

(۱) هر کدام از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$(۱) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \ln(e^{x+yz})$$

$$(۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

(۲) فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ باشد. مشتقات نسبی (جزئی) f_{xx}, f_{xy} را در نقطه $(0, 0)$ به دست بیاورید.

(۳) تابع u با معادله ای به شکل $u(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ تعریف شده است. اولاً نشان دهید که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند، ثانیاً $G(x, y)$ را به دست آورید.

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = u G(x, y)$$

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

(۵) دیفرانسیل کامل تابع زیر را به ازای $x = 1, y = 3, dx = 0.1, dy = -0.1$ محاسبه نمایید.

$$f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

(۶) ماکزیمم و مینی مم تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را به ازای $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$ به دست آورید.

(۷) فرض کنید که ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ متقارن باشد. اولاً مقدار m, n را بیابید، ثانیاً $\det(A^T)$ را حساب کنید.

(۸) دستگاه سه معادله، سه مجهولی زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ -x + 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

(۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار k را طوری بیابید که بردارهای $(0, k+2, 8), (2, k, -4), (1, -1, k-1)$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشند.

ب) اگر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با ضابطه $f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y \\ -x \\ 2x - 5y \end{bmatrix}$ یک تابع خطی باشد، ماتریس نمایشگر آن را بیابید.

(۱۰) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مرتبه معادله دیفرانسیل $(y'')^3 - 5xy' + y = \sin(x)$ چند است؟ چرا؟

ب) اگر $a > 0, a \neq 1$ باشد حاصل انتگرال $\int a^x dx$ را بیابید.

ج) انتگرال نامعین $\int \frac{\cos(\ln(x)) + x \sin(x)}{x} dx$ را حل کنید.

د) انتگرال های نامعین زیر را حل کنید:

$$(۱) \int e^x \sin(x) dx \quad (۲) \int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx \quad (۳) \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} dx \quad (۴) \int x^3 \ln(x) dx$$

$$(۵) \int \frac{x^4}{(2+x)(x^2-1)} dx \quad (۶) \int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} dx \quad (۷) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (۸) \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

(۱۱) فرض کنید تابع عرضه کالایی به صورت $y = 1 + (x + 3)^2$ باشد؛ مازاد تولید کننده را به ازای قیمت $y_0 = 37$ مقایسه کنید.

(۱۲) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(۱) \quad (1 + y^2)y' = 2x \quad (۲) \quad \ln(y)y' = \ln(x^2)$$

(۱۳) مساحت محصور بین منحنی $f(x) = \ln(x^2)$ و محور x ها را از $x = 1$ تا $x = e$ بیابید.

تمرینات تکمیلی (توصیه می شود بعد از تسلط کامل بر مثال ها و تمرینات کتاب درسی و سوالات حل شده این تمرینات را شخصا حل کنید)

(۱) در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

(۲) پیوستگی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$ را در نقطه $(0, 0)$ بررسی کنید.

(۳) در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2 - y^2} & x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

(۴) در پیوستگی تابع $f(x, y)$ بر $\mathbb{R}^2$ بحث کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

(۵) پیوستگی تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + e^y}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{1}{x + 1} & x > -1 \\ 0 & |x| \leq 1 \end{cases}$ را در کلیه نقاط صفحه مختصات بررسی کنید.

(۶) اگر z تابعی از x, y باشد و همچنین u, v دو متغیر دیگر باشند به نحوی که

$$u = \ell x + m y, \quad v = -m x + \ell y$$

درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\ell^2 + m^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

(۷) با فرض $u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$ ، نشان دهید $xu_x + \alpha yu_y + \beta zu_z = nu$.

(۸) اکستریم های موضعی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$$

(۹) فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ باشد، فرمول کلی برای A^n بیابید که در آن n عددی طبیعی است.

(۱۰) وارون ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ را به روش الحاقی به دست آورید.

(۱۱) فرض کنید ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ باشد؛ $\det(A^{-1})$ را حساب کنید.

جواب سوال (۱)

$$(۱) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \ln(e^{x+yz}) = \ln(e^{1+(0 \times 1)}) = \ln e = 1$$

$$(۲) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

اگر نقطه را مستقیماً جایگذاری نماییم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به دست می آید. کافیت از تبدیل زیر استفاده کنیم:

$x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ می کند $r \rightarrow 0$ و تئیکه نقطه به مبدا میل می کند

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos(\theta) r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

چون مقدار حد به θ وابسته است لذا این حد وجود ندارد.

