جزوه درسی ریاضی عمومی (۲)

علوم پایه، فنی و مهندسی

ترجمه و تدوین: جعفر اوج بگ

http://ojbag.sub.ir

سخنی با خواننده

بر تمام اساتید و دانشجویان پوشیده نیست که درس ریاضی ۲ دارای حجم بسیار زیاد و مطالب به هم پیوسته ای است که عدم مطالعه بخشی از آن، به معنای از دست دادن همه مطالب بعد از آن موضوع می باشد. از طرفی زمان در نظر گرفته شده کفاف بیان تمام مطالب را نمی دهد، لذا وجود یک جزوه خلاصه و به دور از پیچیدگی های بیانی و اثبات مطالب می تواند بسیار مفید و راهگشا باشد. جزوه حاضر به هیچ عنوان کامل نیست ولی در نوع خود می تواند مفید باشد. اگرچه فهم دقیق مطالب وقت زیاد و تلاش بی وقفه دانشجو را می طلبد اما در مرحله اول مطالعه بیان کلی مساله و آشنایی با شیوه های حل مساله خالی از لطف نیست. نگارش اخیر از ۷ فصل تشکیل شده است که تقریباً سرفصل های وزارت علوم را می پوشاند. در آینده انتگرال سه گانه و مباحثی دیگر از آنالیز برداری نیز به آن اضافه خواهد شد.

در اینجا سعی شده که ضمن دسته بندی دقیق موضوعات و بیان مثال ها در حد نیاز از اثبات های طولانی پرهیز شود. دانشجو بایستی ضمن مطالعه جزوه همواره اثبات دقیق مطالب را از منابع موجود پیگیری نماید و آموخته های خود را بر مبنای اثبات های دقیق و روشمند بنا سازد، چرا که نگارنده معتقد است عدم درگیری با مسایل به معنای عدم یادگیری است.

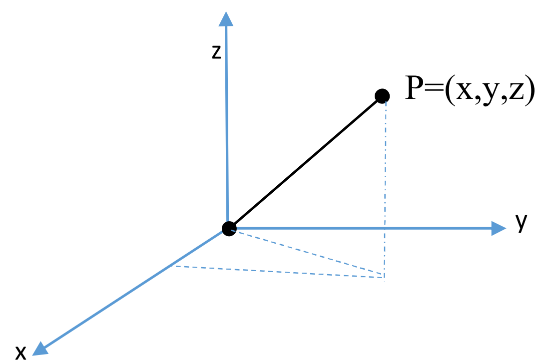
در این جزوه از منابع متعددی استفاده شده است: کتاب های حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس، لیتهولد، پیسکونوف، سیلورمن و منابع فارسی متعددی که به رشته تحریر در آمده اند. ذکر این نکته مهم است که مثال های بیان شده از برجسته ترین مثال هایی است که در اکثر منابع به نوعی بیان شده اند و پاسخ آن ها مناسب ترین و در عین حال ساده ترین راه حل ارایه شده است.

جعفر اوج بگ

بهار ۱۳۹۳ ه.ش، بوکان

فصل اول: بردارها در صفحه و فضا

یک راه استفاده از سه عدد برای جایابی نقطه این است که آنها را نمایش فاصله های علامتدار از مبداء در نظر بگیریم که در جهت سه خط دو به دو متعامد مار بر مبداء سنجیده می‌شوند. یک چنین مجموع از خطوط را یک دستگاه مختصات دکارتی و هر یک از خطوط را یک محور مختصات می‌نامیم. معمولاً این محورها را محور x، محور y و محور z می‌نامند . محورهای x و y را در صفحه افقی و محور z را قائم بر صفحه در نظر می‌گیریم.



فاصله P تا مبداء مساوی است با :

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

به همین ترتیب، فاصله r بین نقاط $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ مساوی است با

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال: فاصله نقطه $P\,(2,-1,7)$ را از نقطه $Q\,(1,-3,5)$ به دست می‌آوریم.

☯ **حل :** با توجه به رابطه فوق داریم،

$$|PQ|=\sqrt{(1-2)^3+(-3+1)^2+(5-7)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

تمرینات:

در تمرین‌های ۱ تا ۴ فاصله بین جفت نقاط را بیابید.

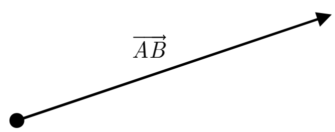
۱. $(0,0,0)$ و $(2,-1,-2)$

۲. $(-1,-1,-1)$ و $(1,1,1)$

۳. $(1,1,0)$ و $(0,2,-2)$

۴. $(3,8,-1)$ و $(-2,3,-6)$

بردار کمیتی است که هم اندازه و هم جهت دارد. مثلاً، سرعت یک جسم متحرک مستلزم تندی آن و جهت حرکت می‌باشد، لذا سرعت یک بردار است. به طور هندسی این کمیت را با پیکان (پاره‌خط‌های جهت‌دار) نشان می‌دهند. به عنوان نمونه، بردار $\overrightarrow{AB}$ یک پیکان است که ابتدای آن در نقطه A و انتهای آن در نقطه B است .



بردارهای پایه متعارف در صفحه عبارتند از: بردار $\mathbf{i}$ از مبداء به نقطه $(1,0)$، بردار $\mathbf{j}$ از مبداء به نقطه $(0,1)$.

توجه . اغلب بردار $\mathbf{r}$ که از مبداء تا نقطه (x,y) دارای مولفه‌های x و y است را می‌توان به صورت زیر نوشت .

$$\mathbf{r} = \langle x, y\rangle = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

بردارها در فضای سه بعدی : هر بردار در فضا به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{r} = \left\langle x, y, z\right\rangle = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

بردارهای پایه متعارف در فضا. اگر یک دستگاه مختصات دکارتی در فضای سه بعدی داشته باشیم، بردارهای پایه متعارف $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ با پیکان‌هایی از مبداء تا نقاط $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ نموده می‌شوند

گوییم $\mathbf{r}$ دارای مولفه‌های x، y و z است. طول $\mathbf{r}$ مساوی است با

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

هرگاه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضای سه بعدی باشند، آنگاه بردار $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ از P_1 تا P_2 دارای مولفه‌های $x_2 - x_1$ ، $y_2 - y_1$ و $z_2 - z_1$ است، لذا بر حسب بردارهای پایه متعارف به صورت زیر نموده می‌شود :

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

مثال: چند عملیات برداری. اگر $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ باشند، حاصل $\mathbf{u} + \mathbf{v}$، $\mathbf{u} - \mathbf{v}$، $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ ، $|\mathbf{u}|$ ، $|\mathbf{v}|$ و بردار یکه $\hat{\mathbf{u}}$ در جهت $\mathbf{u}$ را می‌یابیم.

☯ **حل :** داریم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2+3)\mathbf{i} + (1-2)\mathbf{j} + (-2-1)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2-3)\mathbf{i} + (1+2)\mathbf{j} + (-6+2)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (6-6)\mathbf{i} + (3+4)\mathbf{j} + (-6+2)\mathbf{k} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14},$$
$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{|\mathbf{u}|}\right)\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

مثال. اگر $A=(2,-1)$ ، $B=(-1,3)$ و $C=(0,1)$ باشند، هر یک از بردارهای زیر را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه متعارف بیان می‌کنیم.

۱. $\overrightarrow{AB}$ ۲. $\overrightarrow{BC}$ ۳. $\overrightarrow{AC}$ ۴. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 5. $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{CB}$ 6. یک بردار یکه در جهت $\overrightarrow{AB}$

حل : داریم :

۱. $\overrightarrow{AB}=(-1-2)\mathbf{i}+(3-(-1))\mathbf{j}=-3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

۲. $\overrightarrow{BC}=(0-(-1))\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

۳. $\overrightarrow{AC}=(0-2)\mathbf{i}+(1-(-1))\mathbf{j}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

۴. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

۵. $2AC-3CB=2(-2\mathbf{i}+2\mathbf{j})-3(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

۶. یک بردار یکه درجهت $\overrightarrow{AB}$ مساوی است با $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\dfrac{3}{5}\mathbf{i}+\dfrac{4}{5}\mathbf{j}$

جهت بردار: بردار واحدی است که هم جهت با بردار $\vec{A}\neq 0$ می باشد و به صورت $\vec{U}=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$بیان می شود.

ضرب داخلی بر حسب زاویه بین دو بردار: هرگاه θ زاویه بین دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ باشد، آنگاه

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

یافتن زاویه بین دو بردار. زاویه θ بین بردارهای $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را می‌یابیم.

حل : با حل فرمول $\mathbf{u}.\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ نسبت به θ، به دست می‌آوریم :

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}=\cos^{-1}\left(\frac{(2)(3)+(1)(-2)+(-2)(-1)}{3\sqrt{14}}\right)=\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{14}}=57.69^\circ$$

مثال: زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ را می‌یابیم.

حل : چون،

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+2^2+(0)^2}=3 \quad , \quad |\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{38}.$$

از طرف دیگر،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=2(5)+2(-3)+(-1)(2)=2.$$

پس داریم ،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}\,.$$

بنابراین زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عبارت است از،

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \simeq 1.46 \;\;(84^\circ)\,.$$

ویژگی های ضرب داخلی:

$(1)\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
$(2)\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$
$(3)\vec{A}.\vec{A} = \mid \vec{A} \mid^2$
$(4)\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$
$(5)\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$
$(6)\vec{A} \neq 0, \vec{B} \neq 0, \vec{A}.\vec{B} = 0 \text{ then } \vec{A} \perp \vec{B}$

مثال: نشان می‌دهیم که مثلث با رأس‌های $A=(1,-1,2)$ ، $B=(3,3,8)$ و $C=(2,0,1)$ یک مثلث قائم‌الزاویه است.

حل : ابتدا طول سه ضلع مثلث را حساب می‌کنیم :

$$a = |BC| = \sqrt{(2-3)^2+(0-3)^2+(1-8)^2} = \sqrt{59}$$
$$b = |AC| = \sqrt{(2-1)^2+(0+1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{3}$$
$$c = |AB| = \sqrt{(3-1)^2+(3+1)^2+(8-2)^2} = \sqrt{56}$$

طبق قانون کسینوس‌ها داریم $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ در این حالت $a^2 = 59 = 3+56 = b^2+c^2$ ، در نتیجه $2bc\cos A$ باید 0 باشد. بنابراین، $\cos A = 0$ و لذا $A = 90^\circ$، پس مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین: با استفاده از بردارها نشان دهید که مثلث به رأس‌های $(-1,1)$، $(2,5)$و $(10,-1)$ یک قائم‌الزاویه است.

کسینوس‌های هادی. اگر بردار A در $\mathbb{R}^3$ با محورهای مختصات زوایای α، β و γ بسازد، آنگاه

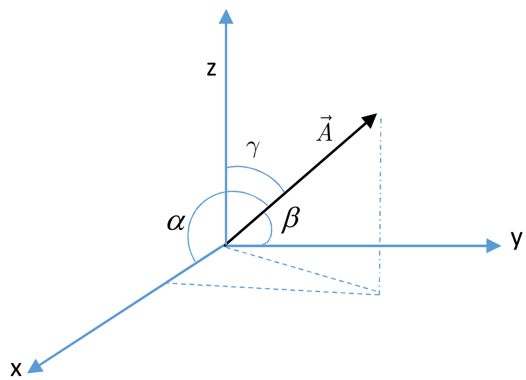
$$\hat{\mathrm{A}} = \cos\alpha \mathrm{i} + \cos\beta \mathrm{j} + \cos\gamma \mathrm{k}$$

یک بردار یکه در جهت A است؛ در نتیجه

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

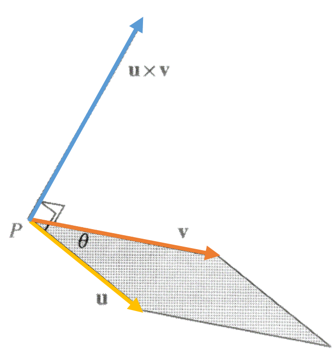
اعداد $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ کسینوس‌های هادی A نام دارند.

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{A}.\vec{i}}{|\vec{A}|.|\vec{i}|}=\frac{a_1}{|\vec{A}|}$$
$$\cos(\beta)=\frac{\vec{A}.\vec{j}}{|\vec{A}|.|\vec{j}|}=\frac{a_2}{|\vec{A}|}$$
$$\cos(\gamma)=\frac{\vec{A}.\vec{k}}{|\vec{A}|.|\vec{k}|}=\frac{a_3}{|\vec{A}|}$$
$$\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=\frac{a_1^2}{|\vec{A}|^2}+\frac{a_2^2}{|\vec{A}|^2}+\frac{a_3^2}{|\vec{A}|^2}=\frac{|\vec{A}|^2}{|\vec{A}|^2}=1$$



ضرب خارجی دو بردار در $\mathbb{R}^3$: به ازای هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در $\mathbb{R}^3$، حاصل ضرب خارجی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بردار منحصر به فردی است که در سه شرط صدق می‌کند :

1. $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{u}=0$ و $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{v}=0$
2. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$، که در آن θ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است
3. $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ یک سه‌وجهی راست دست تشکیل می‌دهند.



شکل ۱. بردار $\mathrm{u}\times\mathrm{v}$ بر هر دوی u و v عمود است و طولی مساوی مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌دار دارد

مولفه‌های حاصل‌ضرب خارجی: هرگاه $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$، آنگاه

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{k}$$

مثال: ضرب خارجی بردارهای متعارف و دو بردار بر اساس آنها را نشان می‌دهیم.

حل:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

$$(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})\times(2\mathbf{j}+5\mathbf{k})=\Big[(1)(5)-(-2)(-3)\Big]\mathbf{i}+\Big[(-3)(0)-(2)(5)\Big]\mathbf{j}+\Big[(2)(-2)-(1)(0)\Big]\mathbf{k}=\text{-i}-10\text{j - }4\text{k}$$

دترمینان‌ها برای ساده‌کردن بعضی فرمول‌ها مانند نمایش مولفه‌ای حاصل‌ضرب خارجی، دترمینان‌های 2×2 و 3×3 را معرفی می‌کنیم.در این بخش تا اندازه‌ای از خاصیت‌های دترمینان‌ها ذکر می‌کنیم تا بتوان از آنها در بعضی فرمول-های پیچیده استفاده کرد. دترمینان عبارتی است مرکب از عناصری از یک آرایه مربعی (ماتریس)از اعداد.

