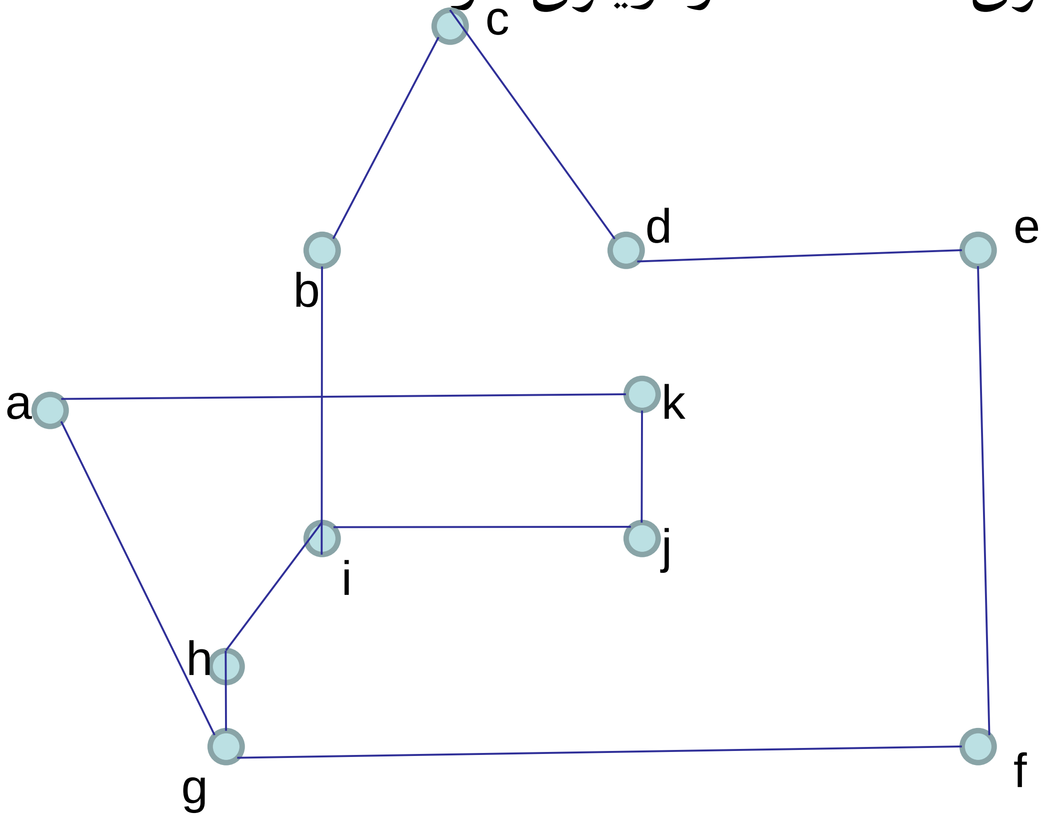


9
8
7
??
??
??
??
??
??
1
2
3
4
5
6

مدار اویلری مورد نظر را پیدا کردیم:



- این گراف فاقد مدار اویلری است اما گذر اویلری دارد.

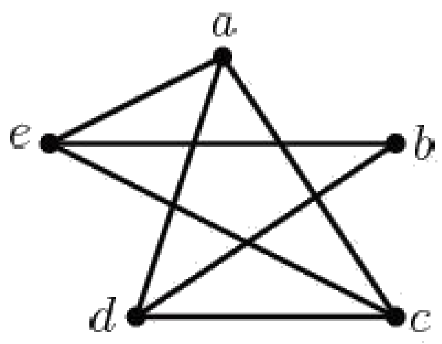


ijkagfedcbihg

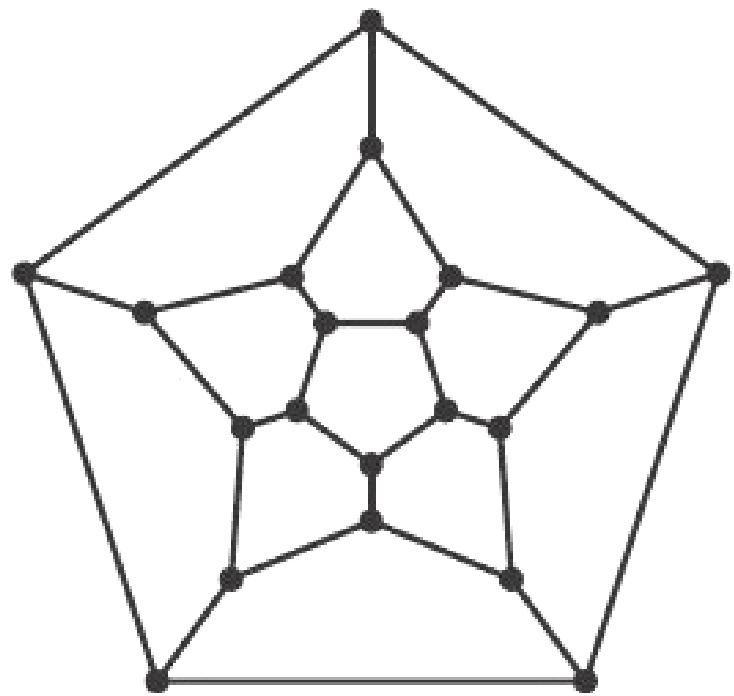
گراف هامیلتونی

- مسیری که از تمام رئوس گراف عبور کند مسیر هامیلتونی نامیده می شود.
- دوری که از تمام رئوس گراف عبور کند دور هامیلتونی نامیده می شود.
- اگر گراف G دارای دور هامیلتونی باشد، آنگاه دارای مسیر هامیلتونی است.
- گراف K_n برای n>2 همیلتونی است

گرافِ شکلِ زیر یک گرافِ همیلتنی است، زیرا a, d, b, e, c, a یک دورِ همیلتنی در این گراف است.

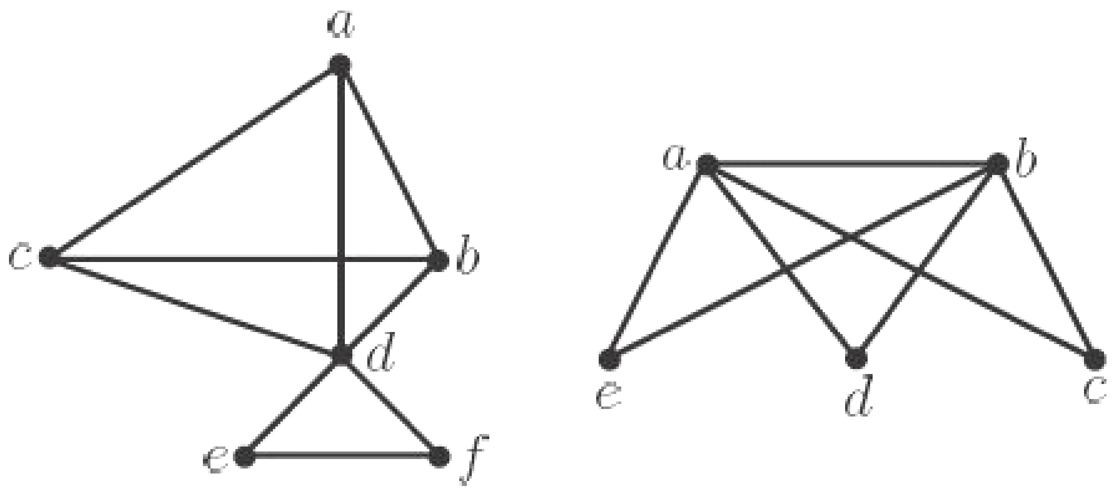


گرافِ زیر به گرافِ دوازده‌وجهی معروف است. با یافتنِ یک دورِ همیلتنی در این گراف، نشان دهید که گرافِ دوازده‌وجهی یک گرافِ همیلتنی است.



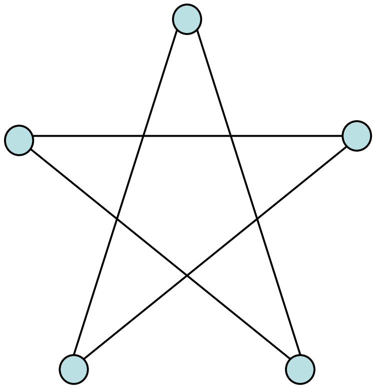
اگر در یک گرافِ هم‌بند، با حذفِ k رأس و یال‌های متّصل به آن، تعدادِ موءلّفه‌های هم‌بندیِ گرافِ باقی‌مانده از k بیش‌تر باشد، آن‌گاه گرافِ موردِ نظر همیلتنی نیست.

نشان دهید که هیچ‌یک از گراف‌های زیر همیلتنی نیستند.

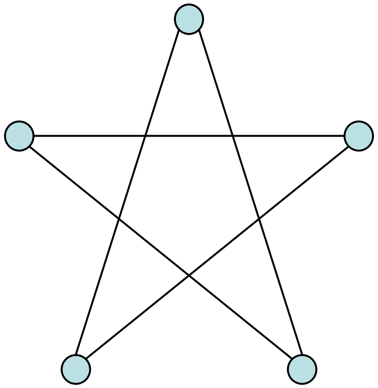


گراف مسطح

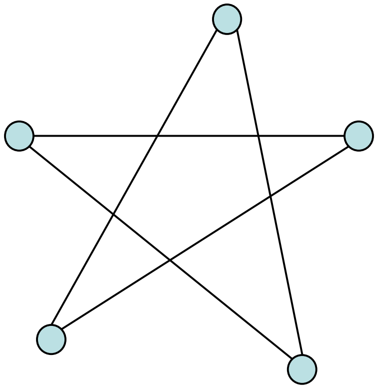
- گرافی است که یال های آن فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند.



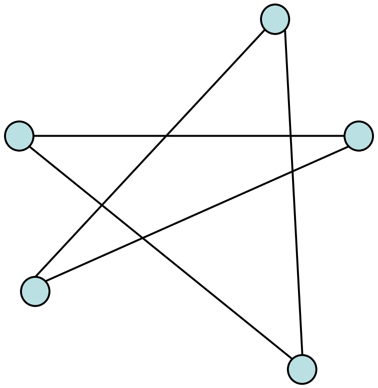
گراف مسطح



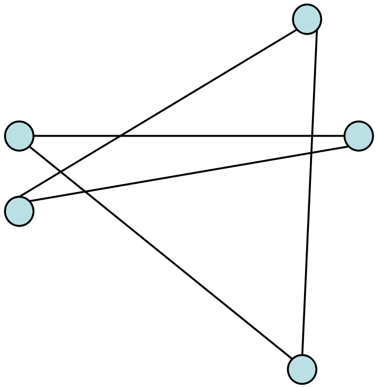
گراف مسطح



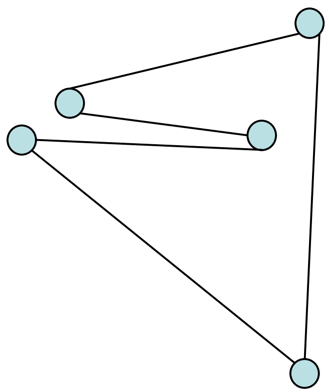
گراف مسطح



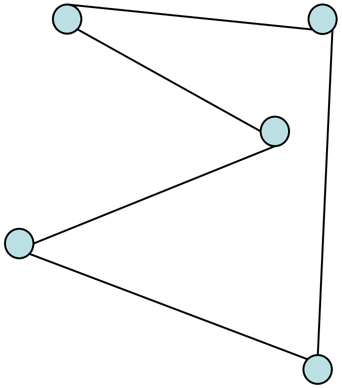
گراف مسطح



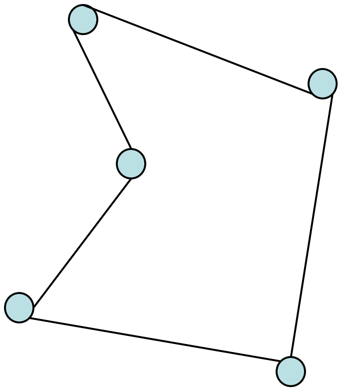
گراف مسطح



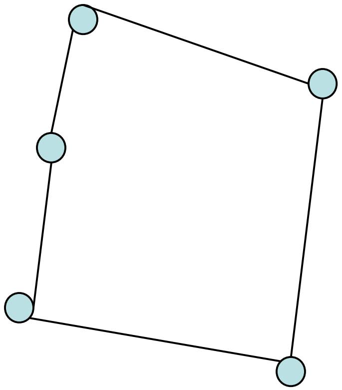
گراف مسطح



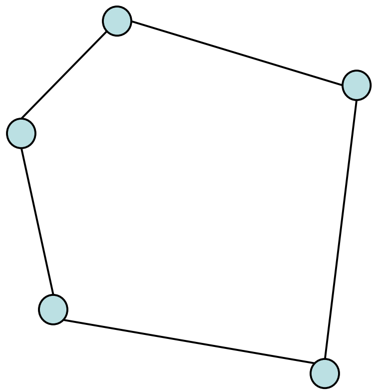
گراف مسطح



گراف مسطح



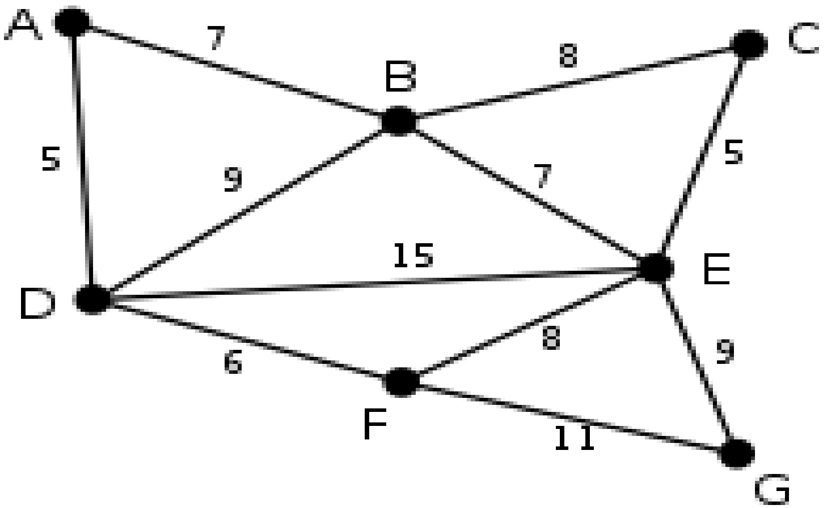
گراف مسطح



گراف وزن دار

گراف وزن دار، گرافی است که به هر یال آن یک عدد حقیقی نسبت می دهیم. به این عدد **وزن یال** گفته می شود.

مجموع وزن های همه یال ها **وزن کل گراف** نامیده می شود.



حداقل هزینه بین گره‌های گراف (الگوریتم دایکسترا)

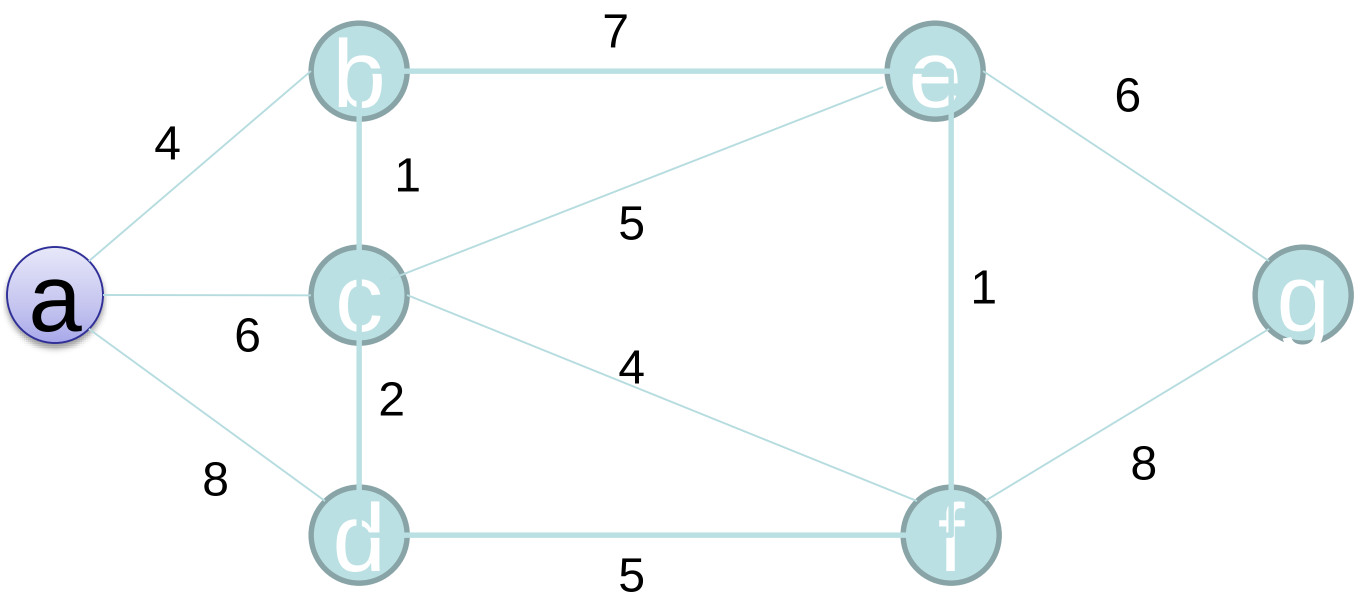
برای محاسبه حداقل هزینه‌ها از یک گره به گره‌های دیگر در گراف وزن‌دار ، از الگوریتم دایکسترا استفاده می‌کنیم. بدین منظور باید ابتا ماتریس هزینه‌های گراف را تشکیل دهیم و سپس با شروع از گره مفروض ، هزینه آن گره تا سایر گره‌ها را بدست آوریم. برای بدست آوردن هزینه حداقل بین دو گره دو انتخاب کلی وجود دارد :

