(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,۱)} Ln(e^{x+yz})$

(۲) $lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲}$

---

(۲) فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ باشد. مشتقات نسبی(جزئی) f_{xx}, f_x را در نقطهٔ $(۰,۰)$ به دست بیاورید.

---

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x,y)=xy\ f(\frac{x+y}{xy})$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x,y)$ را به دست آورید.

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x}-y^۲\frac{\partial u}{\partial y}=u\ G(x,y)$$

---

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y)=x^۲-۲xy+\frac{۱}{۳}y^۳-۳y$$

---

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $x=۱, y=۳$ و $dx=۰/۱, dy=-۰/۱$ محاسبه نمایید.

$$f(x,y)=x+Ln(x^۲+y^۲)$$

---

(۶) ماکزیمم ومینی مم تابع $f(x,y)=x^۲+y^۲$ را به ازای $\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱$ به دست آورید.

---

(۷) فرض کنید که ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۱ & -۱ & m-۱ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ متقارن باشد. **اولاً** مقدار m,n را بیابید، **ثانیاً** $det(A^T)$ را حساب کنید.

---

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+۴y+۳z=۱ \\ ۲x+۵y+۴z=۴ \\ -x+۳y+۲z=-۵ \end{cases}$$

---

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بیابید که بردارهای $(۰,k+۲,۸), (۲,k,-۴), (۱,-۱,k-۱)$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۳$ با ضابطه $f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x+۲y \\ -x \\ ۲x-۵y \end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بیابید.

---

(۱۰) به سوالات زیر پاسخ دهید.

(الف) مرتبه معادله دیفرانسیل $(y'')^۳-۵xy'+y=sin(x)$ چند است؟ چرا؟

(ب) اگر $a>۰, a\neq۱$ باشد حاصل انتگرال $\int a^x dx$ را بیابید.

(ج) انتگرال نامعین $\int \frac{cos(Ln(x))+xsin(x)}{x}dx$ را حل کنید.

(د) انتگرال های نامعین زیر را حل کنید:

(۱) $\int e^x sin(x)dx$ (۲) $\int \frac{sin(Ln(x))}{x}dx$ (۳) $\int \frac{x^۳-۱}{x^۲+x+۱}dx$ (۴) $\int x^۳Ln(x)dx$

(۵) $\int \frac{x^۴}{(۲+x)(x^۲-۱)}dx$ (۶) $\int x^۲Ln\frac{۱+x}{۱-x}dx$ (۷) $\int \frac{e^x}{۱+e^{۲x}}dx$ (۸) $\int \frac{۱}{۱+x^۴}dx$

(۱۱) فرض کنید تابع عرضه کالایی به صورت $y = ۱ + (x + ۳)^۲$ باشد؛ مازاد تولید کننده را به ازای قیمت $y_۰ = ۳۷$ مقایسه کنید.

(۱۲) معادلات دیفرانسیل زیر ا حل کنید.

(۱) $(۱ + y^۲)y' = ۲x$ (۲) $Ln(y)y' = Ln(x^۲)$

(۱۳) مساحت محصور بین منحنی $f(x) = Ln\,(x^۲)$ و محور xها را از $x = ۱$ تا $x = e$ بیابید.

تمرینات تکمیلی (توصیه می شود بعد از تسلط کامل بر مثال ها و تمرینات کتاب درسی و سوالات حل شده این تمرینات را شخصا حل کنید)

(۱) در پیوستگی تابع $f(x,y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y^۲}{x^۶ + y^۴} & (x,y) \neq ۰ \\ ۰ & (x,y) = ۰ \end{cases}$$

(۲) پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^۲}{x^۲ + y^۲} & (x,y) \neq ۰ \\ ۰ & (x,y) = ۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $(۰,۰)$ بررسی کنید.

(۳) در پیوستگی تابع $f(x,y)$ بر $\mathbb{R}$ بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲} & x^۲ + y^۲ \leq ۴ \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(۴) در پیوستگی تابع $f(x,y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ بحث کنید:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y^۲}{x^۶ + y^۴} & (x,y) \neq ۰ \\ ۰ & (x,y) = ۰ \end{cases}$$

(۵) پیوستگی تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲ + e^y}{x - ۱} & x > ۱ \\ \frac{۱}{x + ۱} & x > -۱ \\ ۰ & |x| \leq ۱ \end{cases}$ را در کلیهٔ نقاط صفحهٔ مختصات بررسی کنید.