دترمینان 2×2. آرایه از اعداد $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را با گذاردن آرایه بین دو خط قائم به جای پرانتز نشان می‌دهیم، مقدارش هم عدد $ad-bc$ می‌باشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

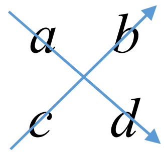
این حاصل‌ضرب عناصر در قطر رو به پایین آرایه منهای حاصل‌ضرب عناصر در قطر رو به بالا مانند، شکل های زیر است. به عنوان مثال،

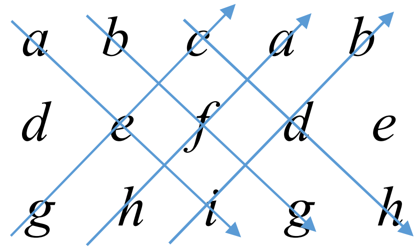
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4)-(2)(3)=-2$$

به همین ترتیب، دترمینان یک آرایه 3×3 از اعداد به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+bfg+cdh-gec-hfa-idb$$

ملاحظه می‌کنید که هر یک از شش حاصل‌ضرب در مقدار دترمینان درست شامل یک عنصر از هر سطر و درست یک عنصر از هر ستون درایه است. لذا، هر جمله حاصل‌ضرب عناصر در یک قطر از آرایه وسعت یافته حاصل از تکرار دو ستون اول آرایه در سمت راست ستون سوم مانند شکل راست زیر می‌باشد.





توجه. این روش برای دترمینان‌های 4×4 یا مرتبه بالاتر کارایی ندارد.

مقدار دترمینان مجموع حاصل‌ضرب‌های نظیر سه قطر رو به پایین منهای مجموع نظیر سه قطر رو به بالا می‌باشد. با تمرین می‌توانید این حاصل‌ضرب‌های قطری را بدون نوشتن آرایه وسعت یافته تشکیل دهید.

بسط دترمینان. اگر جملات بسط دترمینان را با فاکتورگیری از عناصر سطر اول دسته‌بندی کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

دترمینان‌های 2×2 ظاهر شده در این‌جا (به نام مینورهای دترمینان 3×3 داده شده) از حذف سطر و ستون حاوی عنصر نظیر از دترمینان 3×3 اصلی به دست می‌آید. این فرآیند، بسط دترمیان 3×3 بر حسب مینورها نسبت به سطر اول نام دارد.

این بسطها بر حسب مینورها را می‌توان نسبت به هر سطر یا ستون انجام داد. توجه کنید که در هر جمله که مینور آن از حذف سطر iم و ستون jم به دست می‌آید و $i+j$ عددی فرد است علامت منها ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، دترمینان فوق را می‌توان بر حسب مینورها و نسبت به ستون دوم به قرار زیر بسط داد :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = -bdi+bfg+eai-ecg-haf+hcd$$

البته این همان مقداری است که قبلا" به دست آمد.

مثال: محاسبه دترمینان. یک دترمینان 3×3 را محاسبه می‌کنیم.

حل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3(-8)+1=25$$

ما نسبت به سطر دوم بسط داده‌ایم، زیرا وجود یک درایه صفر محاسبات را ساده تر می کند.

حاصل‌ضرب خارجی به عنوان دترمینان عناصر یک دترمینان معمولاً عددند زیرا باید در هم ضرب شوند تا مقدار دترمینان را به دست دهند. اما از بردارها می‌توان به عنوان عناصر یک سطر (یا ستون) یک دترمینان استفاده کرد. وقتی بر حسب مینورها نسبت به آن سطر (یا ستون) بسط می‌دهیم، مینور هر عنصر بردار عددی است که مضرب اسکالر آن بردار را معین می‌سازد. فرمول حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ در $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ مذکور در بالا را می‌توان به طور علامتی به صورت یک دترمینان با بردارهای پایه متعارف به عنوان عناصر سطر اول بیان داشت :

$$\mathrm{u}\times\mathrm{v}=\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\mathrm{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\mathrm{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\mathrm{k}$$

فرمول حاصل‌ضرب خارجی مذکور در بالا همان بسط این دترمینان بر حسب مینورها نسبت به سطر اول است.

مثال: مساحت مثلث با رئوس $A(1,4,6)$، $B(-2,5,-1)$ و $C(1,-1,1)$ را به دست می‌آوریم.

حل : ابتدا بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل می‌دهیم :

$$\overrightarrow{AB}=\langle -3,1,-7\rangle \quad , \quad \overrightarrow{AC}=\langle 0,-5,-5\rangle .$$

با محاسبه ضرب خارجی ،

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & 1 & -7\\ 0 & -5 & -5\end{vmatrix}=\left(-5-35\right)\mathbf{i}-\left(15-0\right)\mathbf{j}+\left(15-0\right)\mathbf{k}=-40\mathbf{i}-15\mathbf{j}+15\mathbf{k}.$$

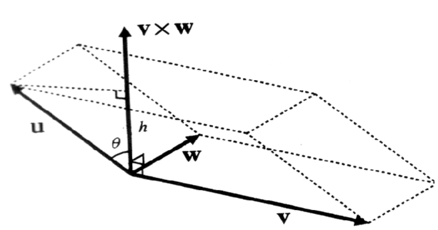
چون مساحت مثلث ABC نصف مساحت متساوی‌الاضلاع تشکیل شده از $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ می‌باشد. در نتیجه داریم ،

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2+(-15)^2+15^2}=\frac{5\sqrt{82}}{2}.$$

ضرب مختلط سه بردار: کمیت $\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ را حاصل‌ضرب سه‌گانه اسکالر بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ می‌نامند. بردار $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ را یک حاصل‌ضرب سه‌گانه برداری می‌نامیم.

اکنون حجم متوازی‌السطوح تولید شده به وسیله $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را می‌یابیم. حجم متوازی‌السطوح مساوی مساحت یکی از وجوه آن ضرب در ارتفاع متوازی‌السطوح که در جهت عمود بر آن وجه سنجیده می‌شود. مثلاً وجه تولید شده به وسیله $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$، مساحت این وجه مساوی $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$ است. چون $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ بر این وجه عمود است، ارتفاع h متوازی‌السطوح قدرمطلق تصویر اسکالر $\mathbf{u}$ در امتداد $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ است. هرگاه θ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ باشد، آنگاه حجم متوازی‌السطوح مساوی است با

$$\left|\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\right|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}\times\mathbf{w}|\left|\cos\theta\right|$$



فصل دوم: معادلات خط و صفحه در فضا

خطوط در فضای سه‌بعدی: فرض کنید $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ بردار وضعیت نقطه P_0 و $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ یک بردار ناصفر باشد. یک خط منحصر به فرد مار بر P_0 و موازی $\mathbf{v}$ وجود دارد. هرگاه $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار وضعیت نقطه دیگر P روی خط باشد، آنگاه $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ در امتداد خط قرار دارد و لذا با $\mathbf{v}$ موازی است(شکل۲-۱)، لذا به ازای عددی حقیقی مانند t، $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. این معادله که معمولا" به شکل

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

نوشته می‌شود، معادله پارامتری برداری خط مستقیم نام دارد جمیع نقاط روی خط را می‌توان با تغییر t از $-\infty$ تا ∞ به دست آورد. بردار $\mathbf{v}$ را یک بردار هادی خط می‌نامند. اگر معادلات پارامتری برداری را به مولفه‌هایش تقسیم کنیم، معادلات پارامتری اسکالر خط به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad , (-\infty < t < \infty)$$

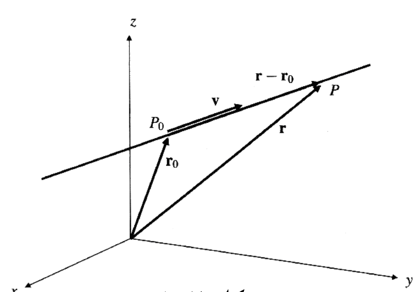
ظاهراً اینها سه معادله خطی‌اند، ولی می‌توان با حذف پارامتر t به دو معادله خطی از x، y و z رسید. هرگاه $a \neq 0$، $b \neq 0$ و $c \neq 0$؛ آنگاه می‌توان هر یک از معادلات اسکالر را نسبت به t حل کرد و به دست آورد،

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

که شکل دکارتی معادلات خط مستقیم مار بر (x_0, y_0, z_0) و موازی $\mathbf{v}$ است. اگر یکی از مولفه‌های $\mathbf{v}$ صفر شود، شکل متعارف باید تعدیل گردد. برای نمونه اگر $c = 0$، معادلات خواهند شد :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0$$

توجه. هیچ یک از معادلات فوق برای خطوط مستقیم منحصر به فرد نیستند، هر یک تابع انتخاب خاص نقطه (x_0, y_0, z_0) روی خط است. به طور کلی، همواره می‌توانید از معادلات دو صفحه غیرموازی برای نمایش فصل مشترک آنها استفاده کنید.



شکل ۲-۱

مثال: خط مستقیم مار بر $(1,-2,3)$ عمود بر صفحه $x-2y+4z=5$ موازی بردار قائم $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ صفحه است. لذا خط دارای معادله پارامتری برداری

$$\mathrm{r}=\mathrm{i}-2\mathrm{j}+3\mathrm{k}+t(\mathrm{i}-2\mathrm{j}+4\mathrm{k})$$

یا معادلات پارامتری اسکالر زیر است.

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=3+4t \end{cases}$$

شکل متعارف معادلات نیز چنین است،

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{4}$$

فاصله نقطه تا خط : فاصله نقطه P_0 تا خط مستقیم L مار بر P_1 و موازی بردار ناصفر $\mathbf{v}$ برابر است با:

$$s=\frac{\left|(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|}$$

مثال: فاصله $(2,0,-3)$ تا خط $\mathbf{r}=\mathbf{i}+(1+3t)\mathbf{j}-(3-4t)\mathbf{k}$ پیدا می‌کنیم.

خط $\mathbf{r}=\mathbf{i}+(1+3t)\mathbf{j}-(3-4t)\mathbf{k}$ از $P_1=(1,1,-3)$ گذشته و موازی $\mathbf{v}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ است. فاصله $P_0=(2,0,-3)$ تا این خط مساوی است با

$$\begin{aligned} s&=\frac{\left|\left((2-1)\mathbf{i}+(0-1)\mathbf{j}+(-3+3)\mathbf{k}\right)\times(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ &=\frac{\left|(\mathbf{i}-\mathbf{j})\times(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\right|}{5}=\frac{\left|-4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+3\mathbf{k}\right|}{5}=\frac{\sqrt{41}}{5} \end{aligned}$$

تمرین: فاصله بین دو خط دلخواه را بیابید؟

صفحات در فضای سه‌بعدی: صفحه با بردار قائم ناصفر $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ و مار بر نقطه $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ با بردار موضع $\mathbf{r}_0$ دارای معادله به شکل برداری زیر است.

$$\mathbf{n}.(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$$

به طور معادل شکل اسکالر آن عبارت است از

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

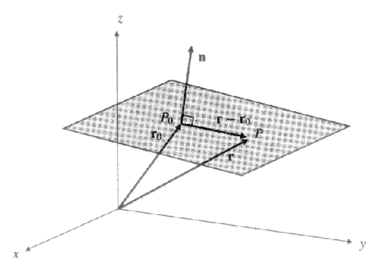
شکل اسکالر را می‌توان به صورت شکل متعارف ساده‌تر نوشت،

$$Ax + By + Cz = D$$

که در آن $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

هرگاه دست‌کم یکی از ثابت‌های A، B و C صفر نباشد، آنگاه معادله خط $Ax + By + Cz = D$ همواره نمایش یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ است. به عنوان نمونه، اگر $A \neq 0$، نمایش صفحه مار بر نقطه $(D/A, 0, 0)$ با بردار قائم $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ است.

توجه. بردار قائم به یک صفحه را همیشه می‌توان از ضرایب x، y و z در معادله معین کرد. هرگاه جمله ثابت D صفر باشد، آنگاه صفحه باید از مبداء بگذرد.



مثال : صفحه مار بر نقطه $(2,0,1)$ و عمود بر خط مستقیم مار بر نقاط $(1,1,0)$ و $(4,-1,-2)$ دارای بردار قائم

$$\mathbf{n} = (4-1)\mathbf{i} + (-1-1)\mathbf{j} + (-2-0)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

است. بنابراین، معادله‌اش چنین است،

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0$$

یا به طور ساده‌تر، $3x - 2y - 2z = 4$ می‌باشد.

مثال: معادله صفحه مار بر سه نقطه $P = (1,1,0)$، $Q(0,2,1)$ و $R = (3,2,-1)$ را می‌یابیم.

حل : لازم است بردار $\mathbf{n}$ عمود به صفحه را بیابیم. چنین برداری بر بردارهای $\overrightarrow{PQ} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\overrightarrow{PR} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ عمود است. بنابراین، می‌توان از بردار زیر استفاده کرد.

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

اکنون از این بردار قائم همراه با مختصات یکی از سه نقطه داده شده استفاده می‌کنیم و معادله صفحه را می‌نویسیم. با استفاده از نقطه P معادله خواهد بود

$$-2(x-1) + 1(y-1) - 3(z-0) = 0$$

یا $2x - y + 3z = 1$.

فصل سوم: مبانی جبرخطی

جبر خطی می‌تواند برای بیان بعضی از مفاهیم در حساب دیفرانسیل چند متغیره بسیار مفید باشد. مطالعه کامل جبر خطی در این کتاب لازم نیست. اما گهگاه به اهمیت موضوع مورد بحث از دیدگاه جبرخطی نیاز داریم. برای این کار مقداری اصطلاح و مطلب از جبرخطی، به خصوص آنهایی که به محاسبات ماتریسی و دستگاه‌های معادلات خطی مربوط هستند، را بیان می‌کنیم.

معرفی ماتریس‌ها یک ماتریس $m\times n$ مانند A آرایه‌ای است مستطیلی از mn عدد که در m سطر و n ستون آرایش یافته‌اند. هرگاه a_{ij} عنصر واقع در سطر iام و ستون jام باشد، آنگاه

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

گاهی به اختصار می‌نویسیم $A=(a_{ij})$. در این حالت i از 1 تا m و j از 1 تا n را به خود می‌گیرد. اگر $m=n$، گوییم A یک ماتریس مربعی است.

ترانهاده ماتریس $m\times n$، A، ماتریس $n\times m$، A^T است که سطرهایش ستون‌های ماتریس A می‌باشند، یعنی :

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ماتریس A را متقارن نامیم اگر $A^T=A$. ماترس A پادمتقارن نامیده می‌شوند هرگاه $A^T=A$ عناصر روی قطر ماتریس پادمتقارن لزوماً باید صفر باشند. ماتریس‌های متقارن و پادمتقارن لزوماً باید مربعی باشند. ملاحظه می‌کنید که به ازای هر ماتریس A، $(A^T)^T=A$.