۱- مسیر مستقیم بین دو گره W_{ij}

۲- استفاده از یک گره میانی $W_{ik} + W_{kj}$

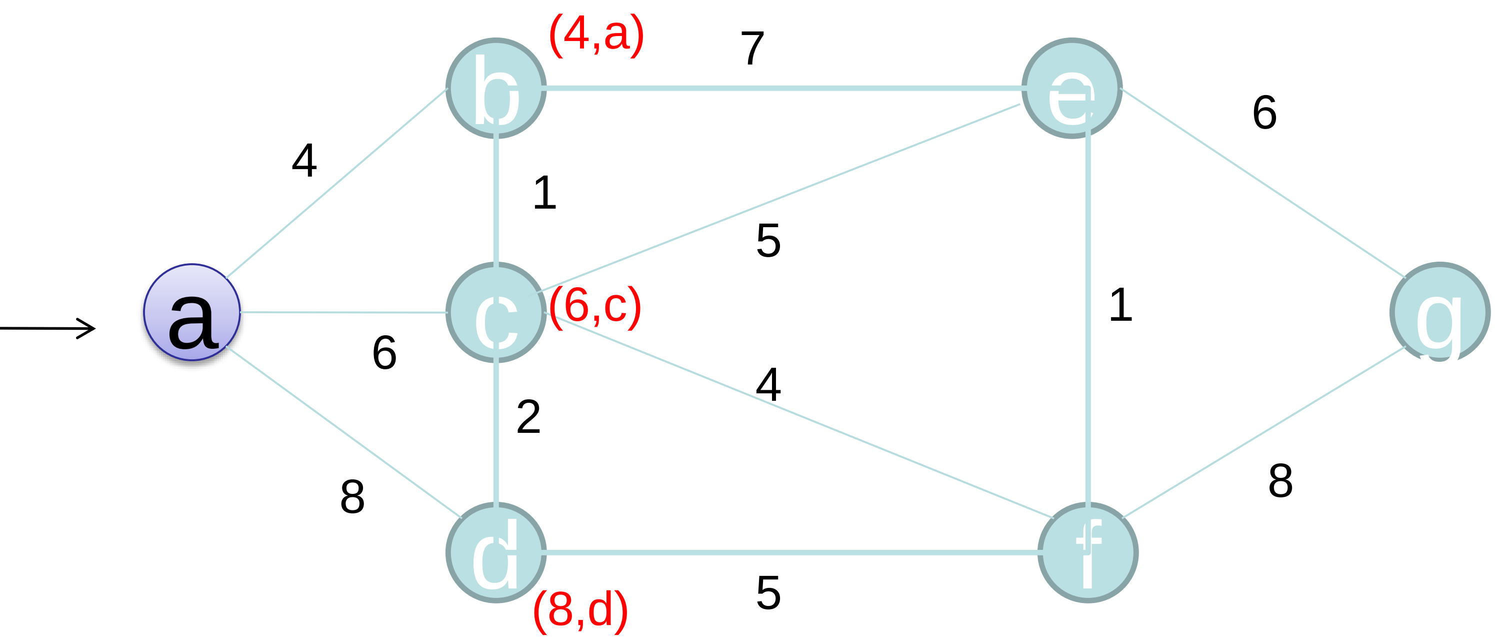
آنقدر این روال را ادامه می‌دهیم تا تمام گره‌های گراف ملاقات شوند.

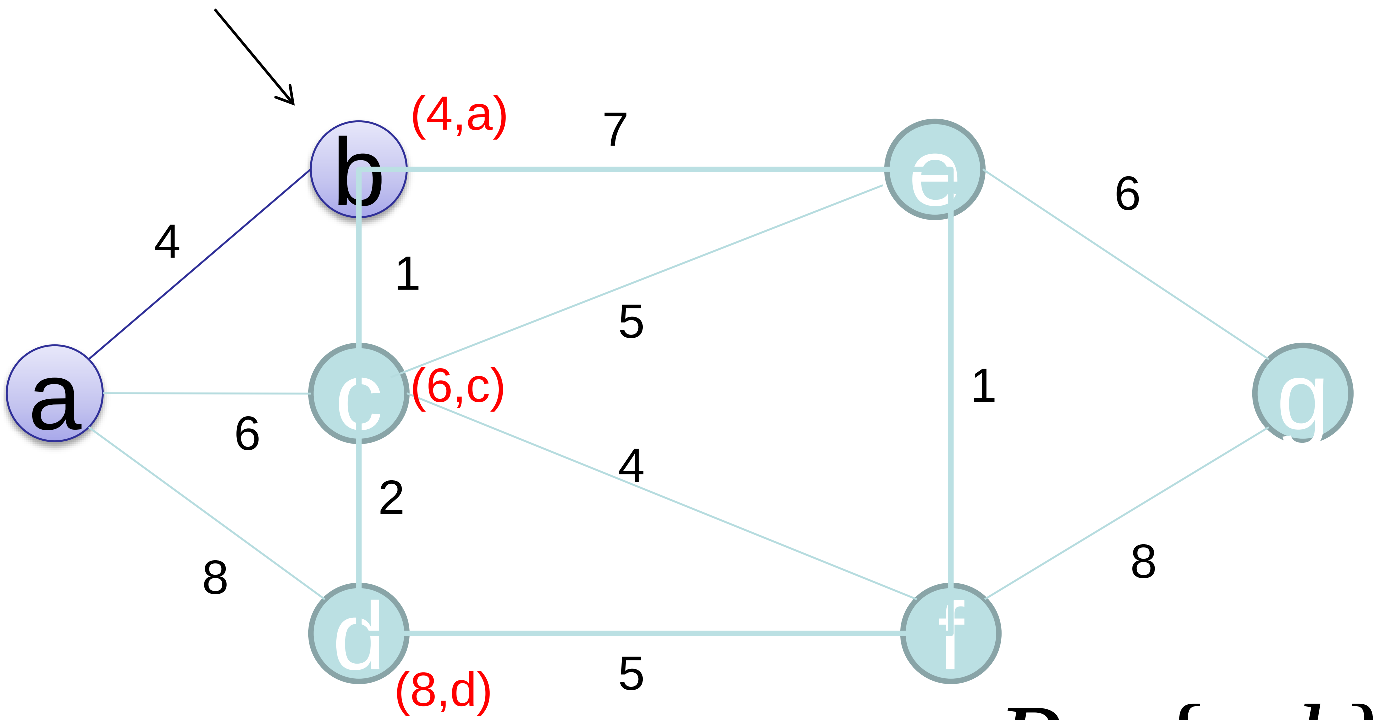
مثال ۴–۴۷
صفحه ۲۳۳



$$P = \{a\}$$

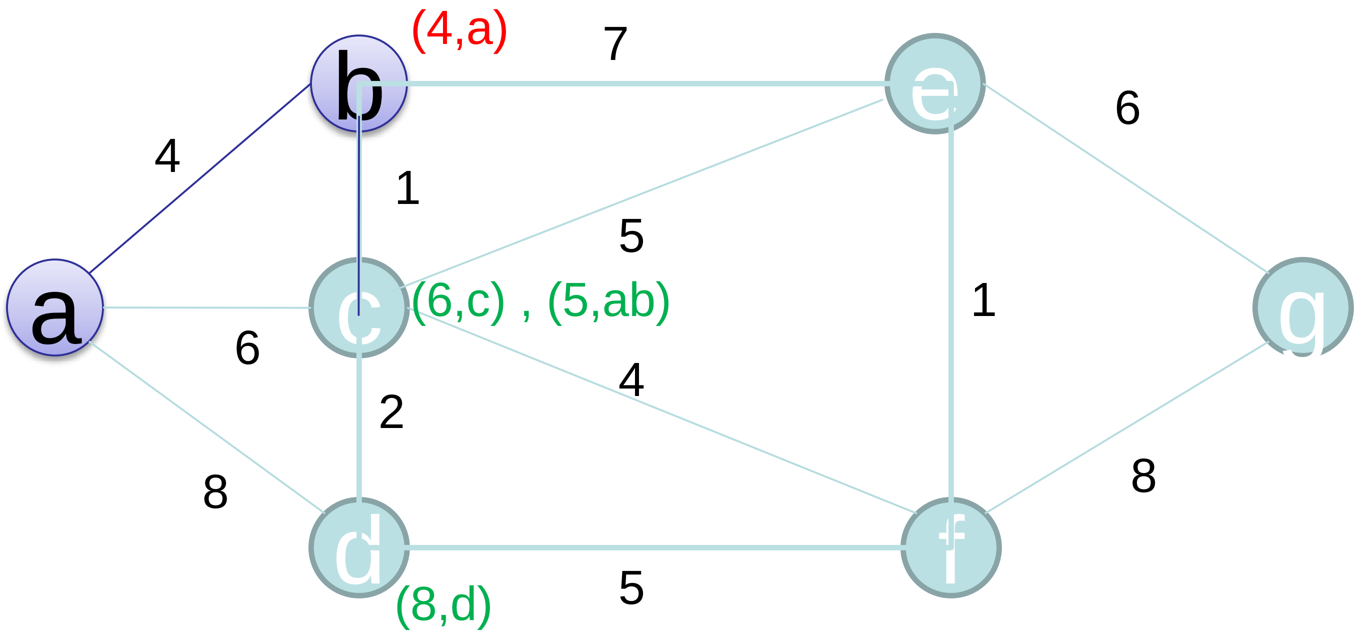
$$T = \{b, c, d, e, f, g\}$$


(4,a)
7
b
e
6
4
1
5
a
c
(6,c)
1
g
6
4
2
8
8
d
f
5
(8,d)

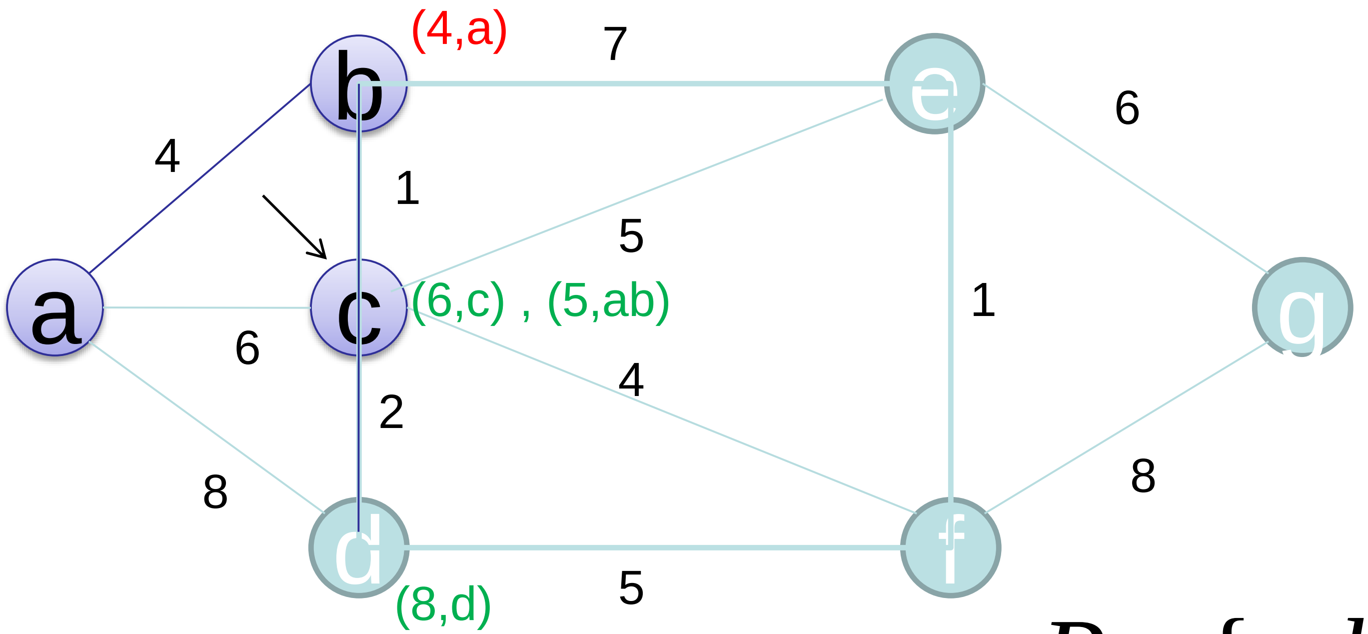


$$P = \{a, b\}$$

$$T = \{c, d, e, f, g\}$$

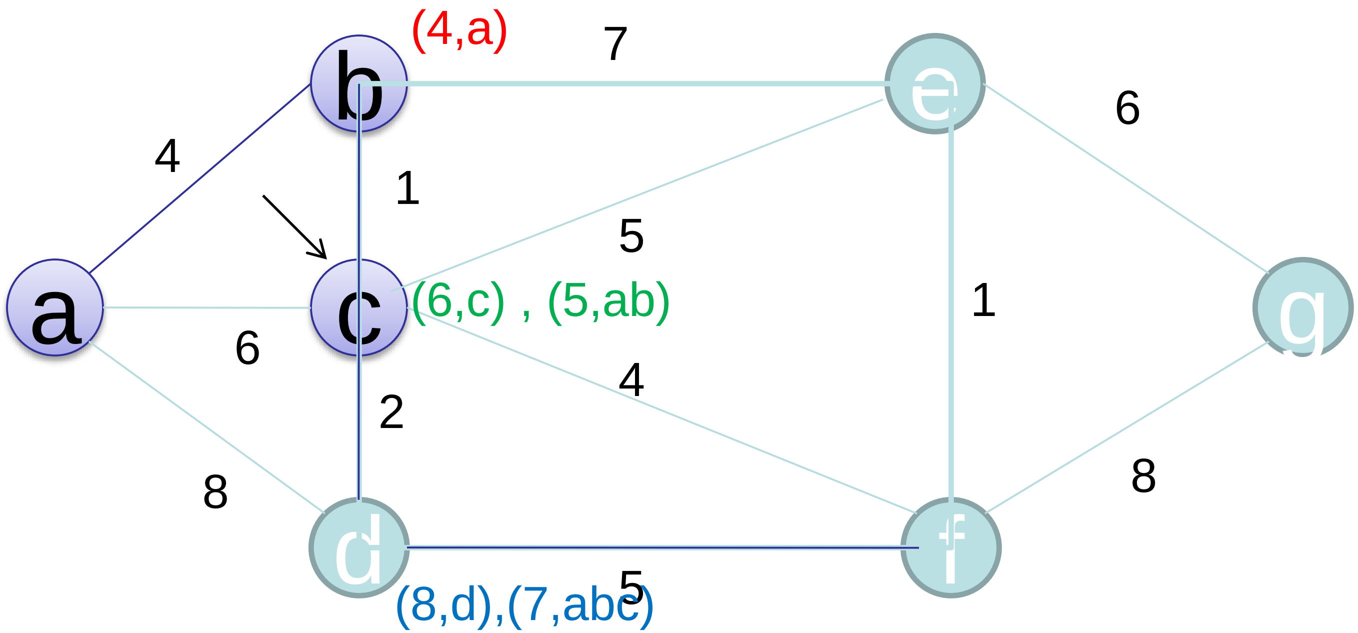


(4,a)
7
b
e
6
4
1
5
a
c
(6,c) , (5,ab)
1
g
6
4
2
8
8
d
f
(8,d)
5

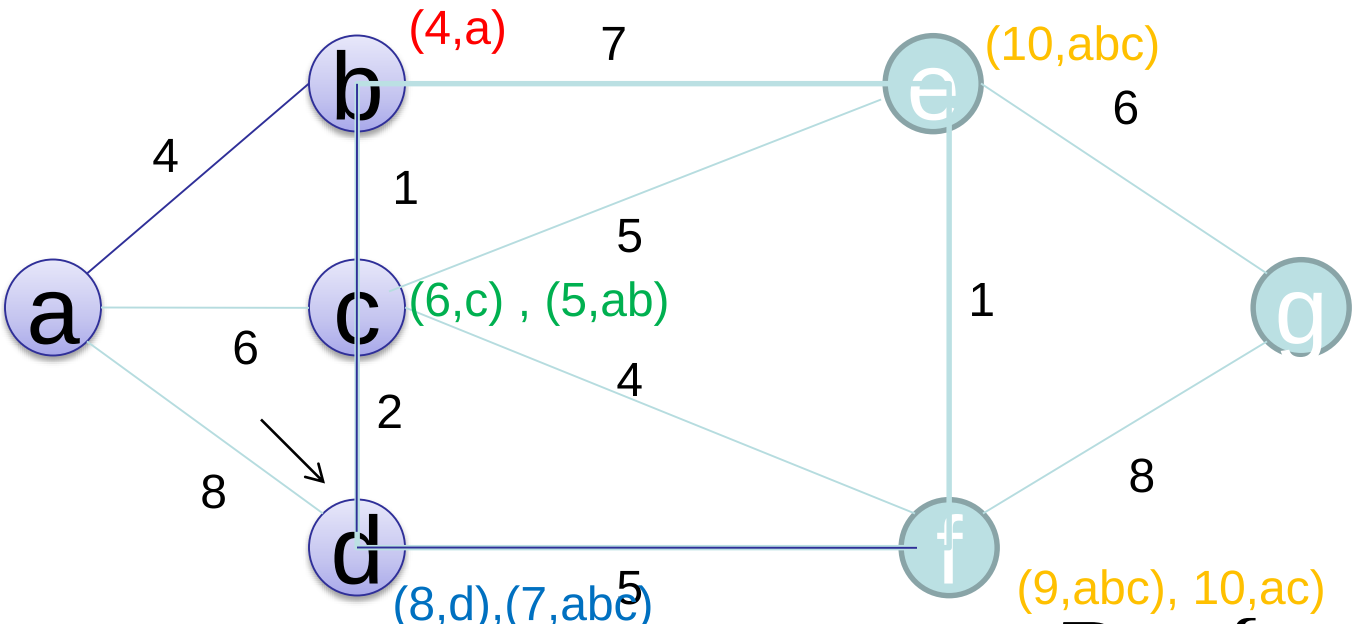


$$P = \{a, b, c\}$$

$$T = \{d, e, f, g\}$$

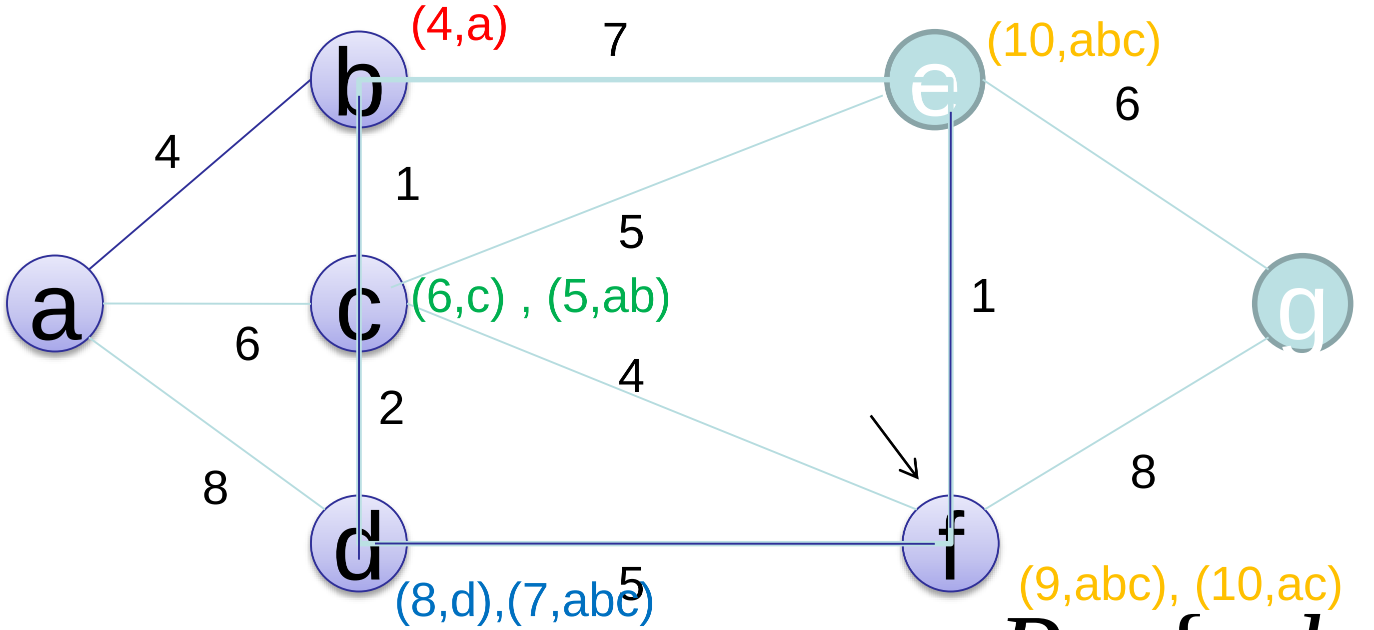


(4,a)
7
b
e
6
4
1
5
a
c
(6,c) , (5,ab)
1
g
6
4
2
8
8
d
f
5
(8,d),(7,abc)