(۶) اگر z تابعی از x, y باشد و همچنین u, v دو متغییر دیگر باشند به نحوی که

$$u = \ell x + my \;\;,\;\; v = -mx + \ell y$$

درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = (\ell^۲ + m^۲)(\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} + \frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲})$$

(۷) با فرض $u = x^n\, f(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta})$ ، نشان دهید $xu_x + \alpha y u_y + \beta z u_z = nu$.

(۸) اکسترمم های موضعی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y) = xy\; Ln(x^۲ + y^۲)$$

(۹) فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & ۰ \\ b & c \end{pmatrix}$ باشد، فرمول کلی برای A^n بیابید که در آن n عددی طبیعی است.

(۱۰) وارون ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ را به روش الحاقی به دست آورید.

(۱۱) فرض کنید ماتریس $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$ باشد؛ $det(A^{-۱})$ را حساب کنید.

جواب سوال ۱)

(۱) $lim_{(x,y,z)\to(۱,۰,۱)} Ln(e^{x+yz}) = Ln(e^{۱+(۰\times۱)}) = Lne = ۱$

(۲) $lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲}$

اگر نقطه را مستقیما جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ به دست می آید. کافیست از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$x = rcos(\theta)\ ,\ y = rsin(\theta)$ لذا وقتیکه نقطه به مبدا میل می کند $r \to ۰$

$$\begin{aligned} lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy}{x^۲+y^۲} &= lim_{r\to۰} \frac{rcos(\theta)rsin(\theta)}{r^۲cos^۲(\theta)+r^۲sin^۲(\theta)} \\ &= lim_{r\to۰} \frac{r^۲cos(\theta)sin(\theta)}{r^۲(cos^۲(\theta)+sin^۲(\theta))} \\ &= \frac{۱}{۲}sin(۲\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال ۲)

$$f_x(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{\frac{h^۳+۰}{h^۲+۰} - ۰}{h} = ۱$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{۳x^۲(x^۲+y^۲)-۲x(x^۳+y^۳)}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۱ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

$$f_{xx}(۰,۰) = lim_{h\to۰} \frac{f_x(h,۰)-f_x(۰,۰)}{h} = lim_{h\to۰} \frac{۱-۱}{h} = ۰$$

جواب سوال ۳)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf(\frac{x+y}{xy}) + xyf'(\frac{x+y}{xy})\frac{xy-y(x+y)}{x^۲y^۲} = xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^۲\frac{\partial u}{\partial x} - y^۲\frac{\partial u}{\partial y} = x^۲(yf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{xy}) - y^۲(xf(\frac{x+y}{xy}) - \frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{xy})) = \underbrace{xyf(\frac{x+y}{xy})}\ (x-y) = u\ G(x,y)$$

چون $u \neq ۰$ لذا $G(x,y) = x-y$ می باشد.

جواب سوال ۴) داریم: $f(x,y) = x^۲ - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^۳ - ۳y$

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزیی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = ۰ \Rightarrow -۲x + y^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = ۳, -۱ \end{cases}$$

(چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x = y$)

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(۱,-۱)$, $(۳,۳)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$A = f_{xx} = ۲\ ,\ B = f_{xy} = -۲\ ,\ C = f_{yy} = ۲y \Longrightarrow \Delta = B^۲ - AC$

برای نقطه بحرانی $(۳,۳)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times۶) = ۴ - ۱۲ = -۸ < ۰$، از طرفی داریم: $A = ۲ > ۰$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-۱,۱)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲\times-۲) = ۴ - ۱۲ = ۸ > ۰$، لذا نقطه زین اسبی است.

جواب سوال ۵) دیفرانسیل کامل تابع دومتغییره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$f(x,y) = x + Ln(x^۲+y^۲) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = ۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{۲y}{x^۲+y^۲}$$

$$\Longrightarrow df = (۱ + \frac{۲x}{x^۲+y^۲})dx + \frac{۲y}{x^۲+y^۲}dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $x = ۱, y = ۳, dx = ۰/۱, dy = -۰/۱$ خواهیم داشت: $df = ۰/۰۶$.