بردار های ستونی و سطری. اغلب می‌خواهیم بردار n بعدی $\mathbf{x}$ را یک ماتریس $n\times 1$ با n سطر و یک ستون در نظر بگیریم

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

چنین $\mathbf{x}$ی را یک بردار ستونی می‌نامیم. در این صورت $\mathbf{x}^T$ دارای یک سطر و n ستون است و یک بردار سطری نام دارد،

$$\mathbf{x}^T=(x_1\ \ x_2 \cdots\ x_n)$$

توجه کنید که $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^T$ مولفه‌های یکسان دارند؛ لذا به عنوان بردار یکسان‌اند حتی اگر به صورت ماتریس‌های متفاوتی ظاهر می‌شوند.

ضرب ماتریس‌ها. بخش زیادی از سودمندی ماتریس‌ها به تعریف زیر از ضرب ماتریسی وابسته است، که به ما توان ترکیب دو آرایه و تبدیل به یک آرایه را به نحوی می‌دهد که روابط خطی حفظ می‌شوند.

ضرب ماتریس‌ها : هرگاه $A=(a_{ij})$ یک ماتریس $m\times n$ و $B=(b_{ij})$ یک ماتریس $n\times p$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب AB یک ماتریس $m\times p$، $C=(c_{ij})$ است که عناصرش به صورت زیرند.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\,,\qquad i=1,\dots,m\ ,\ j=1,\dots,p$$

یعنی c_{ij} حاصل‌ضرب نقطه‌ای سطر iم A و ستون jم B (که هر دو بردارهای nبعدی‌اند) می‌باشد.

توجه کنید که فقط بعضی از جفت ماتریس‌ها را می‌توان در هم ضرب کرد. حاصل‌ضرب AB فقط وقتی تعریف شده است که تعداد ستون‌های A مساوی تعداد سطرهای B باشد.

مثال: ضرب دو ماتریس

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&0\\0&-1&3&1\\1&0&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&13&15\\3&1&1&-4\end{pmatrix}$$

عامل چپ دارای 2 سطر و 3 ستون است و عامل راست دارای 3 سطر و 4 ستون می‌باشد. لذا، حاصل‌ضرب دارای 2 سطر و 4 ستون می‌باشد. عنصر سطر اول و ستون سوم حاصل‌ضرب، یعنی 13، حاصل‌ضرب نقطه‌ای سطر اول، یعنی $(1,0,3)$، عامل چپ در ستون اول، یعنی $(1,3,4)$، عامل دوم می‌باشد،

$$1\times1+0\times3+3\times4=13$$

با کمی تمرین به آسانی می‌توانید عنصرهای ماتریس حاصل‌ضرب را این طور حساب کنید که انگشت اشاره دست چپ خود را در امتداد سطرهای عامل چپ و انگشت اشاره دست راست خود را از بالا به پایین روی ستون‌های عامل راست همزمان حرکت دهید و حاصل‌ضرب‌های نقطه‌ای را محاسبه کنید.

مثال: حاصل‌ضرب یک ماتریس 3×3 در یک بردار سه بعدی ستونی یک بردار سه بعدی ستونی است.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\-2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\y-z\\-2x+3y\end{pmatrix}$$

ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است، یعنی

$$A(BC)=(AB)C$$

(مشروط بر اینکه A، B و C ابعادی سازگار با حاصل‌ضرب‌های مختلف داشته باشند). بنابراین، نوشتن ABC معنی دارد. اما ضرب ماتریسی تعویض‌پذیر نیست. در واقع، هرگاه A یک ماتریس $m\times n$ و B یک ماتریس $n\times p$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب AB تعریف شده است ولی حاصل‌ضرب BA تعریف نشده است مگر $m=p$. حتی اگر A و B ماتریس‌های مربعی با یک اندازه باشند، لزوماً $AB=BA$ برقرار نیست.

مثال: نمایش تعویض ناپذیری ضرب دو ماتریس.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\3&-3\end{pmatrix}$$

در حالی که
$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\4&2\end{pmatrix}$$

توجه. می‌توانید تحقیق کنید که، اگر حاصل‌ضرب AB تعریف شده باشد، ترانهاده حاصل‌ضرب مساوی حاصل‌ضرب ترانهاده‌ها $(AB)^T=B^TA^T$، به عبارت دیگر ترتیب ضرب عکس می‌شود.

دترمینان‌ها و معکوس‌های ماتریس‌ها در فصل اول دترمینان‌های 2×2 و 3×3 را به صورت عبارات جبری مربوط به آرایه‌های مربعی 2×2 و 3×3 از اعداد معرفی کردیم. به طور کلی، می‌توان دترمینان $\det(A)$ را برای یک ماتریس مربعی تعریف کرد. برای ماتریس $n\times n$، A ادامه می‌دهیم و می‌نویسیم،

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

مثال: یک دترمینان 4×4،

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2&1&0&1\\1&0&1&1\\3&0&0&2\\-1&1&1&0\end{vmatrix}&=-\begin{vmatrix}1&1&1\\3&0&2\\-1&1&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}\\&=-\left(-3\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}\right)-\left(-1\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}\right)\\&=3(0-1)+2(1+2)-1(4-3)=2\end{aligned}$$

را بر حسب مینورها حول ستون دوم (صفر بیشتر دارد) بسط داده‌ایم و دو دترمینان 3×3 به دست آورده‌ایم. سپس اولی نسبت به سطر دوم و دیگری نسبت به ستون دوم بسط داده شده است.

خاصیت های مهم دترمینان : هرگاه A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، آنگاه داریم :

۱. $\det\left(A^T\right)=\det(A)$

۲. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

ماتریس منفرد: ماتریس مربعی A منفرد است، اگر $\det(A)=0$. اگر $\det(A)\neq 0$، گوییم A نامنفرد یا معکوس‌پذیر است.

هرگاه A یک ماتریس 3×3 باشد، آنگاه $\det(A)$ حاصل‌ضرب سه‌گانه اسکالر سطرهای A است، و قدرمطلق آن حجم متوازی‌السطوح تولید شده به‌وسیله آن سطرها است. بنابراین A نامنفرد است اگر و فقط اگر سطرهایش یک متوازی-السطوح به حجم مثبت تولید نمایند؛ بردارهای سطری همه نمی‌توانند در صفحه واحدی قرار گیرند. همین نکته را می‌توان در مورد ستون‌های A بیان داشت.

استقلال و وابستگی خطی. به طور کلی، یک ماتریس $n\times n$ منفرد است اگر سطرها (یا ستون‌های) آن که به صورت بردار لحاظ شده‌اند در یک یا چند معادله خطی به شکل

$$c_1\mathrm{x}_1+c_2\mathrm{x}_2+\cdots+c_n\mathrm{x}_n=0$$

که دست کم یک ضریب ناصفر c_i دارد، صدق نمایند. یک مجموعه از بردارهای صادق در چنین معادله خطی را وابسته خطی نامند زیرا یکی از بردارها را همیشه می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سایرین بیان کرد؛ هرگاه $c_1\neq 0$، آنگاه

$$\mathrm{x}_1=-\frac{c_2}{c_1}\mathrm{x}_2-\frac{c_3}{c_1}\mathrm{x}_3-\cdots-\frac{c_n}{c_n}\mathrm{x}_n$$

همه ترکیبات خطی بردارها در یک مجموعه وابسته خطی از n بردار در $\mathbb{R}^n$ باید در زیر فضایی با بعد کمتر از n قرار داشته باشند.

ماتریس همانی $n\times n$ ماتریس

$$I=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

است که در هر موضع روی قطر اصلی" 1" و در هر موضع دیگر " 0" داریم. واضح است که I با هر ماتریس $n\times n$ تعویض می‌شود :

$$IA=AI=A$$

همچنین $\det(I)=1$. ماتریس همانی همان نقشی در جبر ماتریسی دارد که عدد 1 در حساب ایفا می‌کند. عدد ناصفر x دارای وارون x^{-1} است به طوری که $xx^{-1}=x^{-1}x=1$. برای ماتریس‌های مربعی وضعیت مشابهی برقرار است. معکوس ماتریس مربعی نامنفرد A ماتریس مربعی نامنفرد A^{-1} است که

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

دو خاصیت معکوس ماتریس: هر ماتریس مربعی نامنفرد A دارای معکوس منحصر به فرد A^{-1} است. به علاوه، معکوس در روابط زیر صدق می‌کند :

۱. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

۲. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

محاسبه معکوس‌ها زیاد مشکل نیست، ولی همان‌طور که مثال ساده زیر نشان می‌دهد، این کار را می‌توان با حل دستگاه‌های معادلات خطی انجام داد.

مثال: نشان می‌دهیم که ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ نامنفرد است و معکوس آن را می‌یابیم.

حل :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

بنابراین، A نامنفرد و معکوس‌پذیر است. فرض کنید $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ در این صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

در نتیجه a، b، c و d باید در دستگاه‌های معادلات زیر صدق کنند.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} b - d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

واضح است که $a = b = d = 1/2\ ,\ c = -1/2$، لذا

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی دستگاه از n معادله خطی از n مجهول :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی به طور فشرده نوشت :

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

که در آن

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

حال معادله $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ را با معادله $ax=b$ به ازای تنها مجهول x مقایسه کنید. معادله $ax=b$ دارای جواب منحصر به فرد $x=a^{-1}b$ است مشروط بر اینکه $a\neq 0$ باشد. بنابر تشابه،

دستگاه خطی $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ دارای جواب منحصر به فرد

$$\mathrm{x}=A^{-1}\mathrm{b}$$

است مشروط بر اینکه A نامنفرد باشد. برای مشاهده این امر، کافی است طرفین معادله $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم،

$$\mathrm{x}=I\mathrm{x}=A^{-1}A\mathrm{x}=A^{-1}\mathrm{b}$$

وجود و یکتایی جواب دستگاه. هرگاه A منفرد باشد، آنگاه دستگاه $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ ممکن است جواب داشته باشد یا نداشته باشد، حتی اگر جواب موجود باشد، ممکن است منحصر به فرد نباشد. حالت $\mathrm{b}=0$ (بردار صفر) را در نظر می‌گیریم، در این صورت هر بردار x عمود بر جمیع سطرهای A در دستگاه صدق می‌کند. چون سطرهای A در فضایی با بعد کمتر از n قرار دارند (زیرا $\det(A)=0$) دست‌کم یک خط از این بردارهای x وجود دارد. لذا، اگر A منفرد باشد، جواب‌های $A\mathrm{x}=0$ منحصر به فرد نیستند. همین امر باید برای دستگاه $A^T\mathrm{y}=0$ درست باشد؛ اگر A منفرد باشد، بردارهای ناصفر y صادق در آن وجود دارند. ولی در این صورت، اگر دستگاه $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ جواب x داشته باشد، باید داشته باشیم

$$(\mathrm{yb})=\mathrm{y}^T\mathrm{b}=\mathrm{y}^TA\mathrm{x}=(\mathrm{x}^TA^T\mathrm{y})^T=(\mathrm{x}^T0)^T=(0)$$

لذا، $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ فقط می‌تواند به ازای بردارهای bای جواب داشته باشد که به هر جواب y معادله $A^T\mathrm{y}=0$ عمود است.

دستگاه غیرمربعی. اگر $m<n$، دستگاه m معادله خطی از n مجهول ممکن است جواب داشته باشد یا نداشته باشد. اگر بعضی از $n-m$ معادله ترکیب خطی (مجموع مضاربی) از n معادله دیگر باشد، دستگاه جواب دارد. اگر $m>n$، می‌توان به حل m معادله نسبت به m متغیر پرداخت و جواب‌ها تابع $n-m$ متغیر دیگر می‌باشند. اگر دترمینان ضرایب m متغیر که می‌خواهیم نسبت به آنها حل کنیم صفر نباشد، یک چنین جواب وجود دارد.

مثال: دستگاه دو معادله سه مجهولی $\begin{cases} 2x+y-3z=4 \\ x+2y+6z=5 \end{cases}$ را نسبت به x و y و بر حسب z حل می‌کنیم.

حل : دستگاه را می‌توان به شکل $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3z\\5-6z\end{pmatrix}$ بیان کرد . که در آن $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ دارای دترمینان 3و معکوس آن $\begin{pmatrix}2/3&-1/3\\-1/3&2/3\end{pmatrix}=A^{-1}$ می‌باشد. بنابراین :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}4+3z\\5-6z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&-1/3\\-1/3&2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+3z\\5-6z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4z\\2-5z\end{pmatrix}$$

لذا جواب عبارت است از :

$$x=1+4z\ ,\ y=2-5z$$

روش کرامر برای حل دستگاه‌های خطی قضیه زیر از لحاظ نظری اهمیت داشته و جواب دستگاه $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ به ازای A نامنفرد را بر حسب دترمینان‌ها بیان می‌کند. فرض کنیم A یک ماتریس $n\times n$ نامنفرد باشد. در این صورت جواب x دستگاه $A\mathrm{x}=\mathrm{b}$ دارای مولفه‌های زیر است :

$$x_j=\frac{\det(A_j)}{\det\left(A\right)}\quad,\quad j=0,1,\dots,n$$

که در آن A_j ماتریس A است که در آن ستون jام با بردار ستونی b عوض شده است؛ یعنی

$$\det(A_j)=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1(j-1)}&b_1&a_{1(j+1)}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2(j-1)}&b_2&a_{2(j+1)}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n(j-1)}&b_n&a_{n(j+1)}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

مقادیر ویژه. گوییم λ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی $n\times n$، $A=(a_{ij})$ است اگر یک بردار ستونی ناصفر مانند x باشد به طوری که $A\mathrm{x}=\lambda\mathrm{x}$ یا، معادلا"

$$(A-\lambda I)\mathrm{x}=0$$

که در آن I ماتریس همانی $n\times n$ است. بردار ناصفر x یک بردار ویژه A نظیر مقدار ویژه λ نام دارد و فقط وقتی می‌تواند موجود باشد که $A-\lambda I$ یک ماتریس منفرد باشد؛ یعنی اگر

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

مقادیر ویژه A باید در این معادله چندجمله‌ای درجه n صدق کنند؛ در نتیجه می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند.

مثال: مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به دست آورید .

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

حل : با تشکیل چندجمله‌ای مشخصه،

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-9=0$$

و با حل آن $\lambda_1=3$ و $\lambda_2=-3$ به دست می‌آیند. اکنون برای تعیین بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=3$ داریم،

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

که با حل دستگاه،

$$-5x_1+x_2=0 \quad ، \quad 5x_1-x_2=0$$

بردار ویژه $\mathbf{x}_1=(1,5)^T$ به دست می‌آید به همین ترتیب $\mathbf{x}_2=(1,-1)^T$ به دست می‌آید .