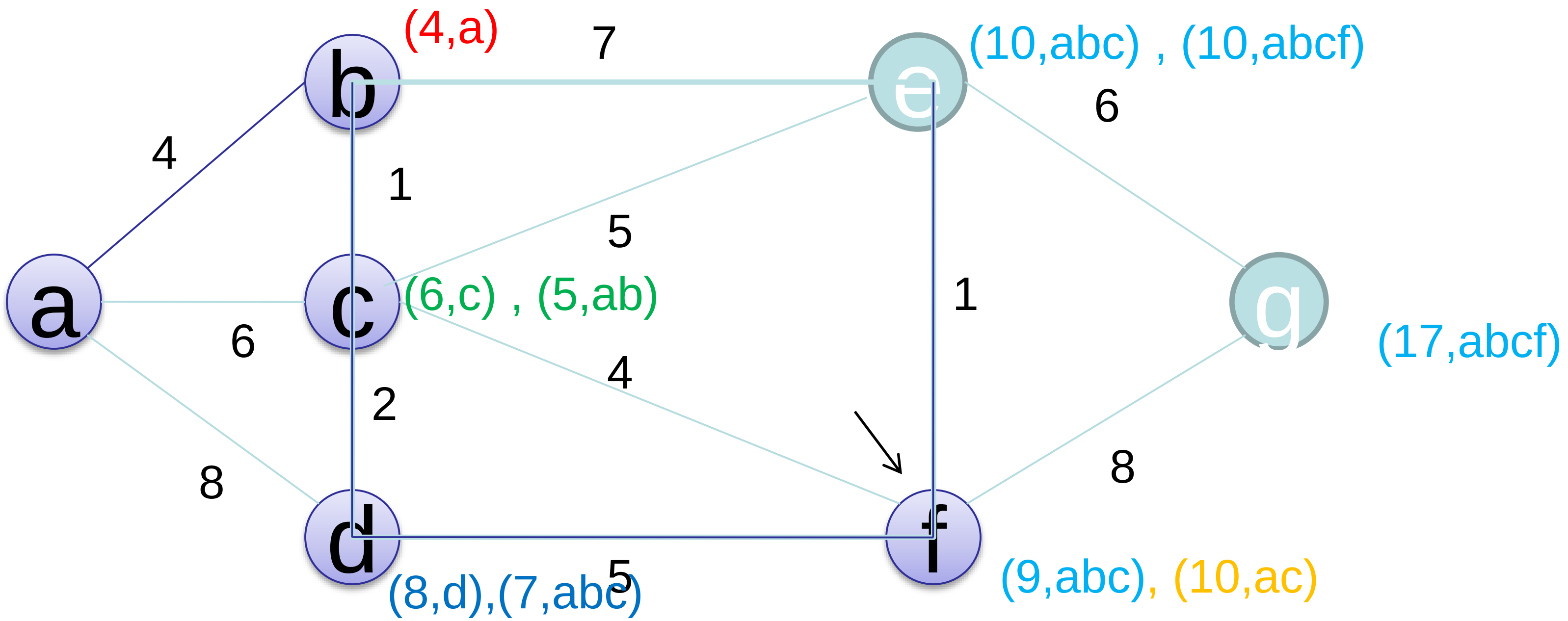
$$P = \{a, b, c, d\}$$

$$T = \{e, f, g\}$$

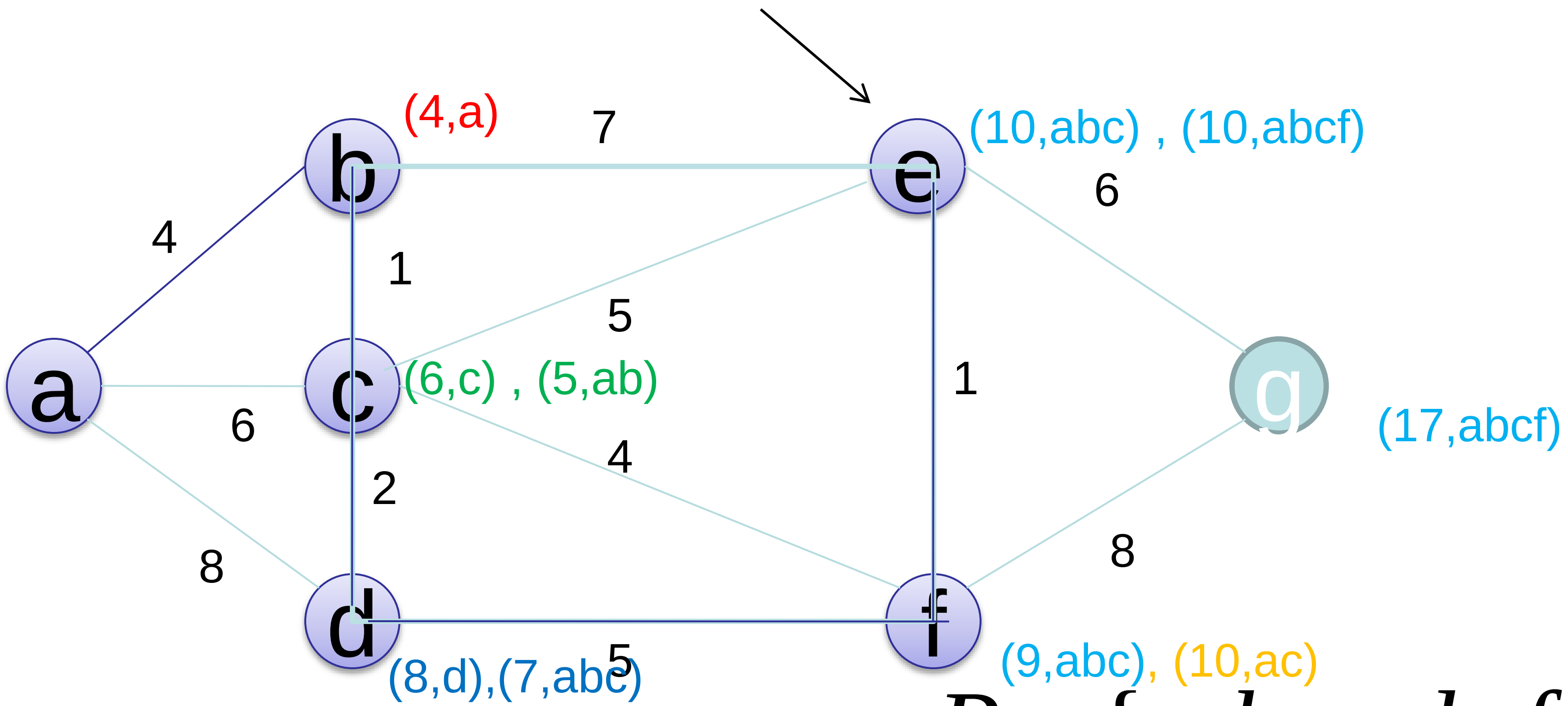


$$P = \{a, b, c, d, f\}$$

$$T = \{e, g\}$$



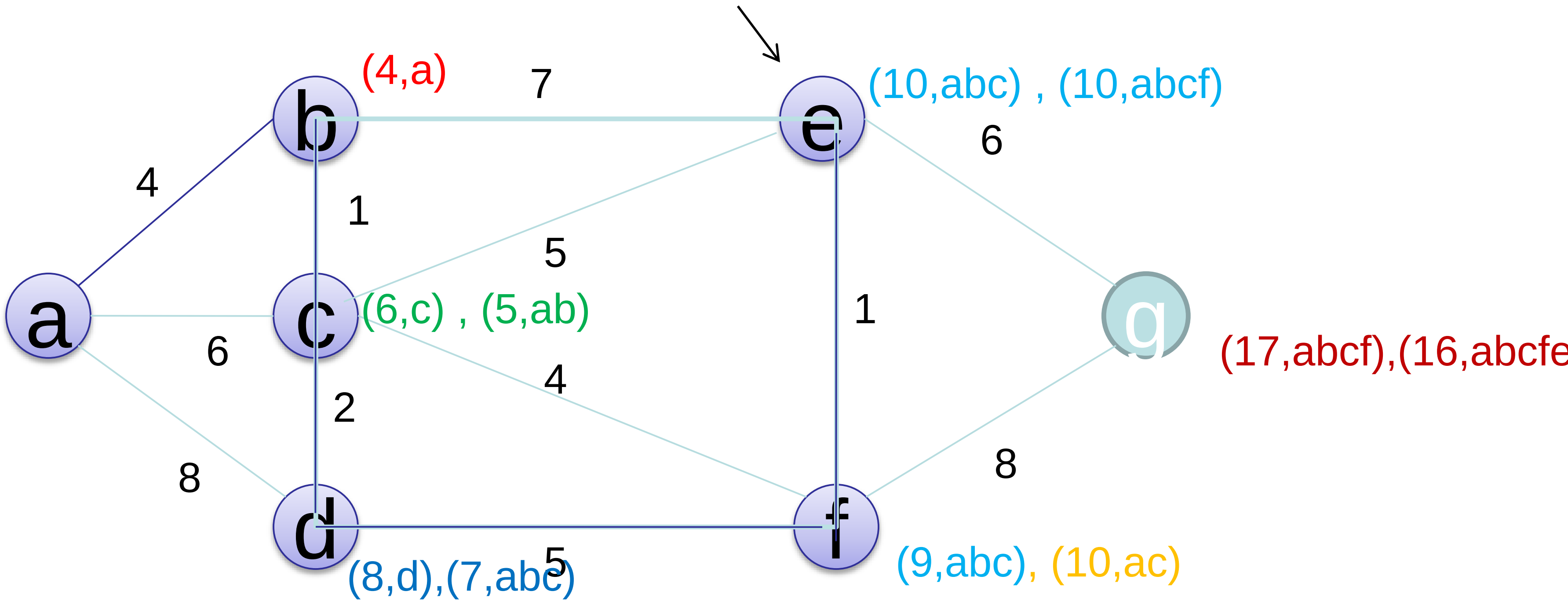
(4,a)
7
(10,abc) , (10,abcf)
b
e
6
4
1
5
a
c
(6,c) , (5,ab)
1
g
6
(17,abcf)
4
2
8
8
d
f
5
(8,d),(7,abc)
(9,abc), (10,ac)



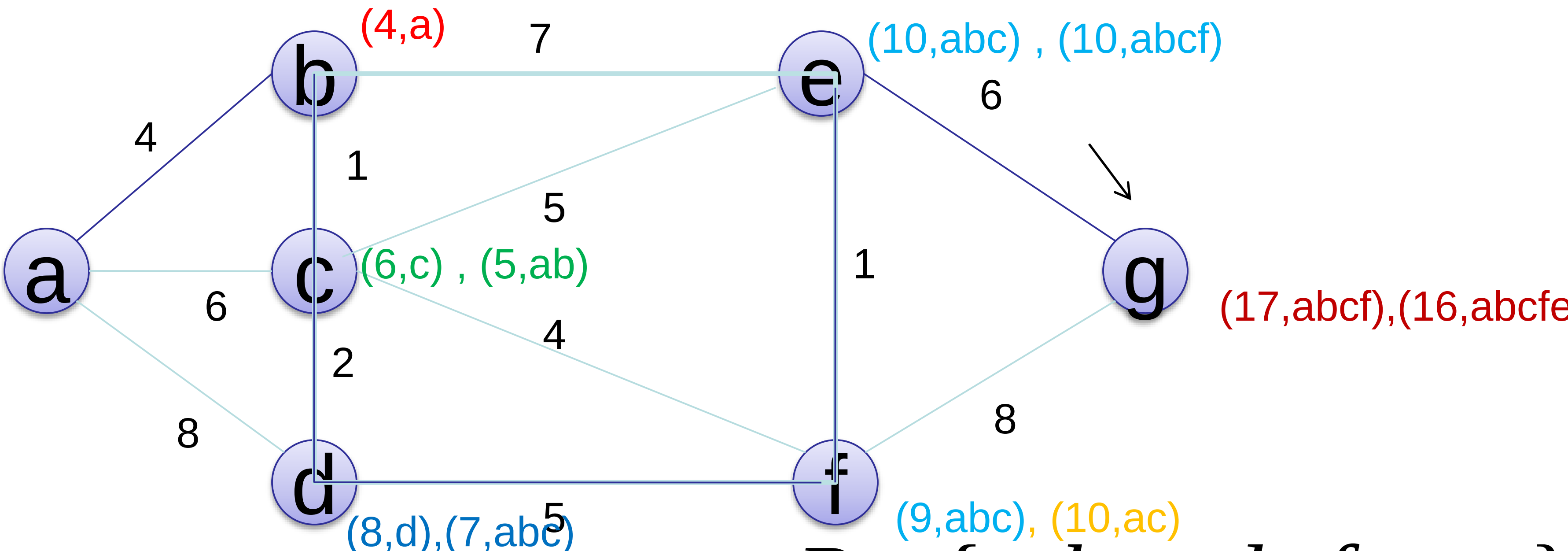
(4,a)
7
(10,abc) , (10,abcf)
6
4
1
5
(6,c) , (5,ab)
1
a
b
c
d
e
f
g
6
4
(17,abcf)
2
8
8
5
(8,d),(7,abc)
(9,abc), (10,ac)

$$P = \{a, b, c, d, f, e\}$$

$$T = \{g\}$$



(4,a)
7
(10,abc) , (10,abcf)
b
e
6
4
1
5
a
c
(6,c) , (5,ab)
1
g
6
(17,abcf),(16,abcfe
4
2
8
8
d
f
5
(8,d),(7,abc)
(9,abc), (10,ac)


(4,a)
7
b
e
(10,abc) , (10,abcf)
4
1
6
5
a
c
(6,c) , (5,ab)
1
g
(17,abcf),(16,abcfe
6
2
4
8
8
d
f
(8,d),(7,abc)
5
(9,abc), (10,ac)

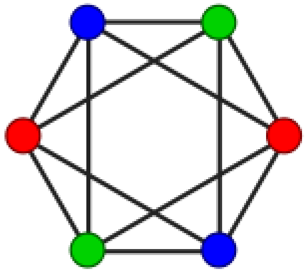
$$P = \{a, b, c, d, f, e, g\}$$

$$T = \{\}$$

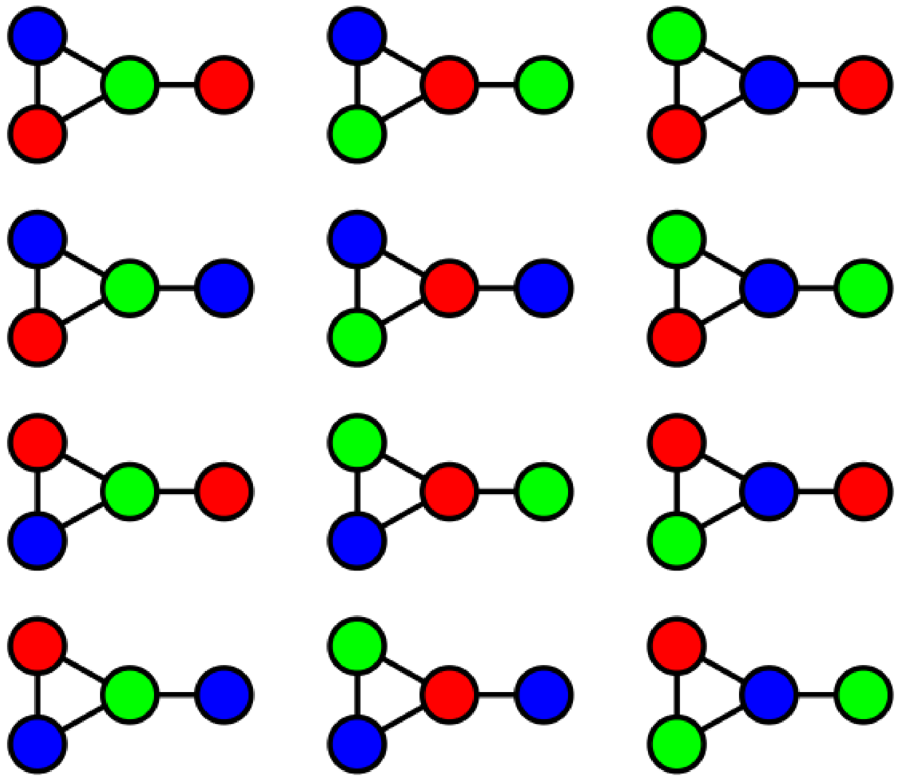
رنگ آمیزی راسی گراف

- منظور از رنگ آمیزی راسی گراف نسبت دادن رنگ به رئوس گراف است به طوری که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشد.
- حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ آمیزی گراف، عدد رنگی راسی گراف نامند و با $\chi(G)$ نمایش می دهند.