جواب سوال (۲)

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 0 - 0}{h} = 0 \\ f_x(x,y) &= \begin{cases} \frac{2x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ f_{xx}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

جواب سوال (۳)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2y^2} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{xy - y(x+y)}{x^2y^2} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \end{aligned}$$

در معادله قرار می دهیم؛ داریم:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \left(yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right) - y^2 \left(xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right) = \underbrace{xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)}_{G(x,y)} (x-y) = u G(x,y)$$

چون $u \neq 0$ لذا $G(x,y) = x - y$ می باشد.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$$

جواب سوال (۴) داریم:

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزئی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2x + y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3, -1 \end{cases} \quad (x = y \text{ قرار می دهیم})$$

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-1, -1)$, $(3, 3)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم:

$$A = f_{xx} = 2, B = f_{xy} = -2, C = f_{yy} = 2y \Rightarrow \Delta = B^2 - AC$$

برای نقطه بحرانی $(3, 3)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times 6) = 4 - 12 = -8 < 0$ از طرفی داریم: $A = 2 > 0$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-1, -1)$ داریم: $\Delta = (-2)^2 - (2 \times -2) = 4 - 12 = 8 > 0$ لذا نقطه زین اسبی است.

جواب سوال (۵) دیفرانسیل کامل تابع دومتغییره f را با df نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow df = \left(1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

لذا با جایگذاری مقادیر $x = 1, y = 3, dx = 0.1, dy = -0.1$ خواهیم داشت: $df = 0.06$.

جواب سوال ۶) بنا به فرض مساله داریم: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ ، لذا تابع لاگرانژین و به تبع آن دستگاه لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 \right), \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda}{4} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

با جایگذاری x, y در معادله سوم، مقدار $\lambda = -\frac{72}{13}$ به دست می آید. با جاگذاری مقدار λ خواهیم داشت:

$$x = \frac{72}{52}, \quad y = \frac{72}{78} \Rightarrow f\left(\frac{72}{52}, \frac{72}{78}\right) = \frac{36}{13}$$

جواب سوال ۷) با توجه به اینکه ماتریس متقارن است لذا به ازای هر $i, j = 1, 2, 3$ خواهیم داشت: $a_{ij} = a_{ji}$. لذا در ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & m-1 \\ n+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n+1=4, \quad m-1=0 \Rightarrow n=3, \quad m=1$$

می دانیم در ماتریس های متقارن $A = A^T$ است، لذا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A^T) = 2 \times ((-1 \times 3) - 0) - 1 \times ((1 \times 3) - 0) + 4 \times ((1 \times 0) - (-1 \times 4)) = 7$$

جواب سوال ۸) ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل و سپس با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس قطری تبدیل می کنیم:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow x=3, y=-2, z=2 \quad (\text{نوشتن مراحل تبدیل ماتریس در امتحان الزامی است})$$

جواب ۹-الف) با اعمال شرط استقلال خطی، یعنی $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k-1 \\ 2 & k & -4 \\ 0 & k+2 & -8 \end{pmatrix} \neq 0$ خواهیم داشت: $2k^2 - 2k - 12 \neq 0$ لذا برای اینکه بردارها مستقل

خطی باشند بایستی k ریشه معادله درجه دوم به دست آمده نباشد. پس ریشه های معادله درجه دوم فوق را به دست می آوریم: $k = 3, -2$ بنابراین به ازای $k \neq 3, -2$ بردارها مستقل خطی هستند.

جواب ۹-ب) پایه های استاندارد $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ در $\mathbb{R}^2$ و $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر می گیریم. لذا تصویر پایه B_1 تحت f را برحسب پایه B_2 می نویسیم.

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 1) + (2 \times 0) \\ -1 \\ (2 \times 1) - (5 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 0) + (2 \times 1) \\ 0 \\ (2 \times 0) - (5 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ماتریس نمایشگر} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{دقت کنید که ضرایب ستون های ماتریس را تشکیل می دهند.}$$

جواب سوال ۱۰-الف) با توجه به تعریف مرتبه یک معادله دیفرانسیل، مرتبه بالاترین مشتقی است که در معادله آمده است، لذا از مرتبه ۲ می باشد.

جواب سوال ۱۰-ب) فرض کنید $u = a^x \Rightarrow du = (Lna)a^x dx \Rightarrow \frac{1}{Lna} du = a^x dx$ لذا خواهیم داشت:

$$\int a^x dx = \int \frac{1}{Lna} du = \frac{1}{Lna} u + C = \frac{1}{Lna} a^x + C$$

جواب سوال ۱۰-ج) فرض کنید $u = Ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(Ln(x)) + x \sin(x)}{x} dx &= \int \frac{\cos(Ln(x))}{x} dx + \int \sin(x) dx \\ &= \int \cos(u) du + \int \sin(x) dx \\ &= \sin(u) - \cos(x) + C \\ &= \sin(Ln(x)) - \cos(x) + C \end{aligned}$$

جواب سوال ۱۰-د-۱۱-۱۲-۱۳) به جزوه درسی مراجعه کنید.