مثال. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A=\begin{bmatrix}13 & -4\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}13-\lambda & -4\\ -4 & 7-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-20\lambda+75$$

$$\lambda^2-20\lambda+75=0\Rightarrow(\lambda-5)(\lambda-15)=0\Rightarrow\lambda_1=5,\qquad \lambda_2=15$$

$$\lambda_1=5\Rightarrow\det(A-5I)=\begin{vmatrix}13-5 & -4\\ -4 & 7-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}$$

$$(A-5I)V=0\Rightarrow\begin{bmatrix}8 & -4\\ -4 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}+8x_1-4x_2=0\\ -4x_1+2x_2=0\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق نتیجه میگیریم $x_1=1$ و $x_2=2$ و بردارهای ویژه‌ی مربوط به $\lambda_1=5$ به صورت کلی $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ است. به روش مشابه و به ازای $\lambda_2=15$ بردارهای ویژه برابر است با در پاسخهای بدست آمده a یک ثابت اختیاری است.

یک سخنران مشهور سمینارش را با در دست گرفتن بیست دلار اسکناس شروع کرد او پرسید چه کسی این بیست دلار را می خواهد؟ دست ها بالا رفت.او گفت:من این بیست دلار را به یکی از شما می دهم اما اول اجازه دهید کاری انجام دهم. او اسکناسها را مچاله کرد و پرسید چه کسی هنوز این ها را می خواهد؟ باز هم دست ها بالا بودند.او جواب داد خوب. اگر این کار را کنم چه؟ او پول ها را روی زمین انداخت و با کفشهایش آنها را لگد کرد بعد آنها را برداشت و گفت: مچاله و کثیف هستند حالا چه کسی آنها را می خواهد؟ بازهم دستها بالا بودند سپس گفت: هیچ اهمیتی ندارد که من با پولها چه کردم شما هنوز هم آن ها را می خواستید چون ارزشش کم نشد و هنوز هم بیست دلار می ارزید. اوقات زیادی ما در زندگی رها می شویم، مچاله می شویم و با تصمیم هایی که می گیریم و حوادثی که به سراغ ما می آیند آلوده می شویم . و ما فکر می کنیم که بی ارزش شده ایم اما هیچ اهمیتی ندارد که چه چیزی اتفاق افتاده یا چه چیزی اتفاق خواهد افتاد. شما هرگز ارزش خود را از دست نمی دهید. کثیف یا تمیز،مچاله یا چین دار شما هنوز برای کسانی که شما را دوست دارند بسیار ارزشمند هستید. ارزش ما در کاری که انجام می دهیم یا کسی که می شناسیم نمی آید ارزش ما در این جمله است که: ما که هستیم؟ هیچ وقت فراموش نکنید که شما استثنایی هستید

فصل چهارم: توابع برداری

تابع برداری تابعی است که از فضای R^n به فضای R^m تعریف می شود، به طوری که هر nتایی مرتب از زیرمجموعه ای مانند D (دامنه توابع) از R^n یک بردار از R^m مربوط می گردد.

هر تابع برداری مانند $r(t): R^n \to R^m \,(n=1,2,3)$ را به صورت های زیر نمایش می دهند:

$r(t)=(\mathrm{f}(t), g(t), \mathrm{h}(t))$

$r(t)=f(t)\vec{\mathrm{i}}+g(t)\vec{\mathrm{j}}+h(t)\vec{k}$

توابع برداری $\mathrm{f}(t), g(t), h(t)$ توابعی عددی هستند.

مثال: یک مارپیچ، تابع برداری

$$r(t)=(\cos t)i+(\sin t)j+tk$$

برای تمام مقادیر حقیقی t تعریف شده است.

دامنه تابع برداری : اشــتراک دامنه توابع مؤلفه‌ای متناظر، دامنه تابع برداری را تشــکیل می‌دهد. که به آســانی با تجربه‌های قبلی معین می‌شود.

مثال: دامنه تابع برداری زیر را می‌یابیم،

$$\mathbf{r}(t)=\left\langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\right\rangle$$

☯ **حل :** دامنه تابع برداری $\mathbf{r}$ شامل همه مقادیر $t\in\mathbb{R}$ می‌باشد که در آن مؤلفه‌های $f(t)=t^3$ ، $g(t)=\ln(3-t)$ و $h(t)=\sqrt{t}$ تعریف شده‌اند، یعنی،

$$D_{r(t)}=\overbrace{\mathbb{R}}\cap\overbrace{(-\infty,3)}\cap\overbrace{[0,+\infty)}=[0,3)$$

حد و پیوستگی توابع برداری: فرض کنید $r(t)=f(t)i+g(t)j+h(t)k$ یک تابع برداری و L یک بردار باشد. در این صورت هنگامی که t به t_0 نزدیک می‌شود می‌گوییم حد r برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=L$$

تابع برداری $r(t)$ در نقطه $t=t_0$ واقع در قلمروش پیوسته است اگر $\lim_{t\to t_0} r(t)=r(t_0)$ باشد و تابع هنگامی پیوسته است که در هر نقطه از قلمرو خود پیوسته باشد.

مثال: اگر $r(t)=(\cos t)i+(\sin t)+tk$ آن‌گاه

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} r(t)=(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t)i+(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t)j+(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t)k$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\pi}{4} k$$

مثال: تابع $r(t) = (\cos t) i + (\sin t) j + t$ پیوسته است زیرا $\sin t, \cos t$ و t پیوسته‌اند.

مشتق توابع برداری: تابع برداری $r(t) = f(t) i + g(t) j + h(t) k$ در نقطه $t = t_0$ مشتق‌پذیر است اگر g, f و h در t_0 مشتق‌پذیر باشند. همچنین r را مشتق‌پذیر می‌گوییم اگر در هر نقطه از قلمرو خود مشتق‌پذیر باشد. نقطه‌ای که r در آن مشتق‌پذیر باشد، مشتقش به صورت زیر است :

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\left(t + \Delta t\right) - r\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{df}{dt} i + \frac{dg}{dt} j + \frac{dh}{dt} k$$

بردار سرعت و شتاب یک متحرک: اگر r موقعیت ذره‌ای باشد که در طول منحنی هموار در فضا حرکت می‌کند، آن‌گاه سرعت در لحظه t یعنی $V(t)$ خواهد بود

$$V(t) = \frac{dr}{dt}$$

بردار سرعت، مماس بر منحنی است. برای هر لحظه از t جهت V جهت حرکت و اندازه تندی ذره و مشتق سرعت یعنی $a = \frac{dV}{dt}$ اگر موجود باشد، بردار شتاب ذره است.

بردار $T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|}$ را بردار مماس یکه(واحد) و بردار $\vec{N}(t) = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$ را بردار قایم یکه(واحد) می نامند.

مثال: منحنی $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. بردارهای سرعت و شتاب این منحنی را در نقطه $(1,1,1)$ پیدا می‌کنیم.

حل : بردارهای سرعت و شتاب در هر لحظه t عبارتند از :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \qquad , \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

نقطه $(1,1,1)$ روی منحنی نظیر $t = 1$ است، در نتیجه سرعت و شتاب در این نقطه به ترتیب عبارتند از $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{a} = 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

مثال: بردار یکه مماسی مارپیچ زیر را به دست آورید.

$$r(t) = (\cos t) i + (\sin t) j + tk$$

حل :

$$V = (-\sin t) i + (\cos t) j + k$$

$$|V| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$T = \frac{V}{|V|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} i + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} j + \frac{1}{\sqrt{2}} k$$

قوانین مشتق برای توابع برداری:

قانون تابع ثابت: $\frac{d}{dt}C = 0$ (برای هر بردار ثابت C)

اگر U و V توابع برداری مشتق‌پذیر از t باشند، آن‌گاه

قوانین ضرب اسکالر $\frac{d}{dt}(cu) = c\frac{du}{dt}$ (برای هر عدد c)

$\frac{d}{dt}(fu) = \frac{df}{dt}u + f\frac{du}{dt}$ (هر تابع مشتق‌پذیر اسکالر $f(t)$)

قانون جمع : $\frac{d}{dt}(u+V) = \frac{du}{dt} + \frac{dV}{dt}$

قانون تفاضل : $\frac{d}{dt}(u-V) = \frac{du}{dt} - \frac{dV}{dt}$

قانون ضرب داخلی : $\frac{d}{dt}(u.V) = \frac{du}{dt}.V + u.\frac{dV}{dt}$

قانون ضرب خارجی : $\frac{d}{dt}(u \times V) = \frac{du}{dt} \times V + u \times \frac{dV}{dt}$

قاعدع زنجیره‌ای: اگر r تابع مشتق‌پذیری از t و t تابع مشتق‌پذیری از s باشد، آن‌گاه $\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}$

انتگرال گیری از توابع برداری: انتگرال نامعین r نسبت به t مجموعه‌ای از تمامی پاد مشتقات r است که به صورت $\int r(t)\,dt$ نمایش داده می‌شود. اگر R یک پادمشتق از r باشد، آن‌گاه

$$\int r(t)\,dt = R(t) + C$$

قواعد معمول ریاضیات برای انتگرال‌های نامعین به کار می‌روند.

اگر مولفه‌های $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ روی فاصله $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند r نیز انتگرال‌پذیر است و انتگرال معین r از a تا b به صورت زیر است :

$$\int_a^b r(t)\,dt = (\int_a^b f(t)\,dt)i + (\int_a^b g(t)\,dt)j + (\int_a^b h(t)\,dt)k$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^\pi ((\cos t)i + j - 2tk)dt = (\int_0^\pi \cos t\,dt)i + (\int_0^\pi dt)j + (\int_0^\pi 2t\,dt)k$$

$$= [\sin t]_0^{\pi}\, i + [t]_0^{\pi}\, j - \left[t^2\right]_0^{\pi} k$$

$$= [0-0]\, i + [\pi - 0]\, j - \left[\pi^2 - 0^2\right] k$$

$$= \pi j - \pi^2 k$$

طول منحنی: طول یک منحنی هموار $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k, a \le t \le b$ که دقیقاً یکبار با افزایش t از $t = a$ به $t = b$ ترسیم می‌شود برابر است با :

$$L = \int_a^b \sqrt{(\frac{df}{dt})^2 + (\frac{dg}{dt})^2 + (\frac{dh}{dt})^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt$$

فرمول طول منحنی به شکل مختصر $L = \int_a^b |V|\, dt$ نیز قابل بیان است.

مثال: طول یک دور گردش مارپیچ زیر را بیابید.

$$r(t) = (\cos t)\, i + (\sin t)\, j + tk$$

حل : هنگامی که t از 0 تا 2π تغییر می‌کند مارپیچ یک دور کامل می‌سازد.

$$L = \int_a^b |V|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$برابر طول یک دور از دایره‌ای در صفحه xy است که مارپیچ بر روی آن قرار گرفته است.

انحناء یک منحنی:

$$k = \frac{|V \times a|}{|V|^3}$$

مثال: با استفاده از معادله فوق انحنای مارپیچ زیر را به دست آورید.

$$r(t) = (a\cos t)\, i + (a\sin t)\, j + btk \ , \ a,b \ge 0 \ , \ a^2 + b^2 \ne 0$$

حل : برای محاسبه ابتدا بردار مماس و شتاب را محاسبه می کنیم :

$$V = -(a\sin t)\, i + (a\cos t)\, j + bk$$

$$a = -(a\cos t)\, i - (a\sin t)\, j$$

$$V\times a=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & O\end{vmatrix}=\left(ab\sin t\right)i-\left(ab\cos t\right)j+a^2k$$

$$|\mathrm{V}\times\mathrm{a}|=\sqrt{(ab\sin t)^2+(ab\cos t)^2+(a^2)^2}=\sqrt{a^2b^2+a^4}=a\sqrt{b^2+a^2}$$

$$k=\frac{|V\times a|}{|V|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(\sqrt{a^2+b^2})^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

کار در کلاس: نشان دهید انحنای یک دایره به شعاع a برابر $\frac{1}{a}$ است.

فرمول های دیگر برای محاسبه انحنا:

- برای منحنی $y=f(x)$ که در صفحه تعریف شده، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- برای منحنی پارامتری $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ که در صفحه تعریف شده، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- برای منحنی $r=f(\theta)$ که در صفحه تعریف شده، از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$k(\theta)=\frac{|\mathrm{r}^2+2r'^2-\mathrm{rr}''|}{(\mathrm{r}^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تاب یک منحنی: فرض کنید $B=T\times N$ باشد. تابع تاب منحنی برای منحنی هموار برابر است با :

$$\tau=-\frac{dB}{ds}.N=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{\left|V\times a\right|^2}$$

بر خلاف انحنا k که هرگز منفی نمی‌شود، تاب τ ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.

مولفه‌های مماس و قایم شتاب :هنگامی که جسمی توسط جاذبه، پرتاب، احتراق موتور راکت و ... شتاب می‌گیرد معمولاً مایلیم بدانیم که شتاب در جهت مماس بر مسیر، یعنی T، چقدر است. می‌توان قاعده زنجیره‌ای را برای V به صورت زیر به کار برد.

$$V=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}=T\frac{ds}{dt}$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله داریم :

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(T\frac{ds}{dt})=\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}\frac{dT}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}(\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt})=\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}(kN\frac{ds}{dt})$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}T+k(\frac{ds}{dt})^2N$$

$a=a_T T+a_N N$ که در آن

$$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}|V| \text{ و } a_N=k(\frac{ds}{dt})^2=k|V|^2$$

مولفه‌های اسکالر قایم و مماسی شتاب هستند.

خلاصه فرمول های مهم :

بردار یکه مماسی : $T=\frac{V}{|V|}$

بردار قایم اصلی : $N=\frac{dT/dt}{|dT/dt|}$

قایم دوم : $B=T\times N$

انحنا : $k(\theta)=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad k(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad k(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad k=\left|\frac{dT}{dt}\right|=\frac{|V\times a|}{|V|^3}$

تاب : $\tau=-\frac{dB}{ds}.N=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{|V\times a|^2}$

مولفه‌های اسکالر : $a=a_T T+a_N N$

$$a_T=\frac{d}{dt}|V|$$

$$a_N=k|V|^2=\sqrt{|a|^2-a_T^2}$$

مثال: تاب خم $f(t)=(e^{-t}\cos(t))\vec{i}+(e^{-t}\sin(t))\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$ را در نقطه دلخواه $f(t)$ محاسبه کنید و نشان دهید که این خم مسطح نیست.

$$f'(t)=-e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))\vec{i}+e^{-t}(\cos(t)-\sin(t))\vec{j}-e^{-t}\vec{k}$$

$$f''(t)=2e^{-t}\sin(t)\vec{i}-2e^{-t}\cos(t)\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$$

$$f'''(t)=2e^{-t}(\cos(t)-\sin(t))\vec{i}+2e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))\vec{j}-e^{-t}\vec{k}$$

$$f'(t)\times f''(t)=-e^{-2t}(\cos(t)+\sin(t))\vec{i}+e^{-2t}(\cos(t)-\sin(t))\vec{j}+2e^{-2t}\vec{k}$$

$$|f'(t)\times f''(t)|=e^{-2t}\sqrt{6}$$

$$f'(t)\times f''(t).f'''(t)=-2e^{-3t}$$

$$\tau=\frac{f'(t)\times f''(t).f'''(t)}{|f'(t)\times f''(t)|}=\frac{-2e^{-3t}}{6e^{-4t}}=\frac{1}{3}e^{t}$$

چون تاب عددی غیرصفر است، لذا این خم مسطح نیست.