❑ یک رنگ امیزی گراف پترسن به کمک ۳ رنگ (کمترین تعداد رنگ ممکن).



این گراف به ۱۲ روش می‌تواند رنگامیزی ۳ رنگه شود.

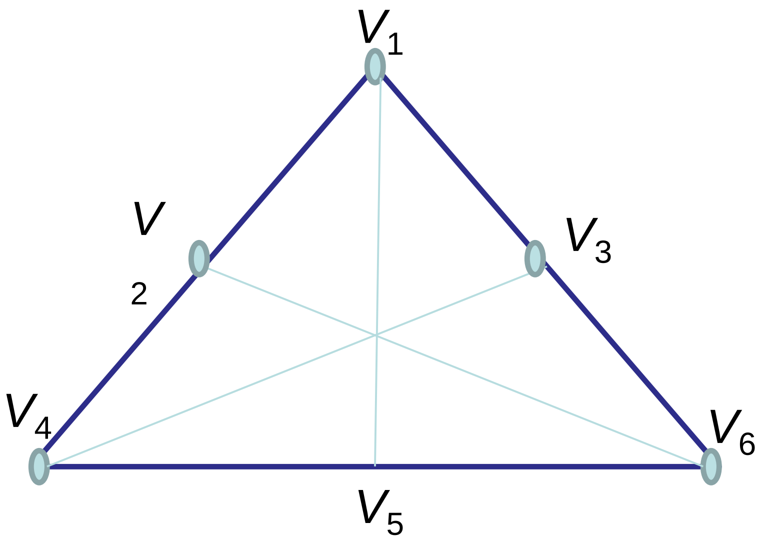


یافتن عدد رنگی $\chi(G)$ یک گراف

1. درجه های رئوس گراف به صورت نزولی مرتب می شود.
2. رنگ ۱ به اولین راس و رئوسی که مجاور نیست نسبت داده می شود.
   در نظر داشته باشید اگر رئوس غیر مجاور، خود مجاور یکدیگر باشند
   یکی از آنها انتخاب می شود.
3. تا زمانی که همه رئوس رنگ شوند مرحله ۲ با راس رنگ نشده بعدی
   تکرار می شود

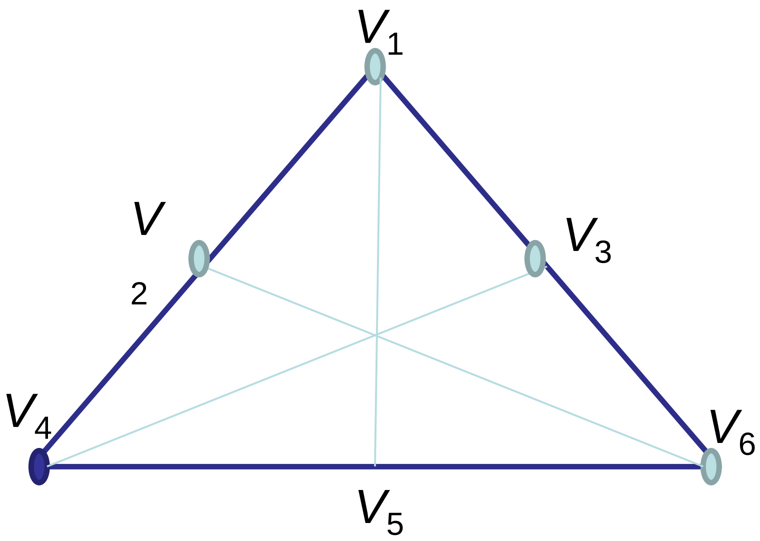
مثال

- عدد رنگی گراف زیر را بیابید.



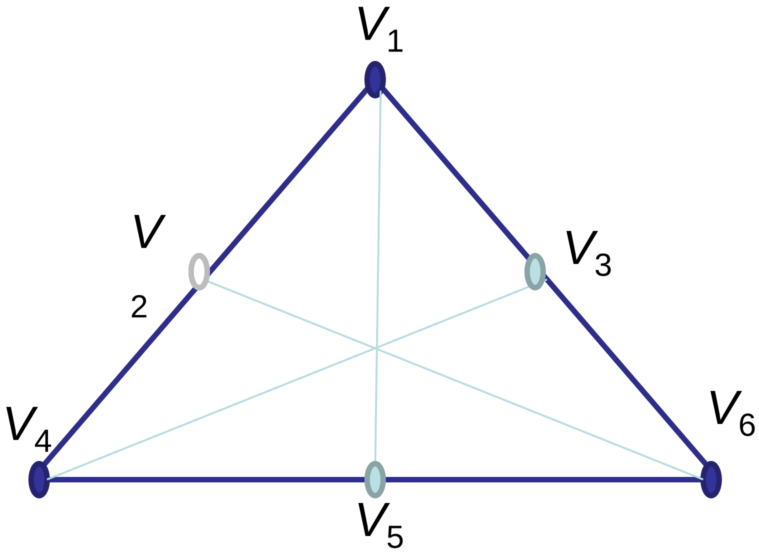
مثال

- عدد رنگی گراف زیر را بیابید.



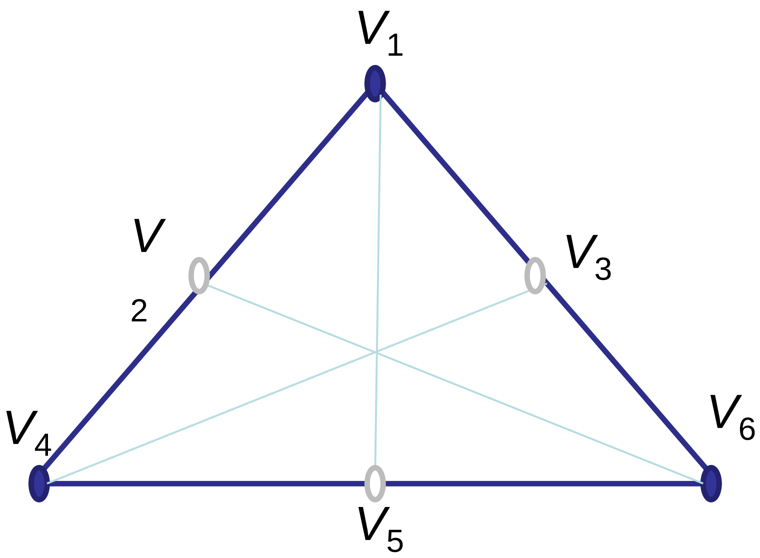
مثال

- عدد رنگی گراف زیر را بیابید.



مثال

- عدد رنگی گراف زیر را بیابید.



راس	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
درجه	۳	۳	۳	۳	۳	۳
رنگ	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6

عدد رنگی ۲ است.

چند نکته

❖گراف ساده $G=(V,E)$ دوبخشی است اگر و فقط اگر بتوان به هر راس گراف، یکی از دو رنگ متفاوت را نسبت داد به طوری که هیچ دو راس مجاوری همرنگ نباشند.

به $\chi(G)$

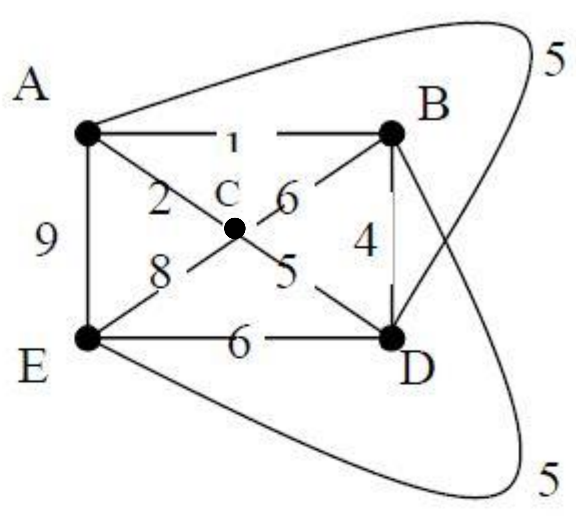
عبارتی دیگر G دوبخشی است اگر و تنها اگر ۲= .

❖عدد رنگی گراف های کامل K_n برابر است با n

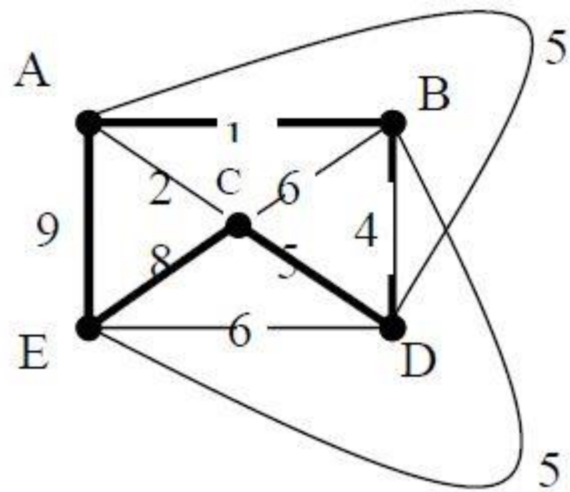
❖عدد رنگی گراف های مسطح نمی تواند بیشتر از چهار باشد.

قاعده نزدیکترین همسایه

- برای به دست آوردن دور همیلتونی نیمه بهینه Hدر یک گراف از روش قاعده نزدیکترین همسایه استفاده می کنیم.
- با استفاده از قاعده نزدیکترین همسایه، دور همیلتونی نیمه بهینه را برای گراف شکل زیر بیابید.



پاسخ



پایان فصل چهارم

خدایا چنان کن سرانجام کار
تو خشنود باشی و ما رستگار

پایان

بسم الله الرحمن الرحیم

مروری بر نظریه گراف

براساس کتاب ساختمان های گسسته پیام نور (ویرایش جدید)

فصل چهارم(گراف) و فصل پنجم(درخت)

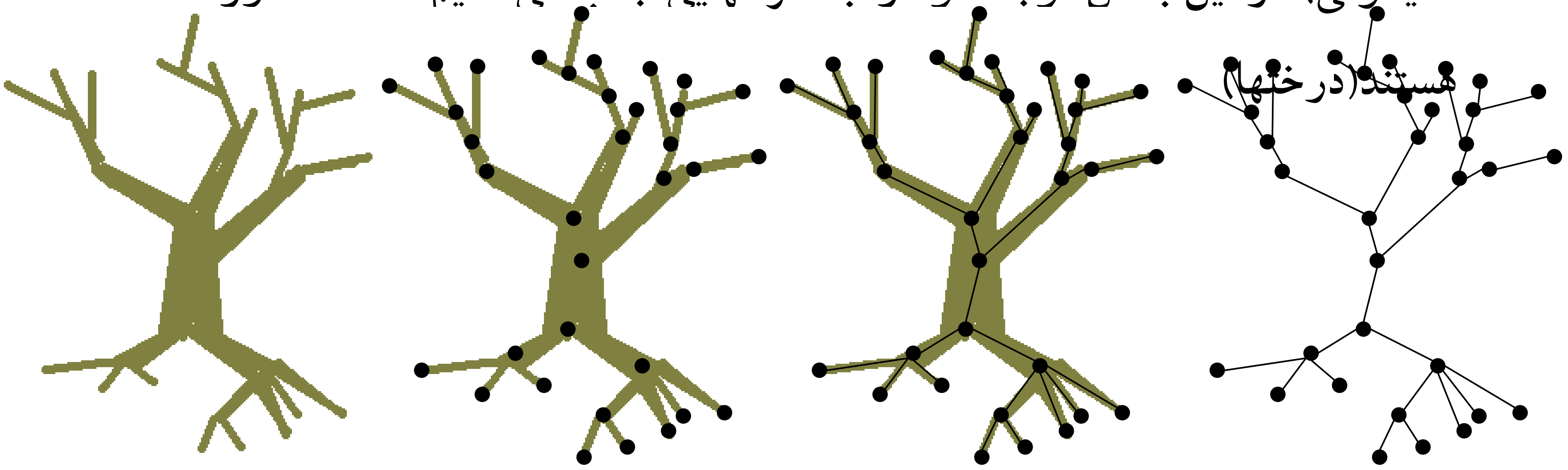
تهیه و تنظیم اسلایدها: جعفر اوج بگ

درخت ها و درخت های فراگیر مینیمال

- گراف های همبند و درختها
- درختهای فراگیر
- درختهای فراگیر مینیمال
- الگوریتم کراسکال
- تعداد رئوس و یالها

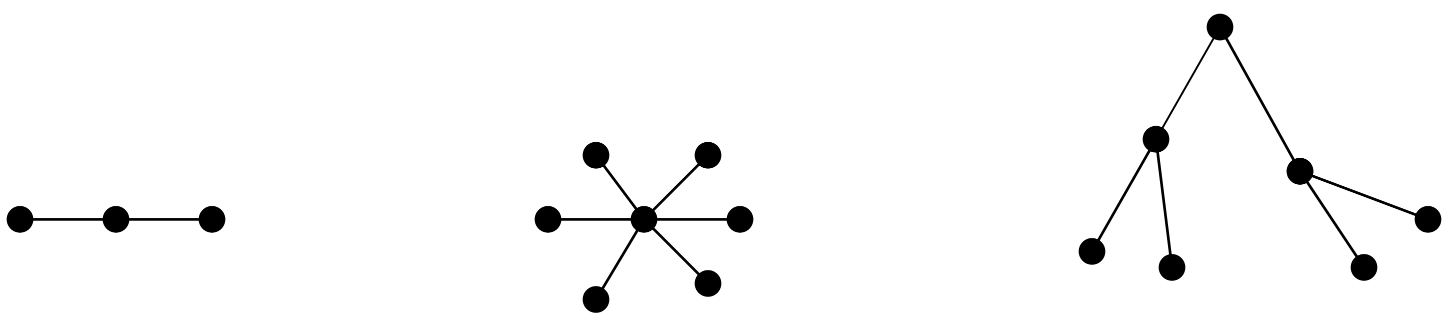
درخت ها

• در قسمت قبل گراف هایی دیدم که دارای دور بودند(گراف های اویلری و همیلتونی) در این بخش توجه خود را به گرافهایی جلب می کنیم که فاقد دور هستند(درختها)

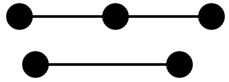


درخت

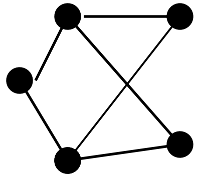
- درخت یک گراف همبند بدون دور است.
- اگر گرافی درخت باشد، در اینصورت تعداد یالهای آن یکی کمتر از تعداد رئوس آن است!
- در یک درخت همواره **دقیقاً** یک مسیر از هر راس به راس دیگر وجود دارد(خاصیت یکتایی مسیر در درختها)
- مثال:



مثالهایی که درخت نیستند



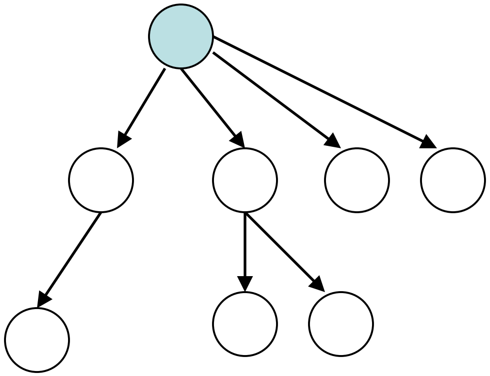
همبند نیست



دارای دور است

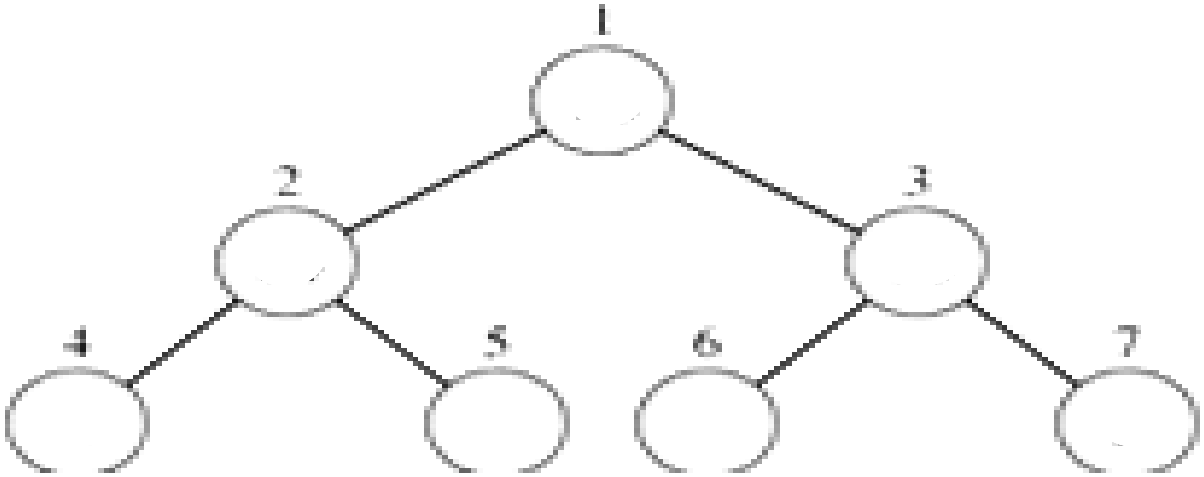
ریشه و فرزند

- معمولا، برای نمایش درخت، ریشه آن را در بالا و فرزندان آن را کمی پایین تر و در زیر آن رسم می کنند. رابطه پدر فرزندی را با پیکانی که نوک آن به سمت فرزند است، نمایش می دهند.