جواب سوال ۶) بنا به فرض مساله داریم: $g(x,y)=\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}-۱=۰$ ، $f(x,y)=x^۲+y^۲$ ، لذا تابع لاگرانژین و به تبع آن دستگاه لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$L(x,y)=x^۲+y^۲+\lambda(\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}-۱)\ ،\ \begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=۰\Longrightarrow ۲x+\frac{\lambda}{۲}=۰\Longrightarrow x=-\frac{\lambda}{۴}\\ \frac{\partial L}{\partial y}=۰\Longrightarrow ۲y+\frac{\lambda}{۳}=۰\Longrightarrow y=-\frac{\lambda}{۶}\\ \frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱\end{cases}$$

با جایگذاری x,y در معادله سوم، مقدار $\lambda=-\frac{۷۲}{۱۳}$ به دست می آید. با جاگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x=\frac{۷۲}{۵۲}\quad,\quad y=\frac{۷۲}{۷۸}\Longrightarrow f(\frac{۷۲}{۵۲},\frac{۷۲}{۷۸})=\frac{۳۶}{۱۳}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقارن است لذا به ازای هر $i,j=۱,۲,۳$ خواهیم داشت: $a_{ij}=a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & m-۱\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$n+۱=۴\ ,\ m-۱=۰\Longrightarrow n=۳\ ,\ m=۱$$

می دانیم در ماتریس های متقارن $A=A^T$ است، لذا:

$$A=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}\Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۰ & ۳\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(A^T)=۲\times((-۱\times ۳)-۰)-۱\times((۱\times ۳)-۰)+۴\times((۱\times ۰)-(-۱\times ۴))=۷$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۴ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۵ & ۴ & ۴\\ -۱ & ۳ & ۲ & -۵\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}۱ & ۰ & ۰ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲\end{array}\right)\Longrightarrow x=۳,y=-۲,z=۲$$

(نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است)

جواب ۹-الف) با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی $det\begin{pmatrix}۱ & -۱ & k-۱\\ ۲ & k & -۴\\ ۰ & k+۲ & -۸\end{pmatrix}\neq ۰$ خواهیم داشت: $۲k^۲-۲k-۱۲\neq ۰$ لذا برای اینکه بردارها مستقل خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده **نباشد**. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k=۳,-۲$ بنابراین به ازای $k\neq ۳,-۲$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $B_۱=\{(۱,۰),(۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۲$ و $B_۲=\{(۱,۰,۰),(۰,۱,۰),(۰,۰,۱)\}$ در $\mathbb{R}^۳$ را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه $B_۱$ تحت f را برحسب پایه $B_۲$ می نویسیم.

$$f\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۱)+(۲\times ۰)\\ -۱\\ (۲\times ۱)-(۵\times ۰)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\\ ۲\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}-۱\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(۳\times ۰)+(۲\times ۱)\\ ۰\\ (۲\times ۰)-(۵\times ۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۰\\ -۵\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱\\ ۰\\ ۰\end{bmatrix}+۰\begin{bmatrix}۰\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۰\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{ماتریس نمایشگر}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.

جواب سوال ۱۰-الف) با توجه به تعریف مرتبه یک معادله دیفرانسیل، مرتبه بالاترین مشتقی است که در معادله آمده است، لذا از مرتبه ۲ می باشد.

جواب سوال ۱۰-ب) فرض کنید $u = a^x \Longrightarrow du = (Lna)a^x dx \Longrightarrow \frac{۱}{Lna}du = a^x dx$، لذا خواهیم داشت:

$$\int a^x dx = \int \frac{۱}{Lna}du = \frac{۱}{Lna}u + C = \frac{۱}{Lna}a^x + C$$

جواب سوال ۱۰-ج) فرض کنید $u = Ln(x) \Longrightarrow du = \frac{۱}{x}dx$، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{cos(Ln(x)) + xsin(x)}{x}dx &= \int \frac{cos(Ln(x))}{x}dx + \int sin(x)dx \\ &= \int cos(u)du + \int sin(x)dx \\ &= sin(u) - cos(x) + C \\ &= sin(Ln(x)) - cos(x) + C\end{aligned}$$

جواب سوال ۱۰-د-۱۱-۱۲-۱۳) به جزوه درسی مراجعه کنید.