چهار تا دانشجو شب امتحان بجای درس خواندن به پارتی و خوش گذرونی رفته بودند و هیچ آمادگی امتحانشون رو نداشتند' روز امتحان به فکر چاره افتادند و حقه ای سوار کردند به این صورت که سر و روشون رو کثیف و کردند و مقداری هم با پاره کردن لباس هاشون در ظاهرشون تغییراتی بوجود آوردند' سپس عزم رفتن به دانشگاه نمودند و یکراست به پیش استاد رفتند' مسئله رو با استاد اینطور مطرح کردند که دیشب به یک مراسم عروسی خارج از شهر رفته بودند و در راه برگشت از شانس بد یکی از لاستیک های ماشین پنچر میشه و اونا با هزار زحمت و هل دادن ماشین به یه جایی رسوندنش و این بوده که به آمادگی لازم برای امتحان نرسیدند کلی از اینها اصرار و از استاد انکار آخر سر قرار میشه سه روز دیگه یک امتحان اختصاصی برای این ۴ نفر از طرف استاد برگزار بشه، آنها هم بشکن زنان از این موفقیت بزرگ، سه روز تمام به امر شریف خر زنی مشغول میشن و روز امتحان با اعتماد به نفس بالا به اتاق استاد میرن تا اعلام آمادگی خودشون رو ابراز کنند! استاد عنوان میکنه بدلیل خاص بودن و خارج از نوبت بودن این امتحان باید هر کدوم از دانشجوها توی یک کلاس بنشینند و امتحان بدن که آنها بدلیل داشتن وقت کافی و آمادگی لازم با کمال میل قبول میکنند. امتحان حاوی دو سوال و بارم بندی از نمره بیست بود؛

۱) نام و نام خانوادگی: ۲نمره

۲) کدام لاستیک پنچر شده بود؟ ۱۸نمره

الف) لاستیک سمت راست جلو　　ج) لاستیک سمت راست عقب

ب) لاستیک سمت چپ جلو　　د) لاستیک سمت چپ عقب

فصل پنجم: توابع چند متغیره

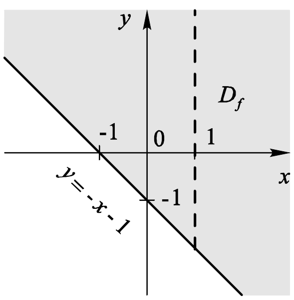
یک تابع n متغیره حقیقی f، قانونی است که به هر n-تایی مرتب $(x_1,x_2,...,x_n)$ از مجموعه $D_f\subset\mathbb{R}^n$ عدد یکتای $f(x_1,x_2,...,x_n)$ را نسبت می‌دهد.

مجموعه D_f دامنه تابع f و مجموعه تمام مقادیر حقیقی $f(x_1,x_2,...,x_n)$ که روی D_f تابع f اختیار می‌کند برد تابع f نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که اگر یک تابع با ضابطه‌اش به صورت یک فرمول بدون دامنه موجود باشد، دامنه f مجموعه تمام x- هایی در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که f روی آن یک عدد حقیقی خوش‌تعریف باشد.

برای نمونه تابع $V(r,h)=\pi r^2h$، که حجم استوانه مستدیر را برحسب دو متغیر، شعاع r و ارتفاع h به دست می‌دهد، تابعی دو متغییره است. در سراسر این بحث، ما با توابع دومتغییره و سه متغییره سر و کار خواهیم داشت و مطالب برای ابعاد بالاتر قابل تعمیم می باشند.

مثال: دامنه تابع زیر را می‌یابیم و $f(3,2)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$



حل : دامنه تابع f به صورت زیر است.

$$D_f=\{(x,y)\mid x+y+1\geq 0, x\neq 1\}$$

بنابراین دامنه تابع f بالا و روی خط $y=-x-1$ است که خط $x=1$ از آن حذف شده است.

$$f(3,2)=\frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

تمرینات:

۱. دامنه توابع زیر را بیابید.

$f(x,y)=\sin^{-1}(x+y)$

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$

$f(x,y)=\arcsin x+\sqrt{xy}$

$f(x,y,z)=\ln(25-4x^2-y^2-z^2)$

۲. برد توابع زیر را بیابید.

$f(x,y)=e^{x^2-y}$

$f(x,y)=\sqrt{36-9x^2-4y^2}$

$f(x,y,z)=x^2\ln(x-y+z)$

$f(x,y,z)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}y+\tan^{-1}z$

حد توابع دو متغییره: فرض f یک تابع دو متغیره باشد که در یک همسایگی محذوف $N_\delta^*(x_0,y_0)$ باشد. گوییم حد $f(x,y)$ زمانی که (x,y) به (x_0,y_0) میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم ،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad ,$$

اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$ عدد متناظر $\delta>0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر (x,y) داشته باشیم،

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon \quad .$$

مثال: با تعریف حد نشان می‌دهیم که ،

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}(4x+8y)=8 \quad .$$

حل : طبق تعریف باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon>0$ ، $\delta>0$ وجود دارد به طوری که،

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}<\delta \Rightarrow |(4x+8y)-8|<\varepsilon \, .$$

با توجه به

$$|x-0|=\sqrt{(x-0)^2}\le\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}<\delta \, ,$$

و

$$|y-1|=\sqrt{(y-1)^2}\le\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}<\delta \quad ,$$

نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned}|(4x+8y)-8| &= |(4(x-0)+8(y-1))|\\ &\le 4|x-0|+8|y-1|\\ &< 4\delta+8\delta=12\delta .\end{aligned}$$

پس اگر قرار دهیم $\varepsilon\le 12\delta$، آنگاه با انتخاب $0<\delta\le \varepsilon/12$ اثبات کامل است.

مثال: مطلوب است

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

حل : وقتی که $(x,y)\to(0,0)$, آنگاه $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ به صفر میل می‌نماید. صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ضرب کنیم, کسر معادلی به دست می‌آوریم که حد آن را می‌توان به دست آورد :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= (\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0$$

بررسی عدم وجود حد به کمک مسیرها: با توجه به تعریف در صورت وجود حد L، مقادیر تابع روی هر مسیر C از دامنه به سمت نقطه (x_0,y_0) به حد L میل می‌کنند. پس اگر فقط دو مسیر C_1 و C_2 به سمت نقطه (x_0,y_0) یافت شود، به طوری که

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \neq L_2 = \lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(x_0,y_0)} f(x,y)$$

برقرار باشد، حد موجود نمی‌باشد. با این تذکر که، حتی اگر به‌ازای مسیرهای مختلف $L_1 = L_2$ برقرار شود، دلیلی برای وجود حد نمی‌باشد.

مثال: نشان می‌دهیم که $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ موجود نمی‌باشد.

حل: کافی است دو مسیر $y=0$ و $y=x$ که از نقطه $(0,0)$ می‌گذرند را در نظربگیریم. روی مسیر با معادله خط $y=0$ داریم :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0} = 0 \ .$$

و لی از مسیر دیگر، روی خط $y=x$ داریم :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

چون $0 \neq 1/2$، پس حد موجود نمی‌باشد.

مثال: نشان دهید تابع زیر

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

وقتی که (x,y) به $(0,0)$ نزدیک می‌شود حد ندارد.

حل : در امتداد منحنی $y=kx^2$, $x\neq 0$ تابع دارای مقدار ثابت ذیل است :

$$f(x,y)\big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\bigg|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

بنابراین

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ ???\, y=mx}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\big|_{y=kx^2}\right] = \frac{2k}{1+k^2}$$

این حد روی مسیرهای متفاوت تغییر خواهد کرد. اگر $f(x,y)$ در امتداد سهمی $y=x^2$ به $(0,0)$ میل کند آنگاه حد برابر یک خواهد شد. اگر (x,y) در امتداد محور xها و $(k=0)$, به $(0,0)$ میل کند آنگاه حد برابر صفر می‌گردد. بنابه آزمون دو مسیر هنگامی‌که (x,y) به $(0,0)$ میل می‌کند f حد ندارد.

کار در کلاس: نشان دهید که حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ موجود نمی‌باشد.

مراحل محاسبه حد توابع دو متغییره و بالاتر:

۱. جایگذاری: ابتدا مقادیر متغییرها را داخل تابع جایگذاری می کنیم، اگر یک عدد مشخص به دست آمد؛ حد موجود و برابر با آن عدد است. در صورتی که یکی از حالت های مبهم به دست آمد بایستی رفع ابهام گردد.

۲. به کمک تعویض ترتیب متغییرها در حدگیری، اگر دو مقدار متفاوت به دست آمد حد موجود نیست در غیر اینصورت بایستی از مسیرهای مختلف از وجود یا عدم وجود حد مطمئن شویم.

مثال:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 2x-y^2 = 4-9=-5$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x^2y = a^2b$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ حد وجود ندارد

تمرینات: مقدار حد های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} xy+x^2$

۲. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$

۳. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{y}$

۴. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

۵. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

۶. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$

۷. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2x^2-xy}{4x^2+y^2}$

نکته: اگر در مختصات کارتزین نتوانیم به پیشرفتی در محاسبه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ نائل گردیم, از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. قرار دهید $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$ و با میل دادن $r\to 0$ از عبارت حاصل حد بگیرید.

پیوستگی توابع دو متغییره: تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) از دامنه f پیوسته نامیده می‌شود، اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)\ ,$$

و روی ناحیه $D \subset D_f$ پیوسته است، اگر f در هر نقطه (x_0,y_0) از D پیوسته باشد.

مثال: نشان دهید تابع زیر

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

در هر نقطه به جز مبدأ پیوسته است.

حل : تابع f در هر نقطه $(x,y) \neq (0,0)$ پیوسته است زیرا مقادیر آن توسط تابع گویایی از x و y به دست می‌آیند.

در $(0,0)$ تابع تعریف شده است, اما ادعا می‌کنیم وقتی‌که $(x,y) \to (0,0)$ تابع حد ندارد. زیرا همانگونه که اینک خواهیم دید وقتی از مسیرهای مختلف به مبدأ نزدیک می‌شویم, نتایج متفاوتی به دست می‌آید. به ازای هر مقدار m, تابع f دارای مقدار ثابتی روی خط $y = mx, x \neq 0$ می‌باشد, زیرا

$$f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\bigg|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

بنابراین وقتی‌که (x,y) به سمت $(0,0)$در امتداد خط میل می‌کند f دارای همین حد خواهد بود :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ ???\, y=mx}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x,y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1+m^2}$$

مقدار این حد با تغییر m, تغییر می‌کند. بنابراین عدد منحصر به فردی وجود ندارد که وقتی‌که (x,y) به مبدأ میل می‌کند بتوانیم آن عدد را حد f بنامیم. بنابراین حد وجود ندارد و تابع پیوسته نیست.

کار در کلاس: نشان دهید $f(x,y,z) = x+y-z$ در هر نقطه چون (x,y,z) پیوسته است.

مشتقات جزیی: وقتی که تمام متغیرهای یک تابع به جز یک متغیر را ثابت نگه داریم و نسبت به این متغیر مشتق بگیریم آنگاه مشتق جزیی به دست آورده‌ایم.

مشتق جزیی $f(x,y)$ نسبت به x در نقطه (x_0,y_0) عبارت است از :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dx} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0} = \lim \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد موجود باشد. (∂ را شکلی از d در نظر بگیرید.)

مشتق جزیی $f(x,y)$ نسبت به y در نقطه $f(x_0,y_0)$ عبارت است از :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h\to 0}=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

مشروط به آنکه این حد موجود باشد.

برای محاسبه همانگونه که معادله اول نشان می‌دهد, $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به طریق معمول با مشتق‌گیری از f نسبت به x در حالی که y را ثابت فرض کرده‌ایم, محاسبه می‌نماییم. همانطور که معادله دوم نشان می‌دهد, می‌توانیم $\frac{\partial f}{\partial y}$ را نیز با مشتق‌گیری از f نسبت به y و ثابت نگه داشتن x محاسبه کنیم.

مثال: مطلوب است مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(4,-5)$ هرگاه :

$$f(x,y)=x^2+3xy+y-1$$

☯ **حل :** برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$، فرض می‌کنیم y ثابت باشد و نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy+y-1)=2x+3\times 1\times y+0-0=2x+3y$$

مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(4,-5)$ برابر است با $2(4)+3(-5)=-7$. برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}$ فرض می‌کنیم x ثابت باشد و نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy+y-1)=0+3\times x\times 1+1-0=3x+1$$

مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $(4,-5)$ برابر است با $3(4)+1=13$.

توجه: تعریف مشتقات جزیی توابع با بیش از دو متغیر مستقل شبیه تعریف توابع دو متغیره است. آنها مشتقات معمولی نسبت به یک متغیر می‌باشند, در حالی‌که سایر متغیرها ثابت نگه داشته شده‌اند.

نکته: تابع $f(x,y)$ بدون اینکه در نقطه‌ای پیوسته باشد می‌تواند در آن نقطه نسبت به هر دو متغیر x و y دارای مشتقات جزیی باشد. این خاصیتی است مغایر با توابع یک متغیره, زیرا در مورد توابع یک متغیره مشتق‌پذیری تابع, پیوستگی آن را ایجاب می‌نماید. با این وجود اگر مشتقات جزیی $f(x,y)$ موجود بوده و در سراسر دیسکی به مرکز (x_0,y_0) پیوسته باشند آنگاه f در (x_0,y_0) پیوسته خواهد بود. تابع زیر

$$f(x,y)=\begin{cases}0\ ,\ xy\neq 0\\ 1\ ,\ xy=0\end{cases}$$

در $(0,0)$ پیوسته نیست. حد f وقتی که (x,y) در امتداد خط $y=x$ به $(0,0)$ میل می‌کند برابر صفر است ولی $f(0,0)=1$ مشتقات جزیی f_x و f_y هر دو در $(0,0)$ موجوداند.