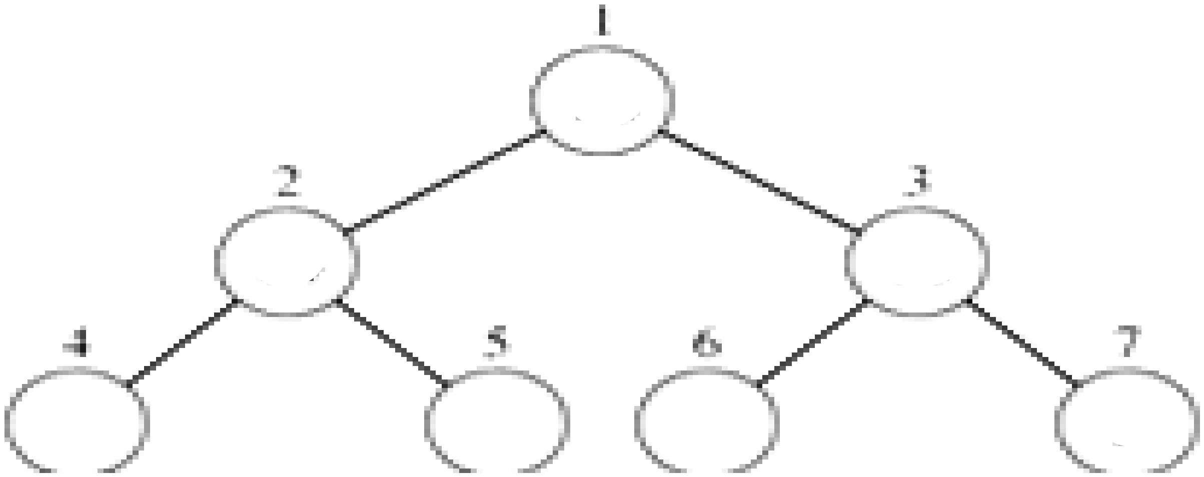
درخت دودویی

- درخت دودویی، درختی است که هر گره آن حداکثر دو فرزند دارد
  - این نوع درخت کاربردهای زیادی مانند مرتب سازی، جستجو، ارزیابی عبارات ریاضی و ... دارد
  - پیاده سازی آن نیز آسان است



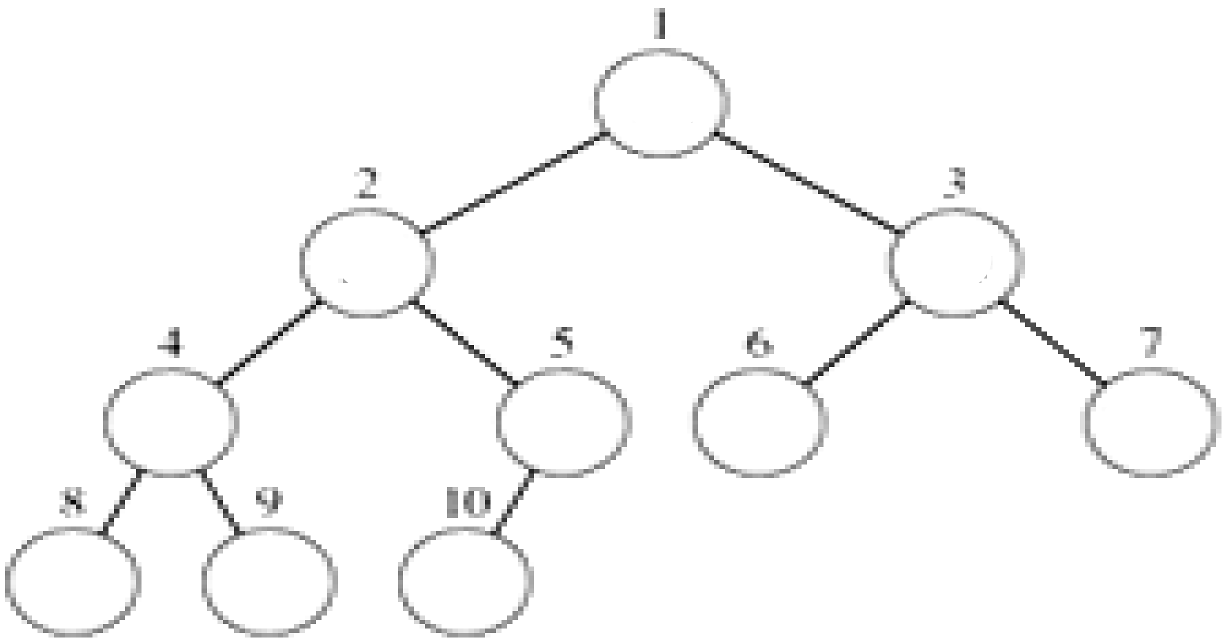
درخت دودویی کامل

- درخت دودوی کامل، درختی است که:
  - همه برگهای آن در یک سطح قرار دارند
  - هر گره غیر برگ دقیقا دو فرزند دارد



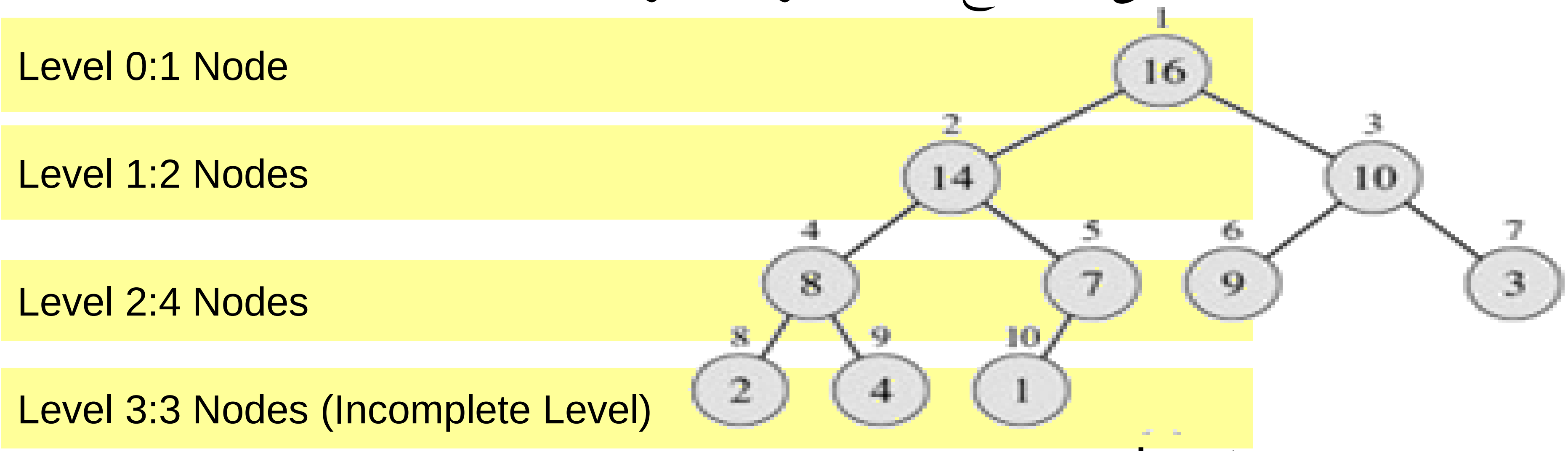
درخت دودویی تقریباً کامل

- درخت دودوی تقریبا کامل، درختی با عمق **h** است که تا سطح **h- 1** کامل باشد.



ویژگیهای درخت دودویی

- درخت دودویی در سطح k، حداکثر 2^k گره دارد.



- سطح گره k ام درخت برابر است با:

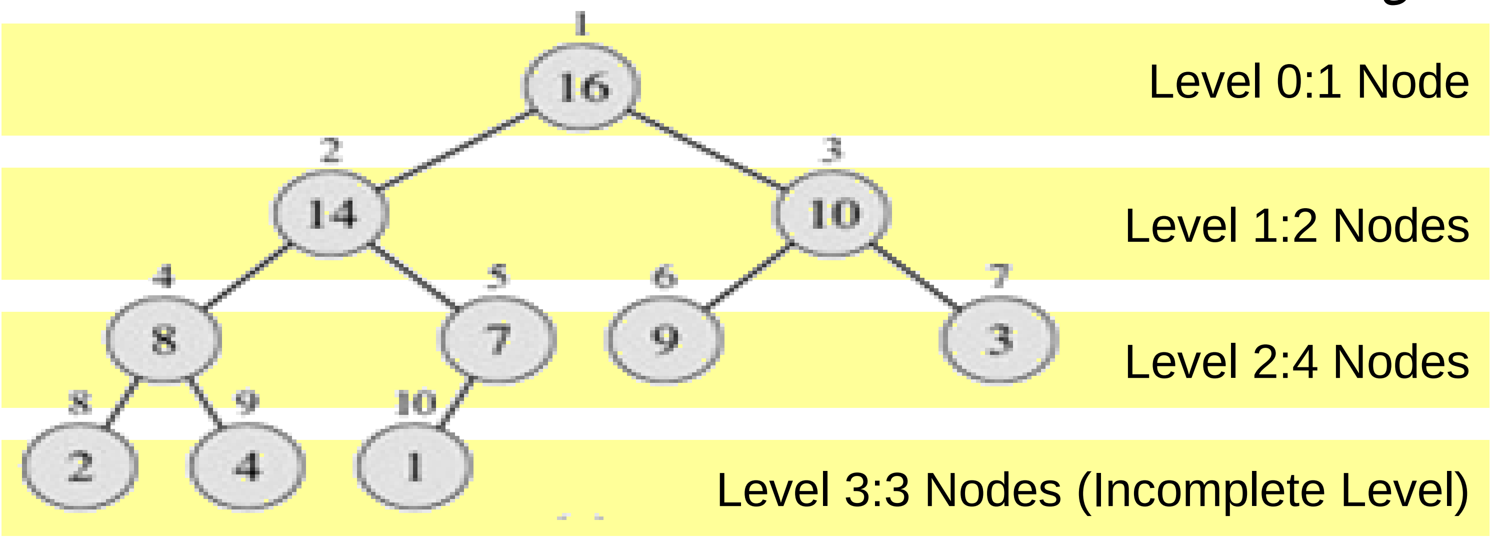
$$height(k) = level(k) = \lfloor \log_2^k \rfloor$$

- حداکثر تعداد گرههای یک درخت دودویی برابر است با:

$$N = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^h = \frac{2^{h+1} - 1}{2 - 1} = 2^{h+1} - 1$$

ویژگیهای درخت دودویی

- یادآوری: درخت دودویی با عمق h تقریبا کامل است اگر، تا عمق h-1 کامل باشد



- اگر N تعداد گرههای یک درخت دودویی تقریبا کامل باشد، گرههای $\lfloor N/2 \rfloor + 1$ به بعد، برگ هستند (فرزندی ندارند!)

جنگل، درخت جهت دار، درخت ریشه دار

- گراف ساده بدون جهت **G** را جنگل گوئیم اگر مسیر ساده نداشته باشد.
- درخت جهت‌دار گراف جهت‌داری است که گراف زمینه آن یک درخت باشد.
- یک درخت را ریشه‌دار گوییم اگر راسی داشته باشد که به ازای هر راس دیگر درخت، مسیری از آن به راس مذکور وجود داشته باشد.

پیمایش درخت

- می‌خواهیم با حرکت روی یال‌های یک درخت، همه گره‌های آن را هر کدام یک بار ملاقات کنیم. به این کار پیمایش درخت می گویند.
- بسته به این که کدام عنصر، کی ملاقات شود، پیمایش درخت لیست یا یک ترتیب خطی از عناصر آن درخت به ما می‌دهد.
- طبیعتاً پیمایش‌های متفاوت ترتیب‌های متفاوتی خواهند داد.
- روشهای معمول پیمایش درخت که بیشتر برای پیمایش درخت دودویی به کار می‌روند، عبارتند از:
- اول‌عمق
- اول‌سطح

پيمايش درخت

- فرض كنيد براي پيمايش از حروف زير استفاده كنيم:
  - L يعني حركت به فرزند سمت چپ
  - R يعني حركت به فرزند سمت راست
  - V يعني ديدن نود (يا انجام عمل مورد نظر)

- شش حالت امكان پذير است:
  - LVR, LRV, VLR, VRL, RVL, RLV

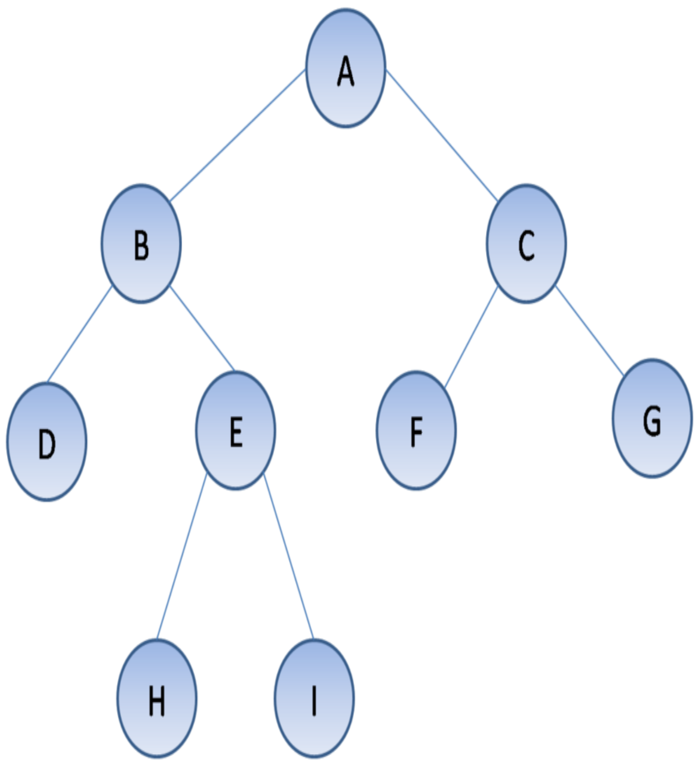
- ما فقط حالتهايي را كه L قبل از R آمده است را مورد توجه قرار مي دهيم:

LVR	LRV	VLR
Inorder	Postorder	Preorder
ميان ترتيب	پس ترتيب	پيش ترتيب

نوع پیمایش عمق اول

- سه نوع پیمایش عمق اول وجود دارد: پیش ترتیب، میان تربیب و پس تربیب.
- پیمایش پیش‌ترتیب(VLR):
- ریشه را ملاقات کن.
- زیر درخت چپ را پیمایش کن.
- زیر درخت راست را پیمایش کن.
- پیمایش میان‌ترتیب(LVR):
- زیردرخت چپ را پیمایش کن.
- ریشه را ملاقات کن.
- زیردرخت راست را پیمایش کن.
- پیمایش پس‌ترتیب(LRV):
- زیر درخت چپ را پیمایش کن.
- زیر درخت راست را پیمایش کن.
- ریشه را ملاقات کن.

مثال

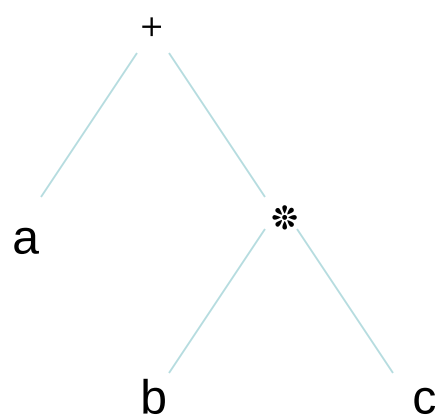


- اول عمق
- دنباله پیمایش پیش‌ترتیب:
- A, B, D, E, H, I, C, F, G
- دنباله پیمایش میان‌ترتیب:
- D, B, H, E, I, A, F, C, G
- دنباله پیمایش پس‌ترتیب:
- D, H, I, E, B, F, G, C, A
- اول سطح
- دنباله پیمایش سطح‌ترتیب:
- A, B, C, D, E, F, G, H, I

نمایش عبارات ریاضی با استفاده از درخت دودویی

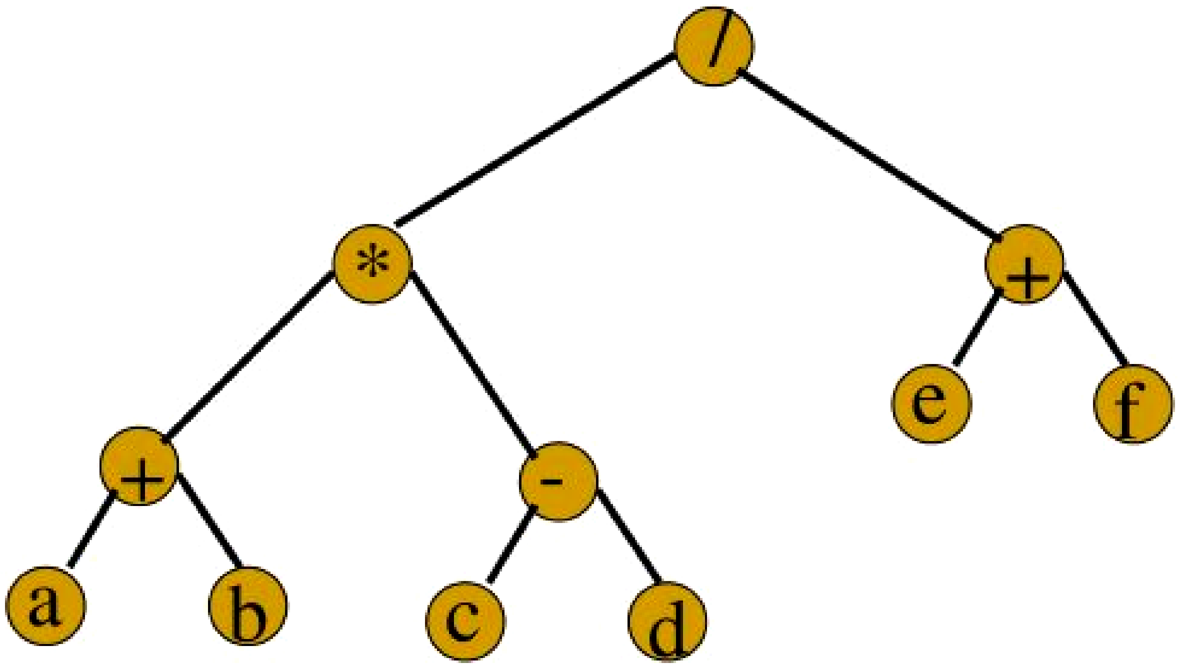
- یکی از کاربردهای درخت نمایش عبارات ریاضی است. به این ترتیب که عملگرها با استفاده از رئوس داخلی و عملوندها با استفاده از برگ ها نمایش داده می شوند.

