(۱) معادلات پارامتری خطی را بنویسید که محل تلاقی دو صفحه $۲ = ۳x - ۲y + ۴z$ و $۱۳ = ۲x + y - ۳z$ باشد.

(۲) وارون ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ را به روش الحاقی به دست آورید.

(۳) فرض کنید $\overrightarrow{R(t)} = t^۲\overrightarrow{i} + t\overrightarrow{j} + t^۲\overrightarrow{k}$ ، مولفه های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید.

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y) = x^۲ - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^۳ - ۳y$$

(۵) فرض کنید C دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، انتگرال $\int ydx + xydy$ را حساب کنید.

پاسخنامه تشریحی

جواب سوال ۱) سوال ساده حل در صفحات ۱۸۹ و ۱۹۰ کتاب درسی

جواب سوال ۲) سوال ساده حل در صفحات ۲۲۸ و ۲۲۹ کتاب درسی

جواب سوال ۳) حل در صفحات ۲۹۲ و ۲۹۳ کتاب درسی، جواب نهایی به صورت:

$$A_T(t) = \frac{۸t}{\sqrt{۱ + ۸t^۲}} \ , \ A_N(t) = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ + ۸t^۲}}$$

(در هر دو امتحان میان ترم این سوال بدون تغییر مطرح شده بود.)

جواب سوال ۴) داریم: $f(x,y) = x^۲ - ۲xy + \frac{۱}{۳}y^۳ - ۳y$

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزیی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow x = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ۰ \Rightarrow -۲x + y^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = ۳, -۱ \end{cases}$$

(چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x = y$)

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(۱-, ۱-)$, $(۳, ۳)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم: $A = f_{xx} = ۲ \ , \ B = f_{xy} = -۲ \ , \ C = f_{yy} = ۲y \Longrightarrow \Delta = B^۲ - AC$

برای نقطه بحرانی $(۳, ۳)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۶ \times ۲) = ۴ - ۱۲ = -۸ < ۰$، از طرفی داریم: $A = ۲ > ۰$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(۱-, ۱-)$ داریم: $\Delta = (-۲)^۲ - (۲ \times -۲) = ۴ + ۱۲ = ۸ > ۰$، لذا نقطه زین اسبی است.

(این سوال بدون تغییر سوال چهارم سوالات حل شده تایپی بود که به دانشجویان توصیه شده بود.)

جواب سوال ۵) با توجه به فرض C یک منحنی ژردان است و $F = ydx + xydy$ میدانی برداری است که بر $x^۲ + y^۲ = ۴$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است و $x^۲ + y^۲ = ۴$ دارای جهت استاندارد است در اینصورت

$$\begin{aligned}
\oint_C ydx + xydy &= \int\int_C (\frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}) \, dx \, dy \\
&= \int\int_C (y - ۱) \, dx \, dy \\
&= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲} (rsin\theta - ۱) \, rdr \, d\theta = \int_۰^{۲\pi} [\frac{r^۳}{۳}sin\theta - \frac{r^۲}{۲}]_۰^۲ d\theta \\
&= \int_۰^{۲\pi} (\frac{۸}{۳}sin\theta - ۲)d\theta \\
&= -\frac{۸}{۳}cos\theta - ۲\theta|_۰^{۲\pi} \\
&= (-\frac{۸}{۳}(۱) - ۴\pi) - (-\frac{۸}{۳}(۱) - ۰) = -۴\pi
\end{aligned}$$

(مشابه مثال حل شده در جزوه برای قضیه گرین که در کلاس درس توصیه شده بود.)

با آرزوی موفقیت و شادکامی /اوج بگ / بهار ۱۳۹۳