مشتقات جزیی مرتبه دوم : وقتی که از تابع $f(x,y)$ دوبار مشتق می‌گیریم, در حقیقت مشتق مرتبه دوم آن را به دست آورده‌ایم. این مشتقات معمولاً با علائم زیر مشخص می‌شوند :

(f اندیس xx) f_{xx} یا (رند دو f به ∂x دو) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(f اندیس yy) f_{yy} یا (رند دو f به ∂y دو) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(f اندیس yx) f_{yx} یا (رند دو f به ∂x , ∂y) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

(f اندیس xy) f_{xy} یا (رند دو f به ∂y , ∂x) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

تعریف نمادهای فوق به شرح ذیل است :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

و الی آخر. به ترتیب مشتق‌گیری توجه داشته باشید : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ یعنی آنکه ابتدا نستب به y و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم. $f_{yx} = (f_y)_x$ دارای همان مفهوم است.

مثال: اگر $f(x,y) = x\cos y + ye^x$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos y + ye^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= -x\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x\cos y
\end{aligned}$$

نکته: مشتقات جزیی مرتبه دوم (آمیخته) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ را در نظر بگیرید. هرگاه توابع f, f_x, f_y, f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند آنگاه این مقادیر باید یکسان باشند.

قاعده زنجیره‌ای مشتقات جزیی: صورت یک متغیره قاعده زنجیره‌ای برای $f(g(x,y))$، که در آن f تنها یک متغیره با مشتق f' است، به‌کار می‌رود :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x,y)) = f'(g(x,y))\, g_1(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x,y)) = f'(g(x,y))\, g_2(x,y)$$

مثال: مطلوب است $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ و $\frac{\partial \omega}{\partial s}$ برحسب r و s هرگاه

$$\omega = x + 2y + z^2 \,, x = \frac{r}{s, y = rh2} + \ln s, z = 2r$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2)$$

$$= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r$$ برای متغیر z جانشین کنید

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

کار در کلاس:

- مطلوب است $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ هرگاه $\omega = x^2 + y^2 + z^2$ و $z = x^2 + y^2$.
- مطلوب است $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y,z}$ اگر $\omega = x^2 + y - z + \sin t$ و $x + y = t$.

دیفرانسیل کل: اگر از نقطه (x_0, y_0) به نقطه مجاور $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ حرکت کنیم، دیفرانسیل حاصل در f برابر است با :

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

این تغییر در تقریب خطی f را دیفرانسیل کل f می‌نامند.

بردار گرادیان: اگر مشتقات جزیی تابع $f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) موجود باشند، بردار گرادیان تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(f)\big|_{(x_0,y_0)}\, \vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}(f)\big|_{(x_0,y_0)}\, \vec{\mathrm{j}}$$

مشتق جهتی: اگر $\vec{u}$ یک بردار واحد باشد، مشتق تابع f در نقطه (x_0, y_0) و در جهت بردار $\vec{u}$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla \vec{f}\, \vec{u}$$

مثال: مطلوب است مشتق $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ در نقطه $(2,0)$ در جهت $A = 3i - 4j$.

☯ **حل :** جهت A با تقسیم A براندازه‌اش به دست می‌آید.

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{A}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$$

مشتقات جزیی f در $(2,0)$ عبارت اند از :

$$f_x(2,0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$
$$f_y(2,0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\times 0 = 2$$

گرادیان f در $(2,0)$ عبارت است از :

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2,0)i + f_y(2,0)j = u = i + 2j$$

بنابراین مشتق f در $(2,0)$ در جهت A برابر است با :

$$\nabla f\Big|_{(2,0)}.u = (i+2j).\left(\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

نقاط اکسترمم توابع دومتغییره: برای محاسبه مقادیر اکسترمم موضعی تابع یک متغیره, در جستجوی نقاطی هستیم که نمودار تابع در آن نقاط دارای خط مماس افقی است. در چنین نقاطی است که انتظار داریم ماکزیمم موضعی یا می‌نیمم موضعی یا نقاط عطف موجود باشند. برای تابع دو متغیره $f(x,y)$ به دنبال نقاطی هستیم که رویه $z = f(x,y)$ در آن نقاط دارای صفحه مماس افقی باشد. بنابراین در چنین نقاطی انتظار داریم که ماکزیمم موضعی, می‌نیمم موضعی و نقاط زینی یافت شوند.

آزمون مشتق اول برای مقادیر اکسترمم موضعی: اگر $f(x,y)$ در یک نقطه درونی چون (a,b) از دامنه تعریف تابع دارای ماکزیمم یا می‌نیمم موضعی باشد و اگر مشتقات جزیی مرتبه اول تابع در این نقطه موجود باشند، آنگاه $f_x(a,b) = 0$ ، $f_y(a,b) = 0$.

یک نقطه درونی از دامنه تابع $f(x,y)$ که در آن هر دوی f_x و f_y صفر باشند یا در آن یکی یا هر دو f_x و f_y موجود نباشند را نقطه بحرانی f می‌نامند.

تنها نقاطی که تابع $f(x,y)$ در آن نقاط احتمالاً مقادیر اکسترمم دارد نقاط بحرانی و نقاط مرزی می‌باشند. شبیه توابع مشتق‌پذیر یک متغیره، این طور نیست که هر نقطه بحرانی یک اکسترمم موضعی باشد. تابع مشتق‌پذیر یک متغیره ممکن است دارای یک نقطه عطف باشد. تابع مشتق‌پذیر دو متغیره ممکن است دارای نقطه زینی باشد.

آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی: فرض کنید $f(x,y)$ و مشتقات جزیی مرتبه اول و دوم آن بر سرتاسر یک دیسک به مرکز (a,b) پیوسته باشند و به علاوه $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ در این صورت :

- اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم $f_{xx}<0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ آنگاه f در (a,b) دارای ماکزیمم موضعی است.
- اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم $f_{xx}>0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ آنگاه f در (a,b) دارای می‌نیمم موضعی است.
- اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ و آنگاه f در (a,b) دارای نقطه زینی است.
- اگر در نقطه (a,b) داشته باشیم $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ و آنگاه در (a,b) آزمون جواب نمی‌دهد. در این حالت, برای تعیین رفتار f در (a,b) راه دیگری باید جستجو کرد.

مثال: مطلوب است مقادیر اکسترمم موضعی تابع زیر

$$f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$$

☯ **حل :** تابع به ازای هر x و y تعریف شده و مشتق‌پذیر می‌باشد و دامنه آن نقطه مرزی ندارد. بنابراین تابع فقط در نقاطی که f_x و f_y در آن نقاط تواماً برابر صفر می‌گردند دارای اکسترمم است. در نتیجه

$$f_x=y-2x-2=0\ ,\ f_y=x-2y-2=0$$

یا

$$x=y=-2$$

بنابراین نقطه $(-2,-2)$ تنها نقطه‌ای است که f در آن می‌تواند اکسترمم داشته باشد. برای ملاحظه نتیجه, محاسبات زیر را انجام می‌دهیم.

$$f_{xx}=-2\ ,\ f_{yy}=-2\ ,\ f_{xy}=1$$

دلتای f در $(a,b)=(-2,-2)$ برابر است با :

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(-2)(-2)-(1)^2=4-1=3$$

درنتیجه بنابر اینکه

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0 \quad \text{و} \quad f_{xx}<0$$

f در $(-2,-2)$ دارای ماکزیمم موضعی است. مقدار f در این نقطه برابر است با $f(-2,-2)=8$.

مثال: مطلوب است مقادیر اکسترمم موضعی تابع $f(x,y)=xy$.

حل : چون f همه جا مشتق‌پذیر است تنها نقاطی که می‌توان در آنها مقادطر اکسترمم را تصور کرد عبارتند از نقاطی که در معادلات زیر صدق کنند.

$$f_y = x = 0 \ , \ f_x = y = 0$$

بنابراین، مبدأ تنها نقطه‌ای است که f می‌تواند در آن اکسترمم داشته باشد، برای تعیین نوع این اکسترمم، ملاحظه می‌شود که :

$$f_{xx} = 0 \ , \ f_{yy} = 0 \ , \ f_{xy} = 1$$

بنابراین مبین به صورت زیر است :

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

که منفی می‌باشد. بنابراین نقطه $(0,0)$ یک نقطه زینی تابع است. در نتیجه $f(x,y)=xy$ دارای مقادیر اکسترمم موضعی نمی‌باشد.

تمرینات: تمامی ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌های موضعی و نقاط زینی توابع مذکور در تمرین‌های ۱۰–۱ را به دست آورید.

۱. $f(x,y)=x^2-4xy+y^2+6y+2$

۲. $f(x,y)=x^2+3xy+3y^2-6x+3y-6$

۳. $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x+4y-4$

۴. $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x-4$

۵. $f(x,y)=x^2+xy+3x+2y+5$

۶. $f(x,y)=y^2+xy-2x-2y+2$

۷. $f(x,y)=5xy-7x^2+3x-6y+2$

۸. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-3y+4$

۹. $f(x,y)=2xy-x^2-2y^2+3x+4$

۱۰. $f(x,y)=2x^2+6xy+7y^2-2x+4y$

اکسترمم های مشروط، روش ضرایب لاگرانژ: فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند. برای به دست آوردن ماکسیمم و می‌نیمم‌های موضعی f با توجه به قید $g(x,y,z)=0$، مقادیری از x، y، z و λ را چنان به دست آورید که به طور همزمان در معادلات زیر صدق نمایند :

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x,y,z)=0$$

برای توابع دو متغیره، معادلات فوق به صورت زیر می‌باشند :

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x,y)=0$$

مثال: مطلوب است مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم تابع $f(x,y)=3x+4y$ بر دایره $x^2+y^2=1$.

حل : به کمک روش ضرایب لاگرانژ

$$f(x,y)=3x+4y\ ,\ g(x,y)=x^2+y^2-1$$

و مقادیری از x ، y و λ را می‌خواهیم که در معادلات زیر صدق کنند

$$\nabla f=\lambda\nabla g : 3\mathrm{i}+4\mathrm{j}=2x\lambda\mathrm{i}+2y\lambda\mathrm{j}$$
$$g(x,y)=0 : x^2+y^2-1=0$$

معادله گرادیان ایجاب می‌کند که $\lambda\neq 0$ و در نتیجه $x=\dfrac{3}{2\lambda}\ ,\ y=\dfrac{2}{\lambda}$

یکی از نتایج این معادلات آن است که x و y هم علامت می‌باشند. با استفاده از این مقادیر برای x و y ، معادله $g(x,y)=0$ به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2-1=0$$

بنابراین $\dfrac{9}{4\lambda^2}+\dfrac{4}{\lambda^2}=1$، $9+16=4\lambda^2$، $4\lambda^2=25$ و $\lambda=\pm\dfrac{5}{2}$. بدین ترتیب $x=\dfrac{3}{2\lambda}=\pm\dfrac{3}{5}\ ,\ y=\dfrac{2}{\lambda}=\pm\dfrac{4}{5}$

و تابع $f(x,y)=3x+4y$ دارای مقادیر اکسترمم در $(x,y)=\pm\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ می‌باشد. با محاسبه مقدار $3x+4y$ در نقاط $\pm\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ ملاحظه می‌شود که مقادیر ماکسیمم و می‌نیمم بر دایره $x^2+y^2=1$ عبارتند از :

$$3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{25}{5}=5\ ,\ 3\left(-\frac{3}{5}\right)+4\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{25}{5}=-5$$

یک کارشناس مدیریت زمان در حال صحبت برای عدهای از دانشجویان، مثالی به کاربرد. او یک کوزه دهان گشاد را از زیر میز بیرون آورد و سپس ۱۲ عدد قلوه سنگ را یک به یک درون کوزه چید. وقتی کوزه پر شد و دیگر هیچ سنگی در آن جا نمی-گرفت از دانشجویان پرسید:آیا کوزه پر است؟ همه گفتند:بله.

سپس استاد یک سطل شن آورد و مقداری از شن را روی سنگها ریخت.بار دیگر پرسید آیا کوزه پر است؟ یکی از دانشجویان پاسخ داد: احتمالا نه!!

او گفت خوبست. سپس یک سطل ماسه آورد و داخل کوزه ریخت. بار دیگر پرسید: آیا کوزه پر است؟ این بار کسی جوابی نداد و استاد یک پارچ آب آورد و داخل کوزه ریخت.

سپس رو به کلاس کرد و پرسید: چه کسی می تواند بگوید نکته این مثال در چه بود؟

یکی از دانشجویان گفت: این مثال می خواهد به ما بگوید که برنامه زمانی ما هر چقدر هم که فشرده باشد، اگر سخت تلاش کنیم همیشه می-توانیم کارهای بیشتری در آن بگنجانیم.

استاد پاسخ داد: نه! نکته این نیست. حقیقتی که این مثال به ما می آموزد این است که اگر سنگهای بزرگ را اول نگذارید، هیچوقت فرصت پرداختن به آنها را نخواهید یافت. سنگهای بزرگ زندگی شما کدامها هستند: فرزندانتان؟ تحصیلتان؟ رویاهایتان؟ سلامتی؟...

به یاد داشته باشید که ابتدا این سنگهای بزرگ را بگذارید در غیر این صورت هیچگاه به آنها دست نخواهید یافت.

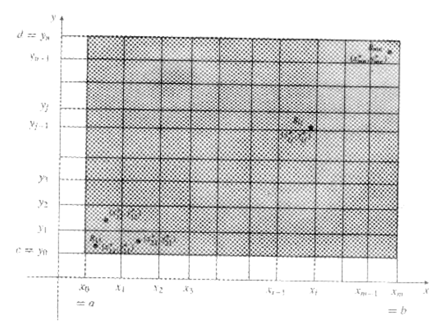
پس همواره از خود بپرسید سنگهای بزرگ زندگی من کدامند؟

فصل ششم: انتگرال های چندگانه

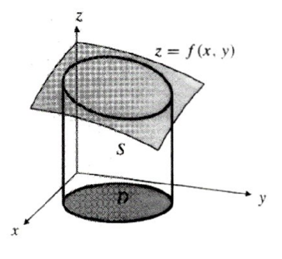
فرض کنید که D یک مستطیل بسته با اضلاع موازی محورهای مختصات در صفحه xy و f یک تابع کراندار بر D باشد. اگر D از نقاط (x,y) تشکیل شده باشد که در آن $a \le x \le b$ و $c \le y \le d$، افراز P از D به مستطیل های کوچک را می‌توان با تقسیم هر بازه $[a,b]$ و $[c,d]$ با نقاط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

به مستطیل‌های کوچک تشکیل داد. در این صورت افراز P از D از mn مستطیل کوچک به نام عنصر $R_{ij}\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ مرکب از نقاط (x,y) که $x_{i-1} \le x \le x_i$ و $y_{j-1} \le y \le y_j$ تشکیل شده است (شکل ۲).