- درخت معادل **a+b*c** را به صورت دودویی نشاند دهید:

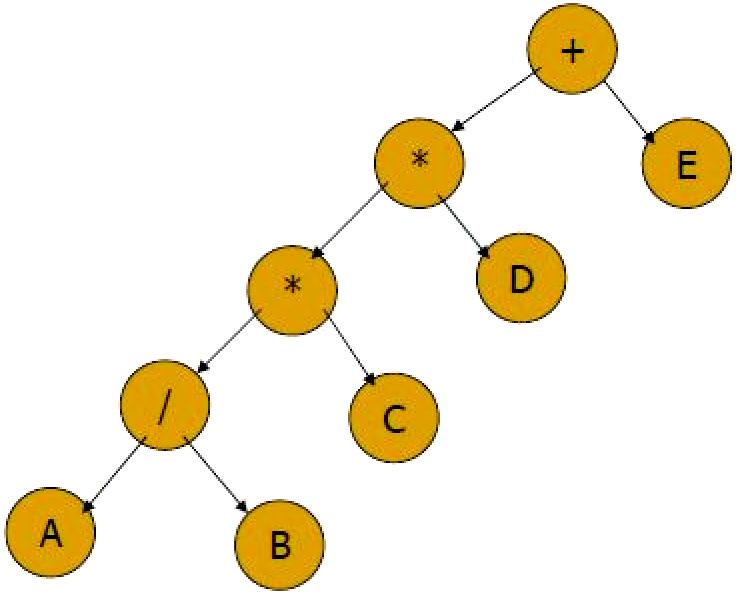


مثال

$$(a + b) * (c - d) / (e + f)$$



عبارت میانوندی

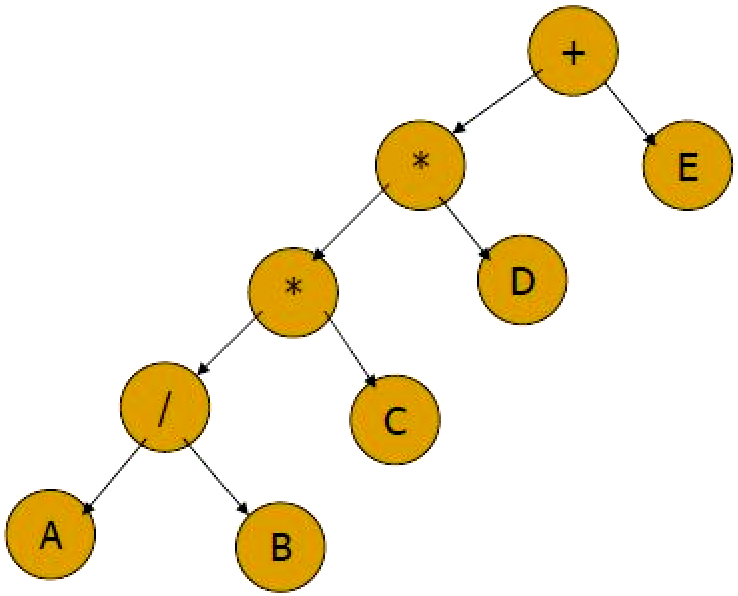


Inorder: LVR

A / B * C * D + E

عبارت ميانوندي
ديدن سمت چپ پيش از پدر

عبارت پسوندی



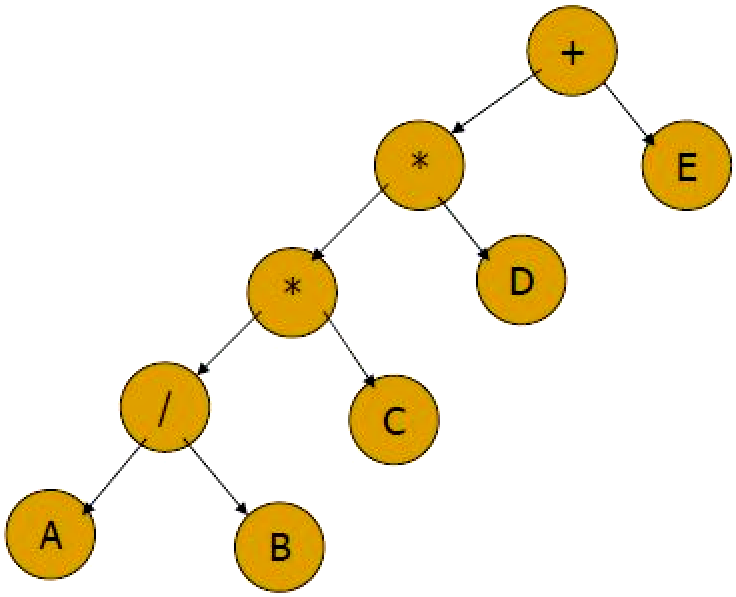
Postorder: LRV

A B / C * D * E +

عبارت پسوندی

دیدن سمت چپ و راست پیش از پدر

عبارت پیشوندی



Preorder: VLR

+ * * / A B C D E

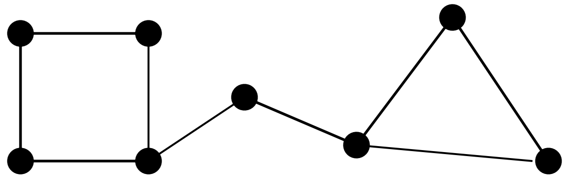
عبارت پیشوندی
دیدن پدر پیش از فرزندان

درخت های فراگیر

یک درخت فراگیر در یک گراف G زیرگرافی از آن است که شامل تمام رئوس گراف باشد و همچنین درخت باشد.

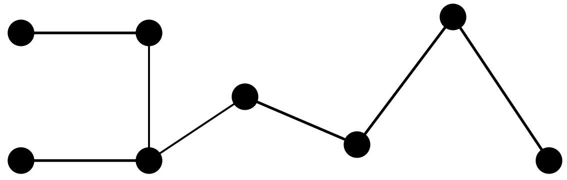
مثالی از یافتن یک درخت فراگیر

درخت فراگیر گراف زیر را بیابید.

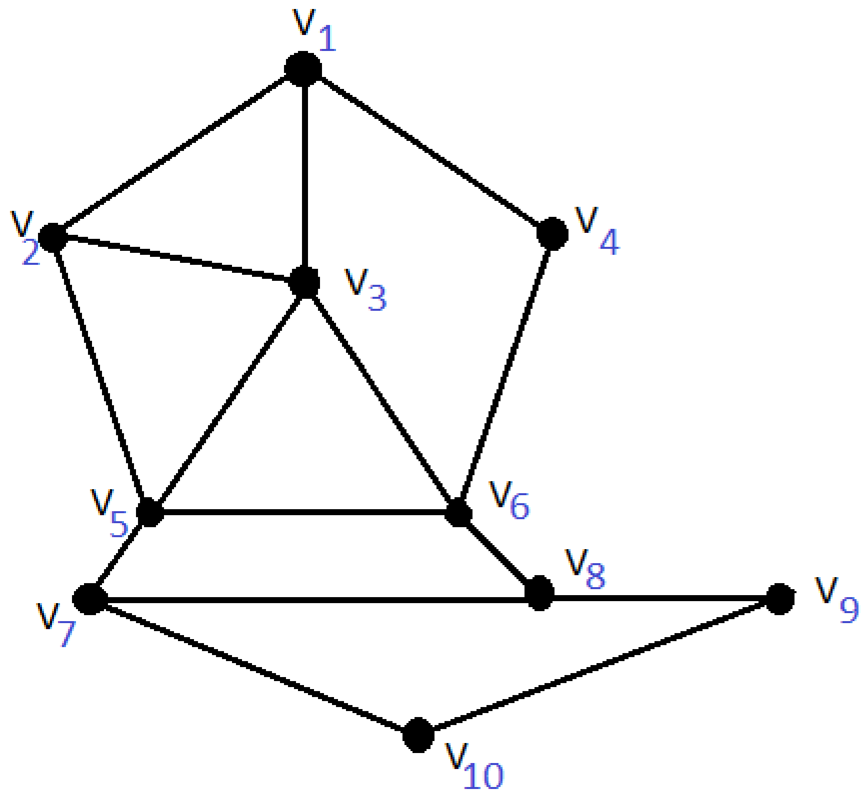


حل

بایستی که دور ها را با حذف یک یال از هر کدام از بین ببریم.یکی از راههای ممکن در زیر دیده می شود

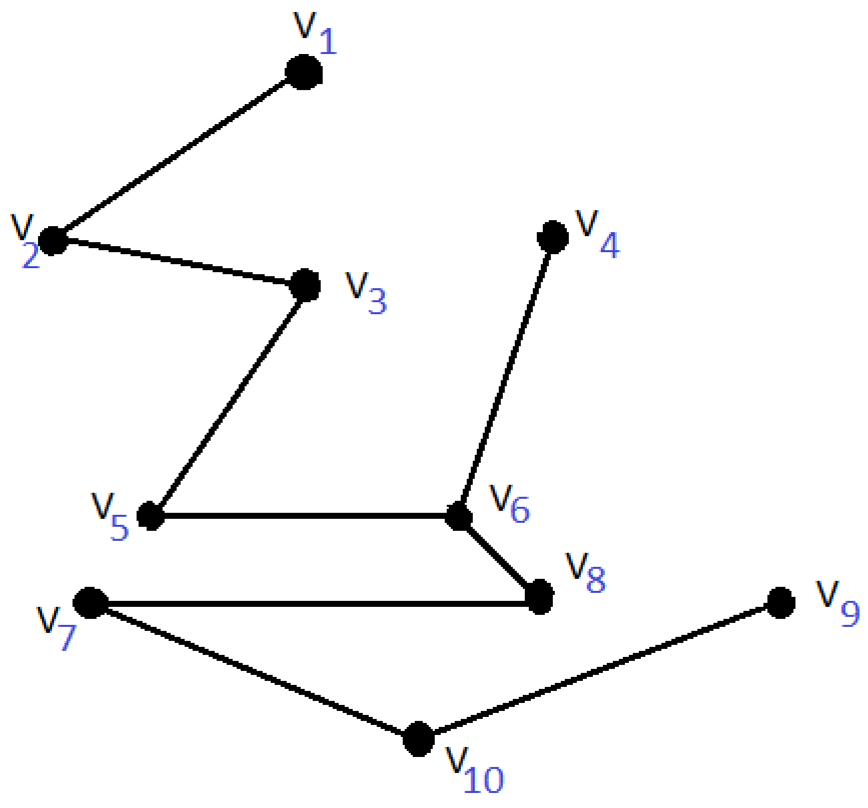


درخت فراگیر به کمک جستجوی اول عمق



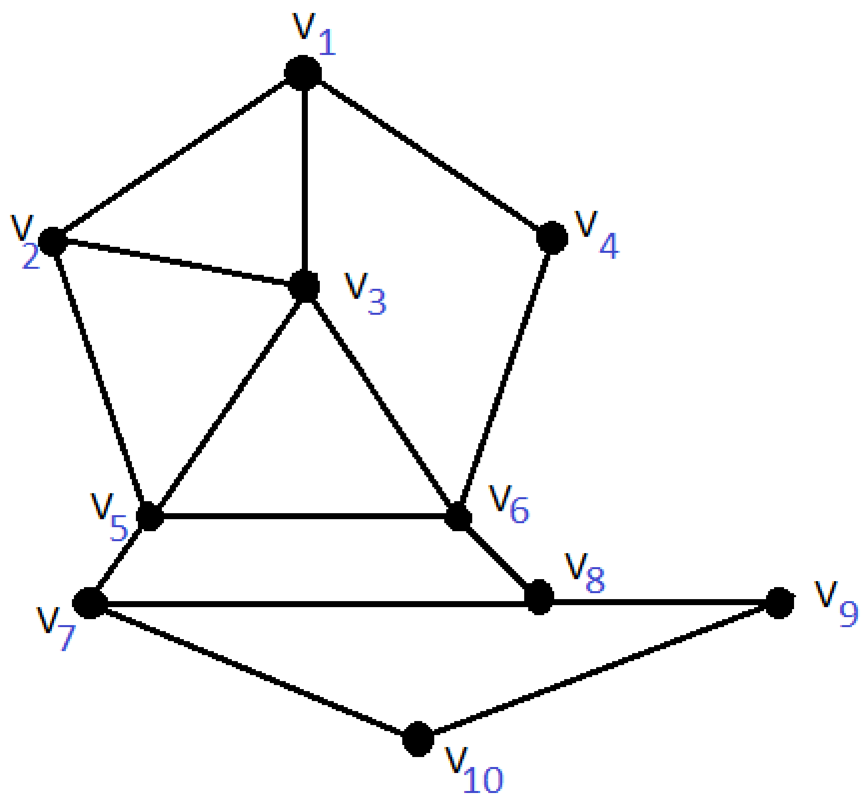
- راس شروع: V1
- اولویت ترتیب شماره ها

درخت فراگیر به کمک جستجوی اول عمق



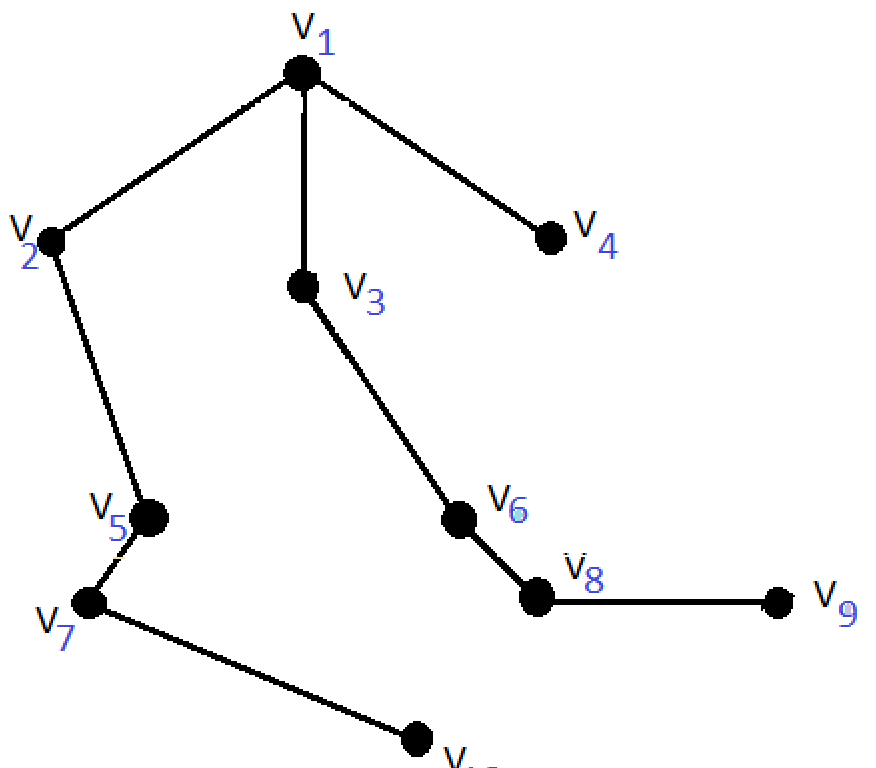
- راس شروع: V1
- اولویت ترتیب شماره ها

درخت فراگیر به کمک جستجوی اول سطح



راس شروع: V1

درخت فراگیر به کمک جستجوی اول سطح



درخت فراگیر مینیمال

- فرض کنیم **G** یک گراف وزن دار باشد. درخت فراگیری از این گراف که نسبت به همه ی درخت های فراگیر گراف دارای <u>کمترین</u> وزن باشد، درخت فراگیر مینیمال نام دارد.