$R_{ij}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$



شکل ۱. ناحیه توپر S بالای قلمرو D در صفحه xy و زیر سطح $z = f(x,y)$

بدیهی است که مستطیل R_{ij} دارای مساحت $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ و قطر (یعنی طول قطر) زیر است.

$$\operatorname{diam}(R_{ij}) = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

نرم (یا اندازه) یک افزار P ماکزیمم قطرهای این زیرمستطیل‌ها است، یعنی :

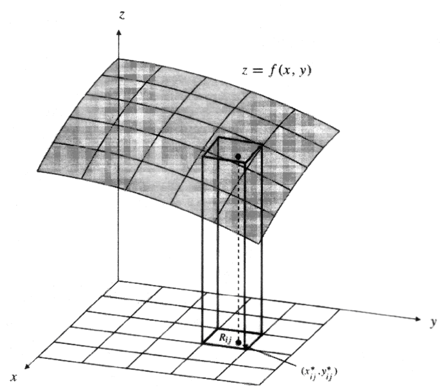
$$\|P\| = \max_{1\le i\le m\,,\,1\le j\le n} \operatorname{diam}(R_{ij})$$

حال در هر مستطیل R_{ij} نقطه دلخواه (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را اختیار می‌کنیم و مجموع ریمان نیز را تشکیل می‌دهیم،

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$$

که مجموع mn جمله است (در این‌جا جمع‌بندی مضاعف نشان می‌دهد که وقتی i از 1 تا m جمله می‌رود مجموع m جمله را نشان می‌دهد که هر یک خود مجموعی است وقتی j از 1 تا n تغییر می‌کند. اگر $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \ge 0$، جمله نظیر مستطیل R_{ij} حجم جعبه مکعب مستطیل است که قاعده‌اش R_{ij} بوده و ارتفاعش مقدار f در $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ می‌باشد (شکل۳). بنابراین، به‌ازای توابع مثبت f، مجموع ریمان $R(f,P)$ حجم بالای D و زیرنمودار f را تقریب می‌کند.

انتگرال مضاعف f روی D حد این مجموع‌های ریمان تعریف می‌شود مشروط بر اینکه حد وقتی مستقل از نحوه انتخاب نقاط $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ است که، $\|P\| \to 0$ موجود باشد.



شکل ۳. جعبه مکعب مستطیل بالای مستطیل R_{ij}.

گوییم تابع f روی مستطیل D انتگرال‌پذیر بوده و دارای انتگرال مضاعف

$$I = \iint_D f(x,y)dA$$

است، اگر به‌ازای هر عدد مثبت ε عددی مانند δ (وابسته به ε باشد) به‌طوری که به‌ازای هر افراز P از D که $\|P\| < \delta$ داشته باشیم

$$\left|R(f,P) - I\right| < \varepsilon$$

قضیه فوبینی برای محاسبه انتگرال دوگانه: اگر f روی مستطیل $D = [a,b] \times [c,d]$ پیوسته باشد، آنگاه :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

خواص انتگرال مضاعف: بعضی از خواص انتگرال‌های مضاعف با خواص انتگرال معین یگانه شبیه‌اند. هرگاه f و g روی D انتگرال‌پذیر بوده و L و M ثابت باشند، آنگاه :

۱. هموارە صفر. اگر D دارای مساحت صفر باشد، $\iint_D f(x,y)dA = 0$.

۲. مساحت . مساحت دامنه D $\iint_D 1dA = D$ (زیرا حجم یک استوانه به قاعده D و ارتفاع 1 است).

۳. حجم . هرگاه بر D داشته باشیم $f(x,y) \geq 0$، آنگاه $\iint_D f(x,y)dA = V \geq 0$ حجم جسمی است که به‌طور قائم بالای D و زیر سطح $z = f(x,y)$ قرار دارد.

۴. قرینه حجم . هرگاه بر D داشته باشیم $f(x,y) \leq 0$، آنگاه $\iint_D f(x,y)dA = -V \leq 0$، V حجم جسمی است که به‌طور قائم زیر D و بالای سطح $z = f(x,y)$ واقع است.

۵. وابستگی خطی به انتگرالده :

$$\iint_D \Big(Lf(x,y)+Mg(x,y)\Big)dA = L\iint_D f(x,y)dA + M\iint_D g(x,y)dA$$

۶. حفظ نامساوی‌ها هرگاه بر D داشته باشیم $f(x,y)\le g(x,y)$، آنگاه :

$$\iint_D f(x,y)dA \le \iint_D g(x,y)dA$$

۷. نامساوی مثلثی یا قدرمطلقی :

$$\left|\iint_D f(x,y)dA\right| \le \iint_D \big|f(x,y)\big|dA$$

۸. جمع‌پذیری دامنه ها. هرگاه $D_1,D_2,\ldots,D_k$ دامنه هایی باشند رویهم نیفتاده که روی هر یک از آنها f انتگراپذیر است، آنگاه f روی اجتماع $D=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k$ انتگرال‌پذیر است و

$$\iint_D f(x,y)dA = \sum_{j=1}^{k}\iint_{D_j} f(x,y)dA$$

دامنه های رویهم نیفتاده می‌توانند در نقاط مرزی سهیم باشند ولی نقاط درونی مشترک نخواهند داشت.

مثال: انتگرال‌های مکرر زیر را محاسبه می‌کنیم.

الف) $\int_1^2\int_0^3 x^2ydxdy$ ب) $\int_0^3\int_1^2 x^2ydydx$

حل: الف) انتگرال جزیی، ابتدا نسبت به x سپس نسبت به y می‌باشد، یعنی :

$$\int_1^2\left[\int_0^3 x^2ydx\right]dy = \int_1^2\left(\tfrac{1}{3}x^3y\right)\Big|_{x=0}^{x=3}dy = \int_1^2 9ydy = \frac{27}{2}$$

ب) در این قسمت ترتیب عکس قسمت الف می‌باشد .

$$\int_0^3\left[\int_1^2 x^2ydy\right]dx = \int_0^3\left(\tfrac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{y=1}^{2}dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2dx = \frac{27}{2}$$

مثال: مقدار $I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\sin x + y^3 + 3)dA$ را حساب می‌کنیم.

حل : انتگرال را می‌توان به کمک خاصیت (۵) انتگرال‌های مضاعف به‌صورت مجموع سه انتگرال بیان کرد :

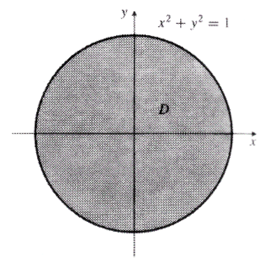
$$I=\iint_{x^2+y^2\le1}\sin x dA+\iint_{x^2+y^2\le1}y^3dA+\iint_{x^2+y^2\le1}3dA = I_1+I_2+I_3$$

دامنه انتگرال‌گیری (شکل ۴) یک قرص مستدیر به شعاع 1 و مرکز مبداء است. چون $f(x,y)=\sin x$ یک تابع فرد از x است، نمودارش در زیر صفحه xy در ناحیه $x<0$ همان اندازه حجم را در بر دارد که در بالای صفحه xy در ناحیه $x>0$ داراست. این دو سهم در انتگرال مضاعف حذف می‌شوند، در نتیجه $I_1=0$. توجه کنید که برای این بحث تقارن دامنه و انتگرالده لازم است.

به همین نحو، $I_2 = 0$ زیرا y^3 یک تابع فرد است و D نسبت به محور x متقارن می‌باشد. بالاخره،

$$I_3 = \iint_D 3dA = 3 \times (\text{مساحت } D) = 3\pi$$

لذا، $I = 0 + 0 + 3\pi = 3\pi$



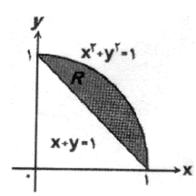
شکل٤

تعیین حدود انتگرال : مشکل ترین بخش محاسبه یک انتگرال دوگانه یافتن حدود انتگرال است، الگوی زیر برای این کار مناسب است.

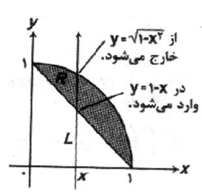
روش یافتن حدود انتگرال :

- برای محاسبه $\iint_R f(x,y)dA$ روی ناحیه R ابتدا بر حسب y و سپس بر حسب xانتگرال می‌گیریم. مراحل زیر را اجرا کنید :

۱. **ترسیم.** ناحیه انتگرال‌گیری را رسم و منحنی‌های محصور را مشخص کنید .

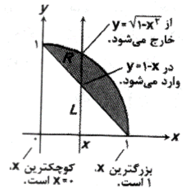


۲. **حدود انتگرال** y. تصور کنید خط قائم L در جهت افزایش R, y را قطع می‌کند. مقادیر y را در جایی که L داخل و خارج می‌گردد مشخص کنید، این نقاط حدود انتگرال y هستند .



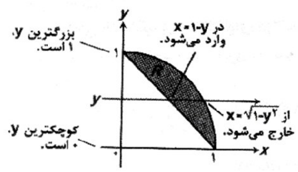
۳. **حدود انتگرال** x، حدود x را که شامل تمامی خطوط قائم میان R است انتخاب کنید، انتگرال برابر است :

$$\iint f(x,y)dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$$



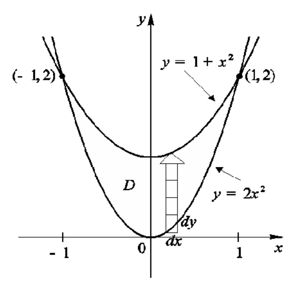
برای محاسبه همان انتگرال دوگانه به صورت انتگرال پی در پی با استفاده از دستور تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، به جای خطوط قائم،خطوطی افقی را به کار ببرید. انتگرال برابر است با:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$$



مثال: مقدار $\iint_D (x+2y)\,dA$ که در آن D ناحیه محدود بین منحنی $y=1+x^2$ و $y=2x^2$ می باشد را محاسبه می‌کنیم.

حل : با توجه به شکل زیر واضح است که D ناحیه بین دو سهمی رسم شده است.



ناحیه انتگرالگیری

دو منحنی که ناحیه D را تشکیل می‌دهند در نقاط $(1,2)$ و $(-1,2)$ متقاطع هستند، زیرا :

$$\begin{cases} y=1+x^2 \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow 1+x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین از رابطه داریم :

$$\iint_D (x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dydx = \int_{-1}^{1}\left(xy+y^2\right)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx = \frac{32}{15}$$

توجه: اگر در محاسبه یک انتگرال مکرر، انتگرال جزیی اول یک تابع غیر مقدماتی مانند $\int \frac{\sin x}{x}dx$ ، $\int \sin x^2 dx$ ، $\int e^{y^2}dy$ و غیره باشد، در انتگرال دوگانه می‌توان با تعویض ترتیب انتگرالگیری (البته نه همیشه) آن را حل کنیم.

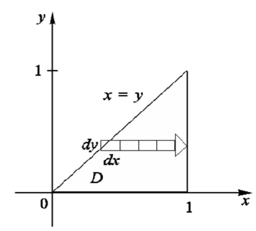
مثال : انتگرال مکرر $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dxdy$ را ارزیابی می‌کنیم.

حل : اگر بخواهیم انتگرال را با همین ترتیب مشخص شده ارزیابی کنیم، محاسبه تابع اولیه $\int e^{x^2}dx$ غیر ممکن است، هرچند انتگرال موجود است. بنابراین سعی می‌کنیم ابتدا ناحیه D را از روی کران انتگرال داده شده بیابیم (شکل الف). یعنی یک گام به عقب برگردیم

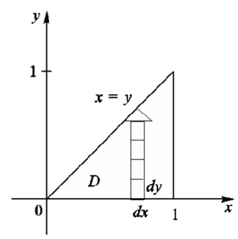
$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dxdy = \iint\limits_D e^{x^2}dA$$

به طوری که

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le 1\ ,\ y\le x\le 1\right\}=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le 1\right\}$$



شکل الف– انتگرال با ناحیه نوع اول



شکل ب– انتگرال با ناحیه نوع دوم

اکنون برای تعویض ترتیب انتگرال، جهت حرکت را مطابق شکل (ب) تنظیم می‌نماییم :

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le x\right\}$$

در این حالت خواهیم داشت:

$$\iint\limits_D e^{x^2}dA=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx=\int_0^1\left[y\,e^{x^2}\Big|_0^x\right]dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}[e-1]$$

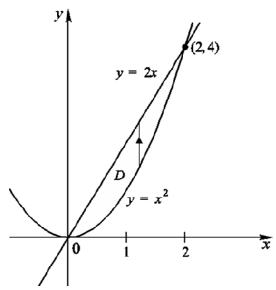
کاربردهای انتگرال دوگانه: دو کاربرد مهم انتگرال‌های دوگانه تعیین مساحت و حجم ناحیه انتگرال‌گیری می‌باشد.

❶تعیین مساحت: مساحت ناحیه R از محور xy که انتگرال روی آن تعریف شده برابر است با:

$$S=\iint\limits_R 1dxdy$$

مثال: مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ که به سهمی $y=x^2$ و خط $y=2x$ محدود است را می یابیم.

حل : ناحیه $\mathbb{R}$ یک ناحیه مسطح در صفحه xy می باشد. پس ابتدا نقاطع تقاطع را می یابیم:



سطح مسطح بین دو منحنی

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0,2$$

سپس مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم :

$$S = \iint_R 1dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dydx \qquad = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

❷ **تعیین حجم**: انتگرال دوگانه تابع $z = f(x,y)$ در ناحیه D، حجم ا ستوانه ای ا ست که محور دوران محور z واقع بین $z = f(x,y)$ و D از صفحه xy می‌باشد :

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

مثال: حجم منشوری که به وسیله صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ تولید می گردد را می یابیم.

حل :

$$V = \iint_D zdydx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)dydx$$
$$= \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}$$

در یک باشگاه بدنسازی پس از اضافه کردن ۵ کیلوگرم به رکورد قبلی ورزشکاری از وی خواستند که رکورد جدیدی برای خود ثبت کند اما او موفق به این کار نشد پس از او خواستند وزنه ای که از رکوردش ۵ کیلوگرم کمتر است را امتحان کند. این دفعه او به راحتی وزنه را بلند کرد. این مساله برای آن ورزشکار و دوستانش امری کاملا طبیعی به نظر می‌رسید اما برای طراحان این آزمایش جالب و هیجان‌انگیز بود چرا که آنان اطلاعات غلط به ورزشکار داده بودند. او در مرحله اول از عهده بلند کردن وزنه ای بر نیامده بود که در واقع از رکوردش ۵ کیلوگرم کمتر بود و در حرکت دوم ناخودآگاه موفق به بهبود رکوردش به اندازه ۵ کیلو شده بود.