الگوریتم کراسکال برای یافتن درخت فراگیر مینیمال

روش انتخاب یال ها در این روش بصورت زیر است:

مرحله ی ۱: **نخستین یال: هر یال که وزن کمتری دارد را انتخاب می کنیم.**

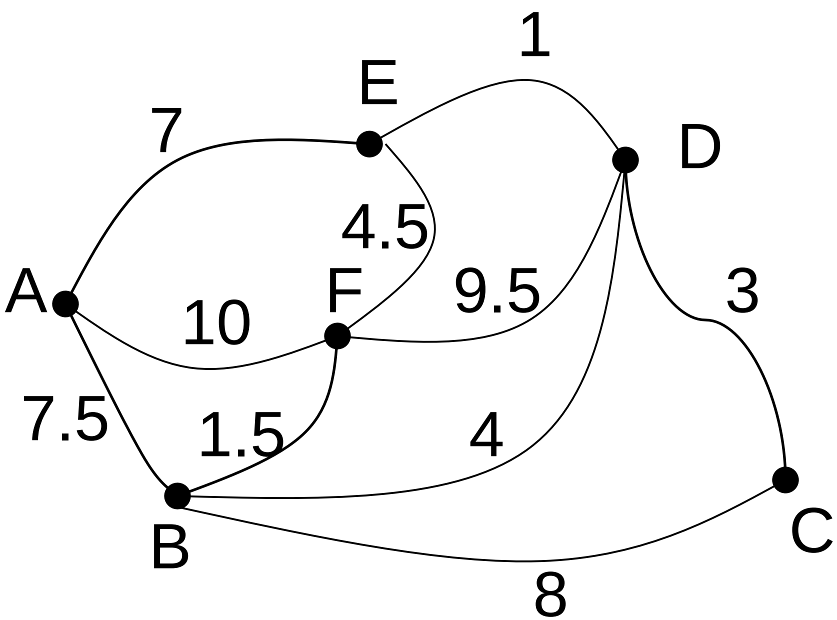
مرحله ی ۲: **یال بعدی: یالی از گراف که قبلاً اتخاب نشده و دارای کمترین وزن است انتخاب می شود.**

مرحله ی ۳: **به انتخاب یال های با کمترین وزن که هنوز اتخاب نشده اند ادامه می دهیم. البته باید یال انتخاب شده طوری باشد که دور ایجاد نشود**

مرحله ی ٤: **مرحله ی ۳ را تا زمانی تکرار می کنیم که زیرگراف ایجاد شده شامل تمام رئوس گراف باشد.**

مثالی از الگوریتم کراسکال

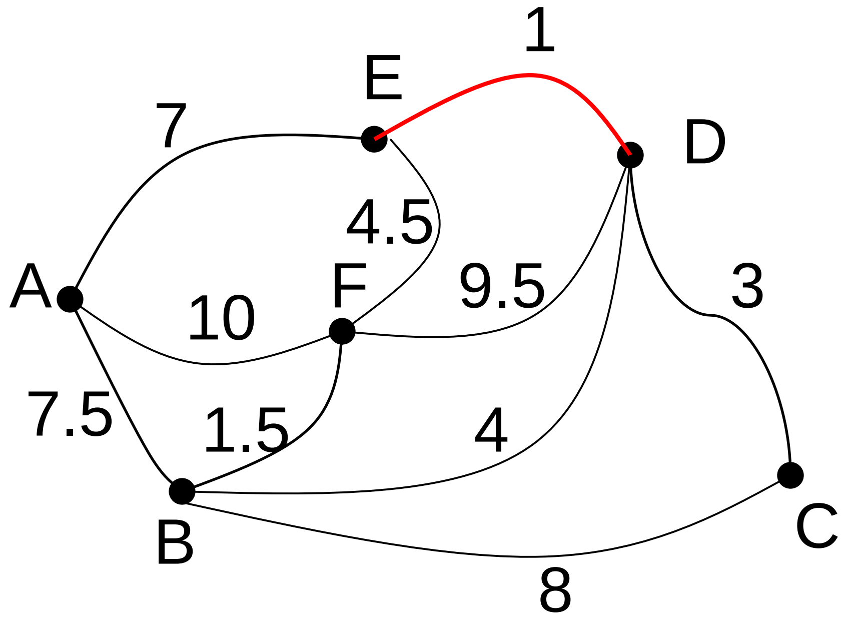
به کمک الگوریتم کراسکال، درخت فراگیر مینیمال گراف زیر را بیابید



مثالی از الگوریتم کراسکال

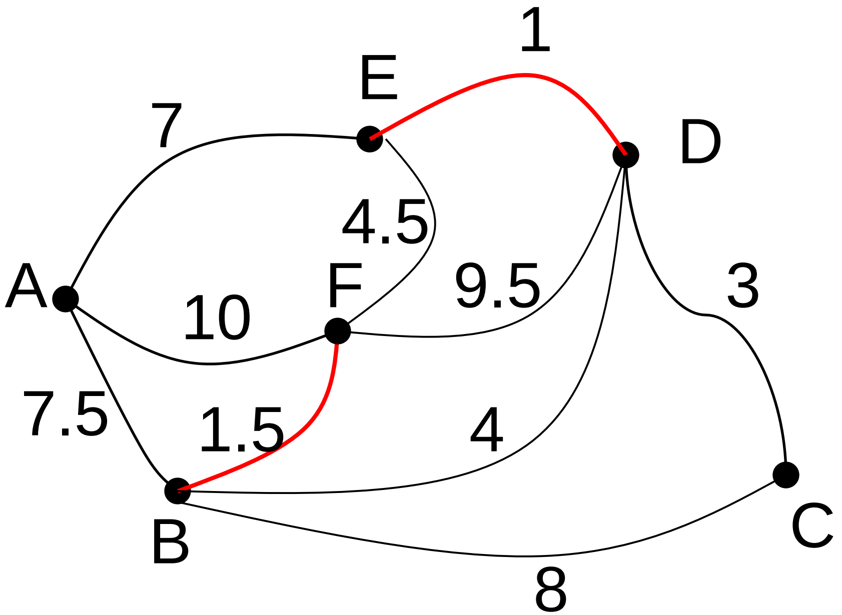
جواب:

در ابتدا یال ED که دارای کمترین وزن است انتخاب می شود.



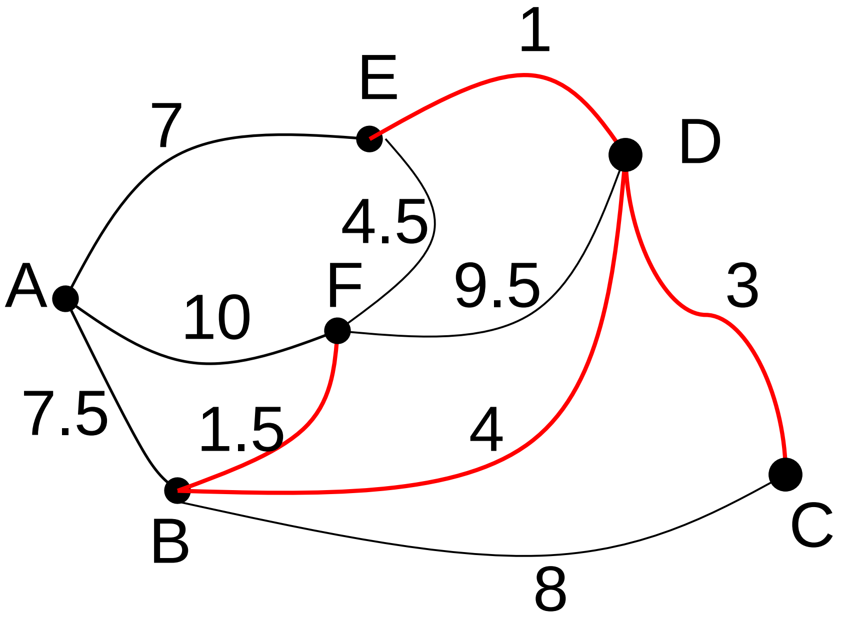
مثالی از الگوریتم کراسکال

در گراف باقی مانده یال BF دارای حداقل وزن است. پس آنرا انتخاب می کنیم.



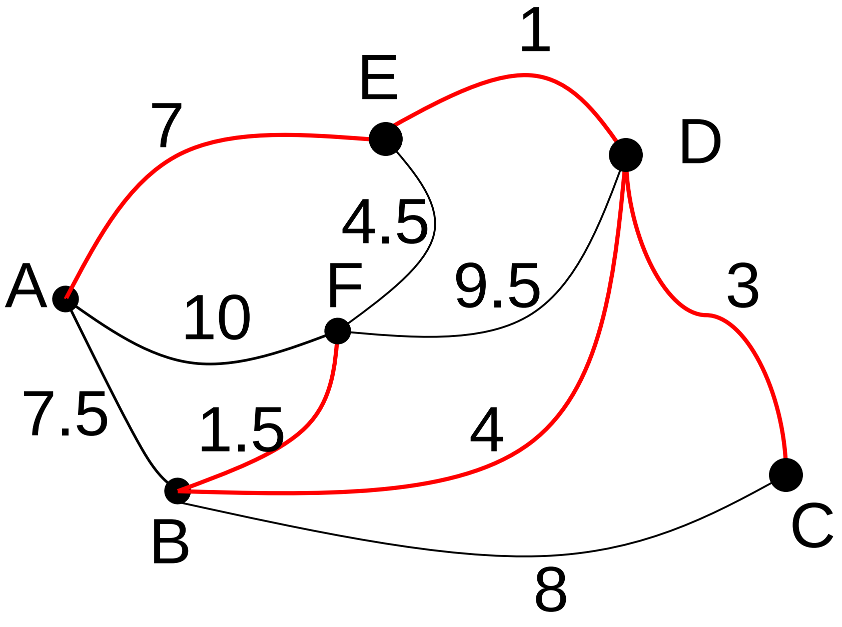
مثالی از الگوریتم کراسکال

سپس CD و در ادامه BD انتخاب می شوند.



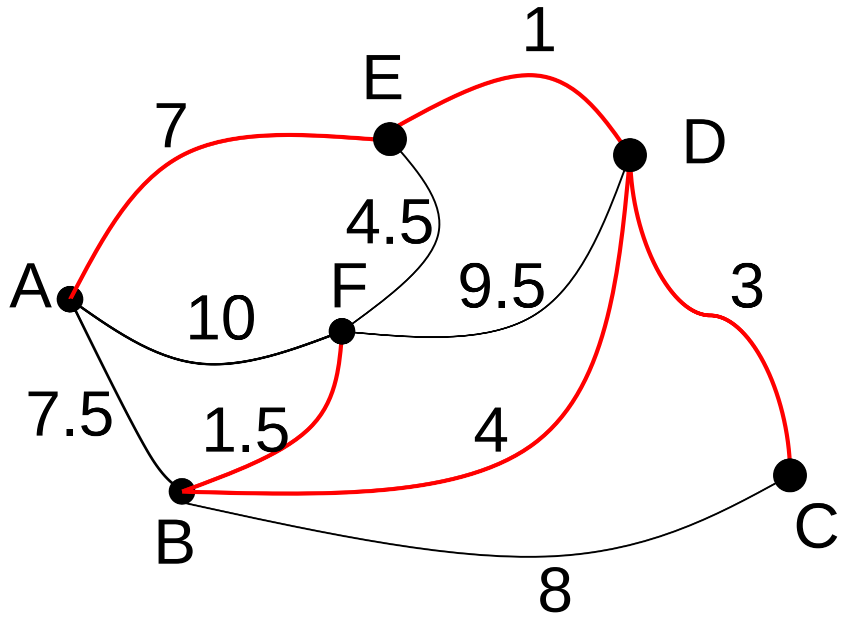
مثالی از الگوریتم کراسکال

در این مرحله یال EF حداقل است ولی با انتخاب آن دور ایجاد می شود! پس گزینه ی بعدی یعنی AE انتخاب می شود..



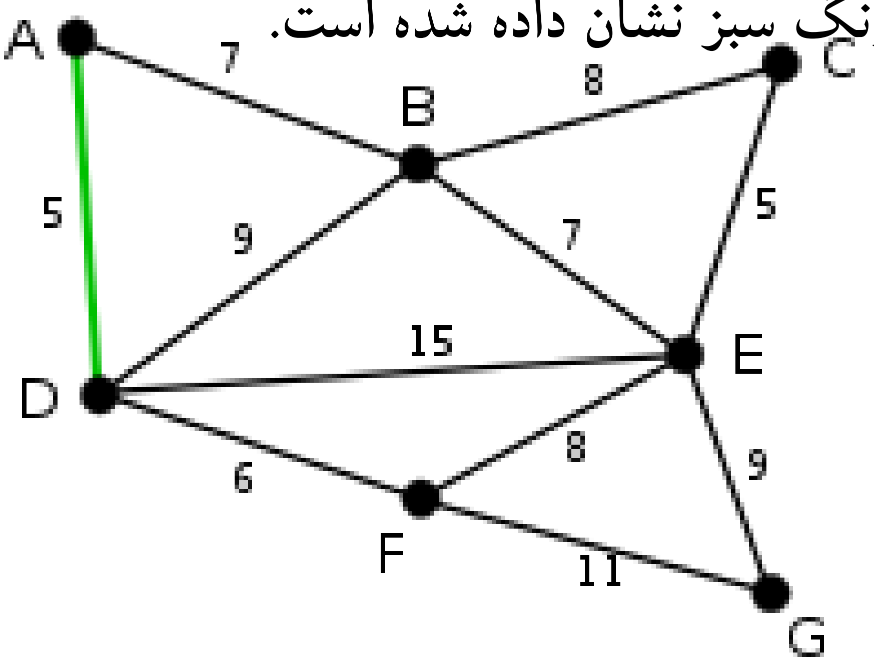
مثالی از الگوریتم کراسکال

اکنون همه رئوس انتخاب شده اند و زیرگراف بدست آمده(قرمز رنگ) همان درخت فراگیر مینیمال است



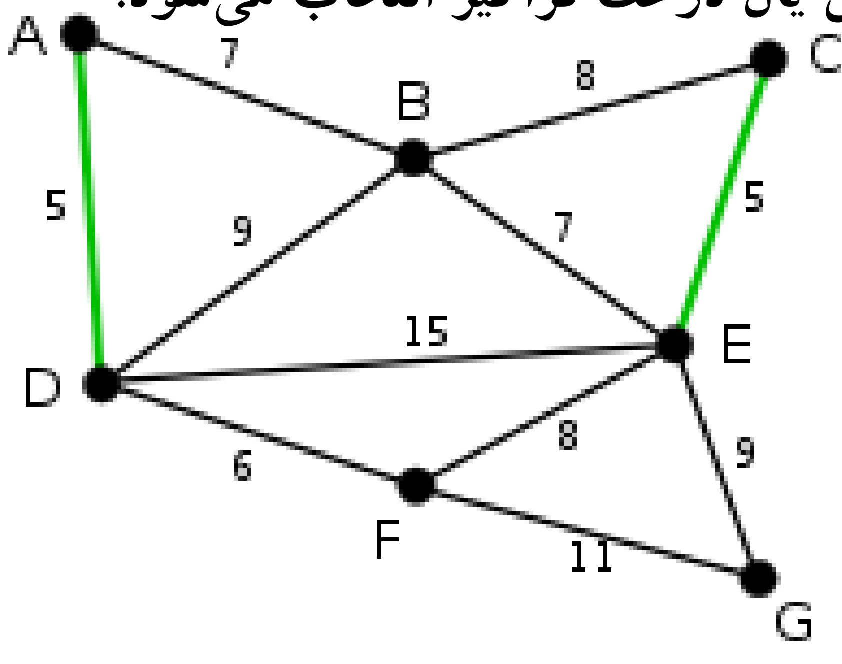
مثال ۲ الگوریتم کروسکال

- یال های **AD** و **CE** کوتاه‌ترین یال‌های گراف هستند با طول ۵، یال **AD** به طور دلخواه انتخاب می‌شود،که به رنگ سبز نشان داده شده است.



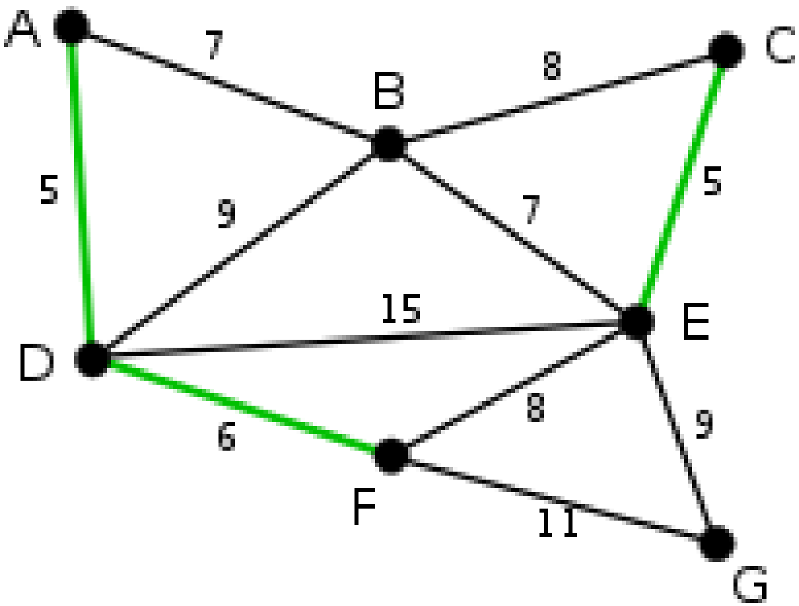
مثال ۲ الگوریتم کروسکال

• حالا **CE** کوتاه‌ترین یال است با طول ۵ ، در صورت انتخاب **CE** دور ایجـاد نمی‌شود، پس یال **CE** به عنوان دومین یال درخت فراگیر انتخاب می‌شود.



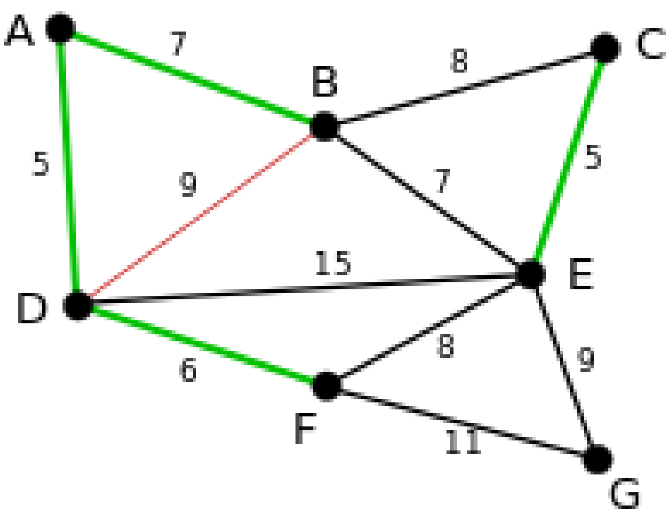
مثال ۲ الگوریتم کروسکال

• یال بعدی که باید انتخاب شود یال **DF** می‌باشد با طول ۶.



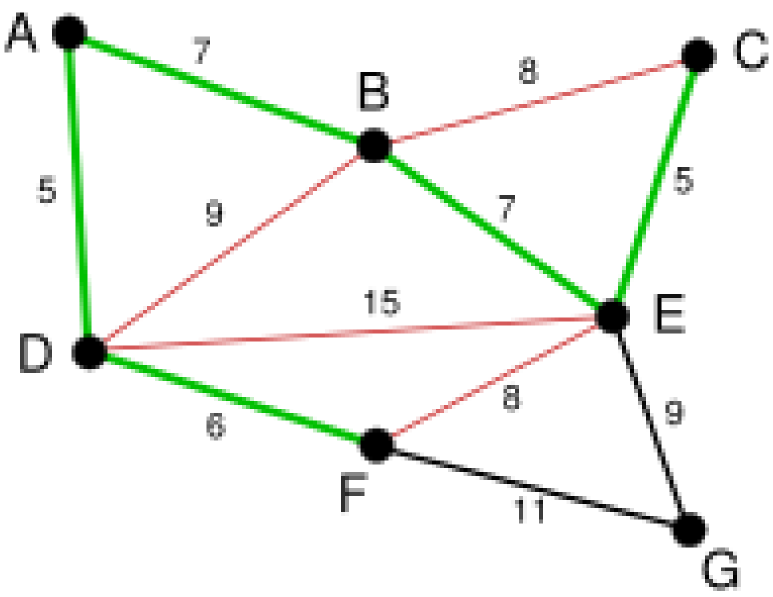
مثال ۲ الگوریتم کروسکال

- در این مرحله کوتاه‌ترین یال‌ها **AB** و **BE** می‌باشند با طول ۷ ، در اینجا یال **AB** را به طور دلخواه برمی‌گزینیم.یال **BD** که در تصویر به رنگ قرمز نشان داده شده است، به این معنی است که در انتخاب‌های بعدی نمی‌توان این یـال را انتخاب نمود، زیرا انتخاب این یال باعث ایجاد دور**(ABD)** در درخـت فراگیـر می‌شود.