هر فردی خود را ارزیابی می‌کند و این برآورد مشخص خواهد ساخت که او چه خواهد شد. شما نمی‌توانید بیش از آن چیزی بشوید که باور دارید.

فصل هفتم: انتگرال خط و سطح

به طور خاص به تابعی که قلمرو و برد آن زیرمجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ باشد را یک **میدان برداری** نامند. میدان برداری F، به هر نقطه (x,y,z) در دامنه آن بردار $\mathrm{F}(x,y,z)$ را مربوط می‌سازد. سه مولفه F توابع اسکالر (یا حقیقی) $F_1(x,y,z)$، $F_2(x,y,z)$ و $F_3(x,y,z)$ می‌باشند. همچنین تابع $\mathrm{F}(x,y,z)$ را می‌توان برحسب پایه‌های متعارف در $\mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر نوشت :

$$\mathrm{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\mathrm{i}+F_2(x,y,z)\mathrm{j}+F_3(x,y,z)\mathrm{k}$$

(توجه کنید که در این‌جا زیرنویس‌ها نمایش مولفه‌های یک بردارد هستند نه مشتقات جزیی).

هرگاه $F_3(x,y,z)=0$ و همچنین F_1 و F_2 مستقل از z باشند، آنگاه F به صورت زیر محدود می‌شود

$$\mathrm{F}(x,y)=F_1(x,y)\mathrm{i}+F_2(x,y)\mathrm{j}$$

که یک میدان برداری در صفحه xy یا یک **میدان برداری مسطح** نام دارد.

اگر P و Q توابع دو متغیره بر حسب x و y در ناحیه D از صفحه xy باشند ، تابع $\mathbf{F}$ معرفی شده زیر، یک میدان برداری روی D در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌باشد.

$$\mathbf{F}\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)\mathbf{i}+Q\left(x,y\right)\mathbf{j}$$

در حالت کلی تر میدان برداری در فضا به شکل ،

$$\mathbf{F}\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)\mathbf{i}+Q\left(x,y,z\right)\mathbf{j}+R\left(x,y,z\right)\mathbf{k}$$

می‌باشد که توابع سه متغیره P، Q و R بر حسب x ، y و z در ناحیه D از فضای xyz می‌باشند، به **توابع مؤلفه‌ای** متناظر معروف هستند.

معرفی چند میدان برداری نمونه میدان‌های برداری در بسیاری از حالت‌ها در ریاضیات کاربردی ظاهر می‌شوند. ما فقط به بعضی از آنها در اینجا اشاره می‌کنیم :

۱. میدان جاذبه $\mathrm{F}(x,y,z)$ ناشی از یک جسم، نیروی جاذبه‌ای است که جسم بر جرم واحد واقع در موضع (x,y,z) وارد می‌کند.

۲. میدان نیروی الکتروستاتیک $\mathrm{E}(x,y,z)$ ناشی از یک جسم با بار الکتریکی، نیروی الکتریکی‌ای است که جسم بر بار واحد در موضع (x,y,z) وارد می‌کند (این نیرو ممکن است جاذبه یا دافعه باشد) .

۳. میدان سرعت $\mathrm{V}(x,y,z)$ در یک سیال (یا جسم) متحرک سرعت حرکت ذره در موضع (x,y,z) است. هرگاه حرکت *پایدار* نباشد، آنگاه میدان سرعت تابعی بر حسب زمان می‌باشد، یعنی $\mathrm{V}=\mathrm{V}(x,y,z,t)$.

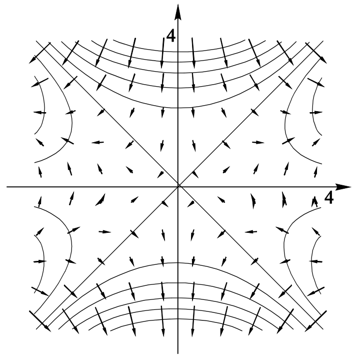
۴. میدان‌های گرادیان

میدان برداری گرادیان تابع $f(x,y)=x^2y-y^3$ را می‌یابیم . این میدان را همراه با منحنی‌های تراز f رسم می‌کنیم.

حـل : میدان برداری گرادیان به صورت :

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}=2xy\mathbf{i}+\left(x^2-3y^2\right)\mathbf{j}$$

می‌باشد. شکل نقشه تراز f، با میدان برداری گرادیان را نشان می‌دهد.



یک میدان گرادیان در $\mathbb{R}^2$

توجه کنید که بردارهای گرادیان به منحنی‌های تراز عمود می‌باشند. ملاحظه می‌کنید که بردارها در جاهایی که منحنی‌های تراز به هم نزدیکتر می‌شوند، بلندتر و جاهایی که از هم دور می‌شوند کوتاه‌تر هستند، زیرا طول بردار گرادیان مقدار مشتق جهتی f می‌باشد. توجه داشته باشید که منحنی‌های تراز نزدیک به هم نشان دهنده نمودار با شیب تندتر می‌باشند.

■

۵. بردارهای شعاعی یکه و متقاطع یکه $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ مثال‌هایی از میدان‌های برداری در صفحه xyاند. هر دو در تمام نقاط صفحه جز مبدأ تعریف شده‌اند.

میدان برداری $\vec{\mathrm{F}}(x_1,x_2,x_3)=M(x_1,x_2,x_3)\vec{\mathrm{i}}+N(x_1,x_2,x_3)\vec{\mathrm{j}}+P(x_1,x_2,x_3)\vec{k}$ را در نظر می گیریم.

عملگر دِل (∇) به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial x_2}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial x_3}\vec{k}$$

در اینصورت دیورژانس و کِرل به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\nabla.\vec{\mathrm{F}}=div(\vec{F})=\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{M})\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{N})\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial x_3}(P)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{F}}=curl(\vec{F})=\det\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1}&\frac{\partial}{\partial x_2}&\frac{\partial}{\partial x_3}\\ M&N&P\end{bmatrix}$$

عملگر لاپلاس به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial^2}{x_3^2}\vec{k}$$

اگر $f(x, y, z)$ یک تابع اسکالر باشد، آنگاه لاپلاسین f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial^2 f}{x_3^2}\vec{k}$$

مثال: اگر $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ باشد، $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ را می‌یابیم.

حل : با استفاده از معادله فوق داریم :

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right)\mathbf{j}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\mathbf{k} = -y(z+x)\,\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

کار در کلاس ۱: کرل و دیورژانس میدان برداری زیر را در نقطه $(1,2,3)$ بیابید.

$$\vec{\mathrm{F}}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2\,\vec{\mathrm{i}} + 5x_1 x_2^2\,\vec{\mathrm{j}} + x_1 x_2 x_3^3 \vec{k}$$

کار در کلاس ۲: لاپلاسین تابع اسکالر زیر را به دست آورید.

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy + 2x^2 - 7y - 8z$$

میدان برداری پایستار: گوییم F یک میدان برداری پایستار در D است، هرگاه در دامنه D داشته باشیم .

$$\mathrm{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$$

تابع اسکالر ϕ را **تابع پتانسیل** برای میدان برداری F بر ناحیه D می‌نامیم.

مثال: معین می‌کنیم که میدان برداری زیر بر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$، پایستار می‌باشد، یا خیر.

$$\mathbf{F}(x,y) = 3x^2y\,\mathbf{i} + x^3y\,\mathbf{j}$$

حل : در اینجا داریم :

$$P = 3x^2y \qquad , \qquad Q = x^3y$$

و مشتق‌های جزیی عبارتند از :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \qquad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y$$

چون $P_x \neq Q_x$، جز وقتی که $x = 0$ یا $y = 1$ ، این میدان برداری بر هیچ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^2$، گرادیان نیست.

نکته: فرض $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$، یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی یک ناحیه همبند ساده D باشد، اگر داخل D، $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$ آنگاه $\mathbf{F}$ پایستار می‌باشد. چون کل $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ همبند ساده هستند، پس اگر روی کل $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ ، $\mathbf{F}$ پایستار می‌شود.

مثال (تعیین تابع پتانسیل): تابع پتانسیل میدان $\mathbf{F}(x,y) = (3+2xy)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - 3y^2\right)\mathbf{j}$ را می‌یابیم.

جواب:

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + k$$

انتگرال خط: می‌دانیم طول منحنی C روی بازه $[a,t_0]$ که $a < t_0 \leq b$، برابر است با:

$$s(t_0) = \int_a^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

چون $f(x,y)$ روی C عمل می‌کند، باقرار دادن مختصـــات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در تابع $f(x,y)$ انتگرال خط به صورت یک انتگرال یک‌گانه زیر درمی‌آید.

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

در حالت کلی می‌توان به صورت برداری فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\mathbf{r}'(t)\right|dt$$

مثال: انتگرال $\int_C (2 + x^2y)\,ds$ را ارزیابی می‌کنیم که C نیمه بالایی دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد.

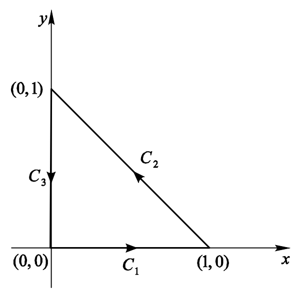
حل : ابتدا معادله پارامتری نیم دایره بالایی C را می‌نویسیم.

$$x = \cos t \;,\; y = \sin t \quad , \; 0 \leq t \leq \pi$$

اکنون با استفاده از فرمول داریم:

$$\begin{aligned}\int_C \big(2+x^2y\big)\,ds &= \int_0^{\pi}\big(2+\cos^2 t\sin t\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\big(2+\cos^2 t\sin t\big)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\big(2+\cos^2 t\sin t\big)\,dt = \Big[2t-\frac{\cos^3 t}{3}\Big]_0^{\pi}\\ &= 2\pi+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

مثال: انتگرال $\oint_c (x+y)\,ds$ را که C مثلث شکل زیر است، محاسبه می‌نماییم.



حل : چون مثلث C تکه‌ای هموار بسته از سه تکه خط هموار C_2, C_1 و C_3 تشکیل می‌شود، پس داریم :

$$\oint_C (x+y)\,ds = \int_{C_1}(x+y)\,ds+\int_{C_2}(x+y)\,ds+\int_{C_3}(x+y)\,ds$$

چون روی C_1، $y=0$ ، انتگرال f به انتگرال یک‌گانه کاهش می‌یابد، یعنی:

$$\int_{C_1}(x+y)ds = \int_0^1 (x+0)\sqrt{1+0}\,dx = \frac{1}{2}$$

به همین ترتیب انتگرال f روی C_3، چون $x=0$ به انتگرال یک گانه روی محور- y، ولی از $y=1$ به $y=0$ کاهش می‌یابد.

$$\int_{C_3}(x+y)ds = \int_1^0 (0+y)\sqrt{0+1}\,dy = -\frac{1}{2}$$

ولی انتگرال روی مرز C_2 را می‌توان برحسب x، برحسب y یا برحسب یک پارامتر سوم t، پارامتری نمود :

$$y=t \quad , \quad x=-t+1 \quad , \quad 0\le t\le 1$$

که با این عمل داریم :

$$\int_{C_2}(x+y)\,ds = \int_0^1 (t-t+1)\sqrt{(-1)^2+1^2}\,dt = 1$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است.

$$\oint_C (x+y)\,ds = \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} = 1$$

مثال: کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}=x^2\,\mathbf{i}-xy\,\mathbf{j}$ در حرکت یک ذره روی ربع دایره با معادله برداری $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}$ ، $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ را می‌یابیم.

حل : چون معادله پارامتری مسیر $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ می‌باشد. با توجه به فرمول داریم :

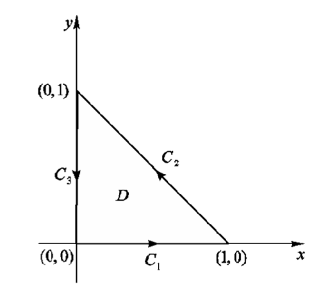
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \sin t\,\mathbf{j}\right).\left(-\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin t \cos^2 t dt = 2\frac{\cos^3 t}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

قضیه گرین: فرض کنید C یک منحنی ساده بسته تکه‌ای هموار با جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) شامل ناحیه داخلی D از صفحه باشد. اگر P و Q دارای مشتق‌های جزیی اول پیوسته درون و روی مرز ناحیه باز D باشند، آنگاه :

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F}.\mathbf{k}\, dA$$

مثال: انتگرال $\oint_C x^4dx + xydy$ که C مثلث با راس‌های $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌باشد را ارزیابی می‌کنیم .

حـــــل : در شکل ملاحظه می‌کنید که اگر بخواهیم از روش مستقیم انتگرال را حل نماییم باید انتگرال خط را روی سه ضلع جداگانه محاسبه نماییم و با هم جمع کنیم.

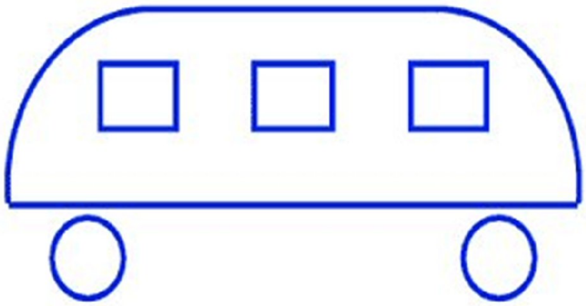


اما چون مطابق شکل ناحیه D یک ناحیه بسته با مرز C با جهت مثبت می‌باشد به کمک قضیه گرین داریم:

$$\oint_C x^4dx + xydy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)\,dydx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

تست هوش



از بچه‌های کودکستان سوال زیر پرسیده شد:
«اتوبوس شکل زیر به کدام طرف حرکت می‌کند؟»

به دقت به شکل نگاه کنید.
جواب سوال بالا را می‌دانید؟
تنها دو جواب وجود دارد: «چپ» یا «راست»؟
درباره‌اش فکر کنید ...

هنوز نمی‌دانید به کدام طرف حرکت می‌کند؟

عیب نداره! ما به شما می‌گوئیم.

.
.
.
.
.
.
.
.
.

تمام بچه کودکستانی‌ها جوابشان این بود: به طرف چپ.
وقتی از آن‌ها پرسیده شد: «چرا فکر می‌کنید که اتوبوس به طرف چپ حرکت می‌کند؟»
جواب همه‌شان این بود: «چون درب اتوبوس دیده نمی‌شود.»