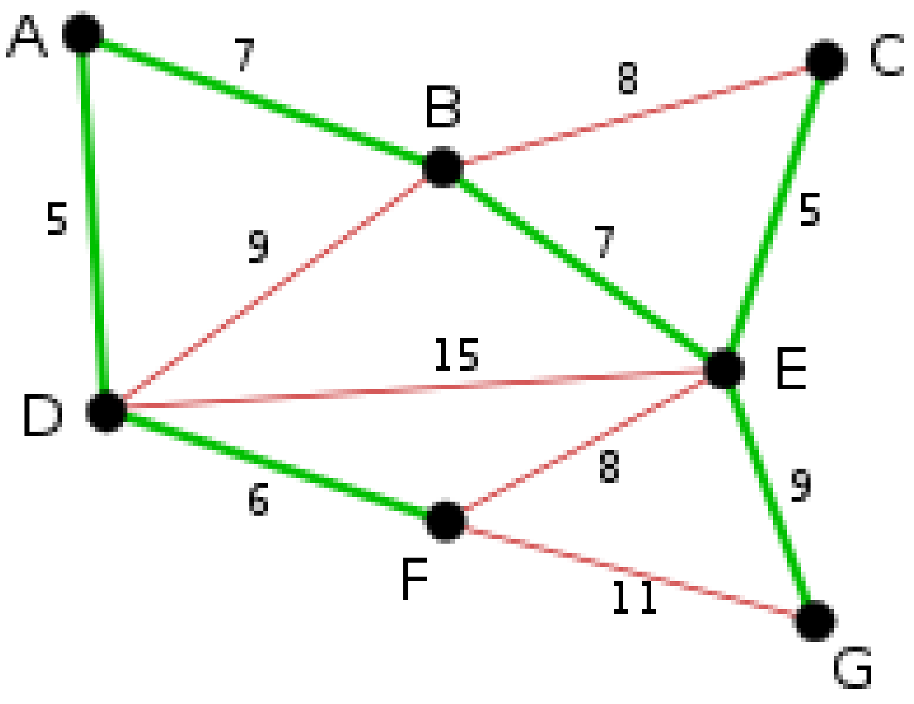
مثال ۲ الگوریتم کروسکال

- در ادامه، کوتاه‌ترین یال بعدی یعنی **BE** انتخاب می‌شود با طول ۷.در این مرحله یال‌های **BC** و **DE** و **FE** با رنگ قرمز نشان داده شده اند زیرا انتخاب هرکدام موجب ایجاد دور می‌شود.



مثال ۲ الگوریتم کروسکال

- سرانجام الگوریتم با انتخاب یال **EG** با طول ۹ پایان می‌پذیرد و درخت پوشای کمینه ایجاد می‌شود.



الگوریتم پریم

- در این روش از یک رأس شروع می کنیم و کمترین یال (یال با کمترین وزن) که از آن می گذرد را انتخاب می کنیم. در مرحله بعد یالی انتخاب می‌شود که کمترین وزن را در بین یال‌هایی که از دو گره موجود می گذرد داشته باشیم. به همین ترتیب در مرحله بعد یالی انتخاب می‌گردد که کمترین وزن را در بین یالهایی که از سه گره موجود می گذرد داشته باشد. این روال را آنقدر تکرار می کنیم تا درخت پوشای بهینه حاصل شود. باید توجه کرد که یال انتخابی در هر مرحله در صورتی انتخاب می‌شود که در گراف دور ایجاد نکند. تفاوت روش پریم با روش کراسکال در این است که گراف حاصل در مراحل میانی تشکیل درخت پوشای بهینه در روش پریم همیشه متصل است ولی در الگوریتم کراسکال در آخرین مرحله قطعاً متصل است.

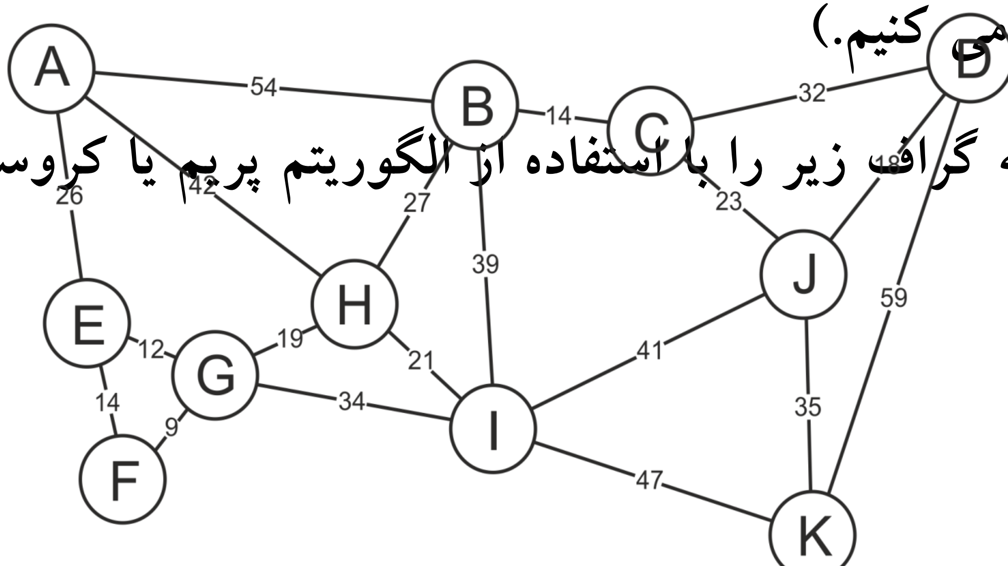
الگوریتم پریم

در الگوریتم پریم تمرکز بر روی رئوس است.

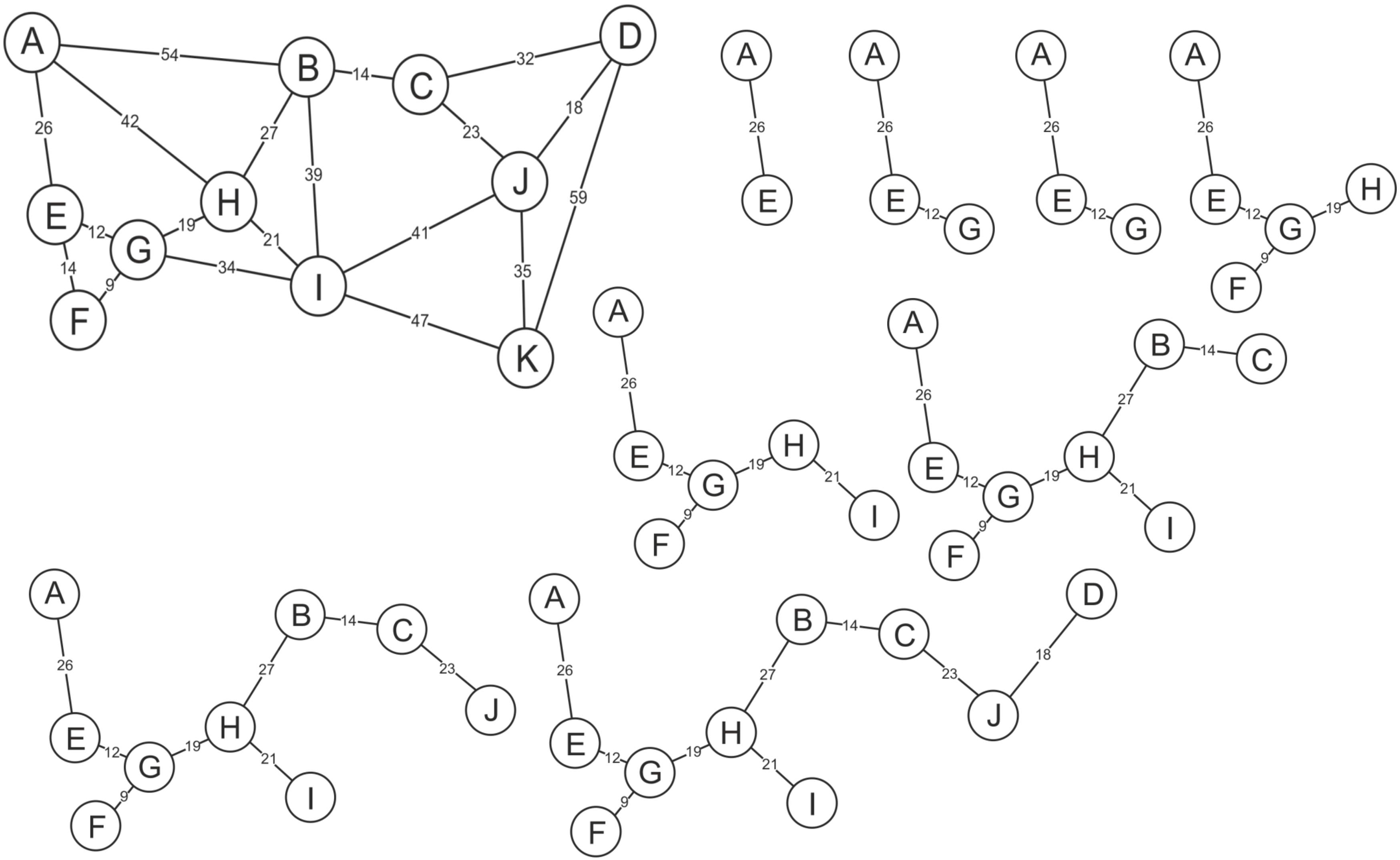
اولویت مراحل از چپ به راست است.

نکته: در طی مراحل نباید نیم دور یا دور تشکیل شود. (از یالهایی که تشکیل دور می دهند صرف نظر می کنیم.)

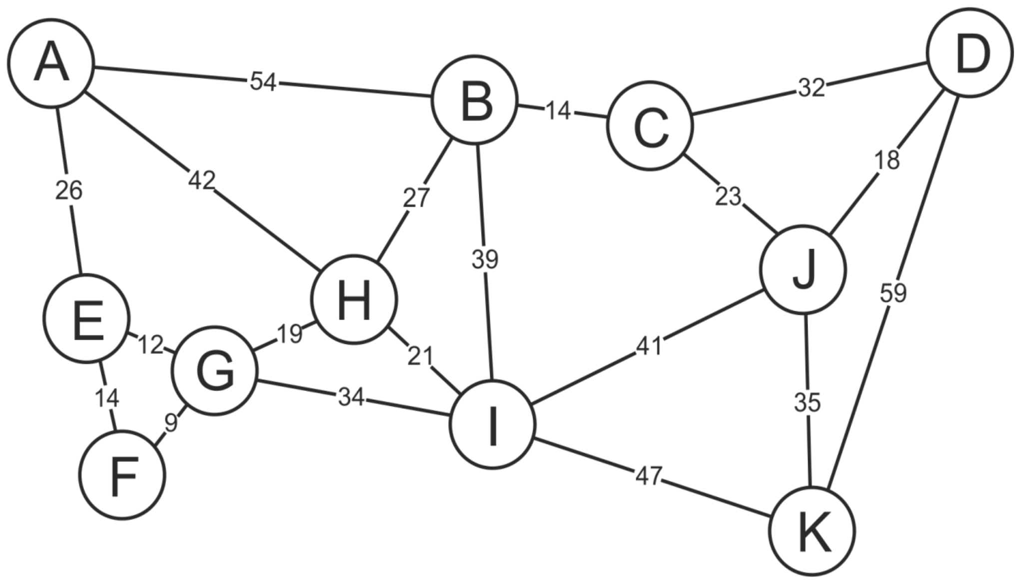
مثال: درخت پوشای بهینه گراف زیر را با استفاده از الگوریتم پریم یا کروسکال بیابید.

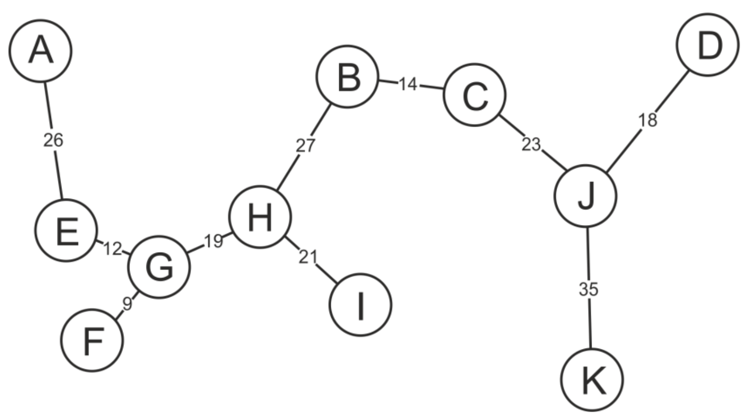


الگوریتم پریم

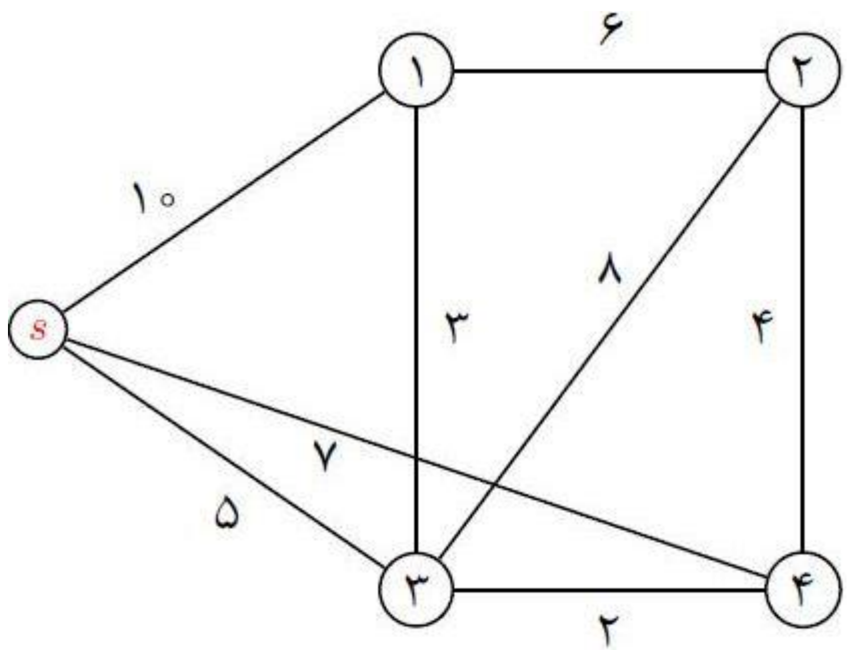


الگوریتم پریم

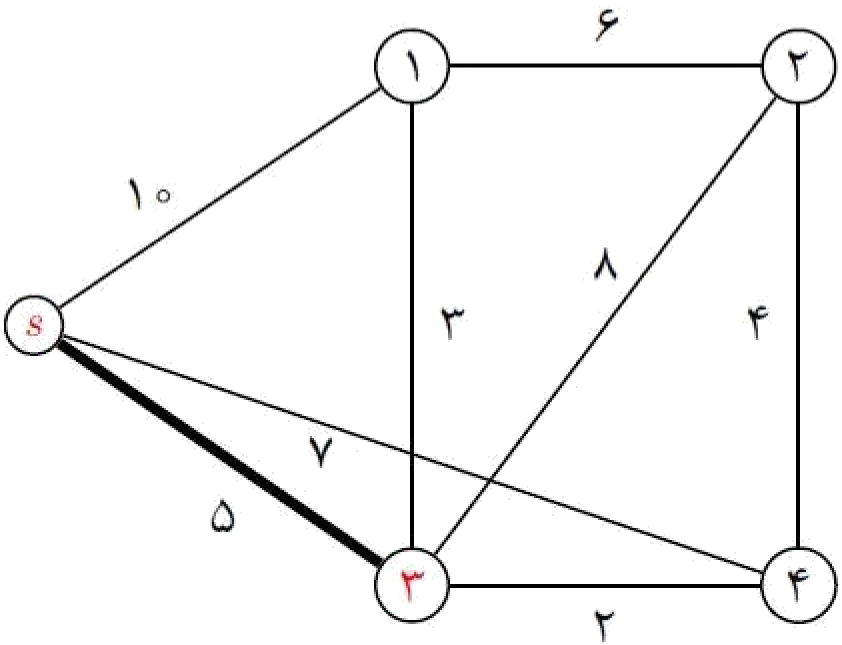




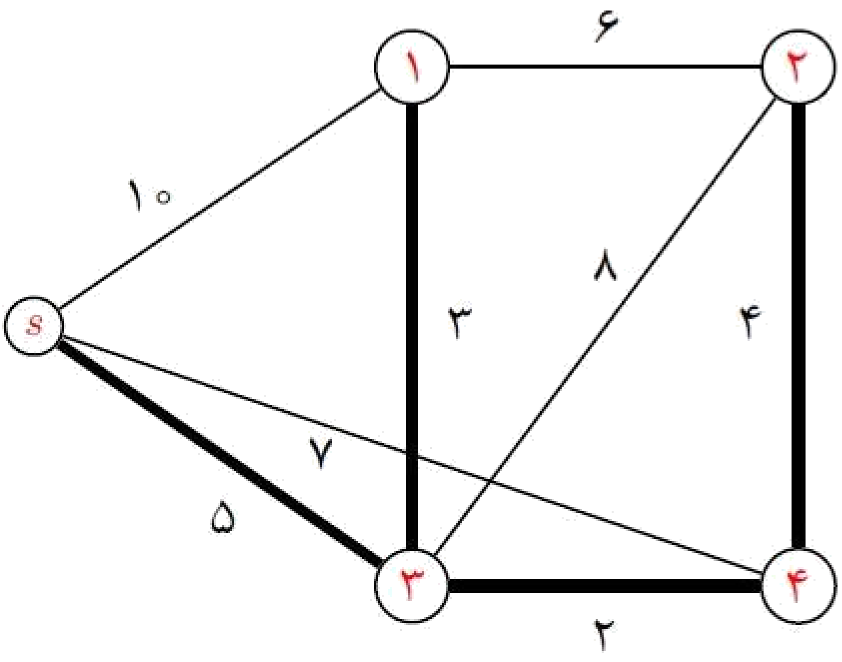
مثال ۲



مثال ۲



مثال ۲



پایان فصل پنجم

خدایا چنان کن سرانجام کار
تو خشنود باشی ومارستگار

پایان