(۱) معادلات پارامتری خطی را بنویسید که محل تلاقی دو صفحه $۳x-۲y+۴z=۲$ و $۲x+y-۳z=۱۳$ باشد.

(۲) وارون ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ را به روش الحاقی به دست آورید.

(۳) فرض کنید $\overrightarrow{R(t)}=t^۲\overrightarrow{i}+t\overrightarrow{j}+t^۲\overrightarrow{k}$ ، مولفه های مماسی و قائم شتاب را تعیین کنید.

(۴) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و زین اسبی تابع زیر را در صورت وجود به دست بیاورید.

$$f(x,y)=x^۲-۲xy+\frac{۱}{۳}y^۳-۳y$$

(۵) فرض کنید C دایره $x^۲+y^۲=۴$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، انتگرال $\int ydx+xydy$ را حساب کنید.

پاسخنامه تشریحی

جواب سوال ۱) سوال ساده حل در صفحات ۱۸۹ و ۱۹۰ کتاب درسی

جواب سوال ۲) سوال ساده حل در صفحات ۲۲۸ و ۲۲۹ کتاب درسی

جواب سوال ۳) حل در صفحات ۲۹۲ و ۲۹۳ کتاب درسی، جواب نهایی به صورت:

$$A_T(t)=\frac{۸t}{\sqrt{۱+۸t^۲}}\ ,\ A_N(t)=\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۱+۸t^۲}}$$

(در هر دو امتحان میان ترم این سوال بدون تغییر مطرح شده بود.)

جواب سوال ۴) داریم: $f(x,y)=x^۲-۲xy+\frac{۱}{۳}y^۳-۳y$

ابتدا نقاط بحرانی را می یابیم، برای این منظور بایستی مشتقات جزیی همزمان صفر شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=۰\Rightarrow ۲x-۲y=۰\Rightarrow x=y \\ \frac{\partial f}{\partial y}=۰\Rightarrow -۲x+y^۲-۳=۰\Rightarrow y^۲-۲y-۳=۰\Rightarrow y=۳,-۱ \end{cases}$$

(چون دو معادله همزمان برقرارند، قرار می دهیم $x=y$)

در نتیجه نقاط بحرانی عبارتند از: $(-۱,-۱)$, $(۳,۳)$. حال به بررسی نوع نقاط می پردازیم. برای این منظور مشتقات دوم را در نقاط بیان شده، به دست می آوریم: $A=f_{xx}=۲\ ,\ B=f_{xy}=-۲\ ,\ C=f_{yy}=۲y\Longrightarrow \Delta=B^۲-AC$

برای نقطه بحرانی $(۳,۳)$ داریم: $\Delta=(-۲)^۲-(۲\times ۶)=۴-۱۲=-۸<۰$، از طرفی داریم: $A=۲>۰$ لذا این نقطه مینیمم نسبی است.

برای نقطه بحرانی $(-۱,-۱)$ داریم: $\Delta=(-۲)^۲-(۲\times -۲)=۴-۱۲=۸>۰$، لذا نقطه زین اسبی است.

(این سوال بدون تغییر سوال چهارم سوالات حل شده تایپی بود که به دانشجویان توصیه شده بود.)

جواب سوال ۵) با توجه به فرض C یک منحنی ژردان است و $F=ydx+xydy$ میدانی برداری است که بر $x^۲+y^۲=۴$ به طور پیوسته دیفرانسیل پذیر است و $x^۲+y^۲=۴$ دارای جهت استاندارد است در اینصورت

$$\begin{aligned} \oint_C ydx+xydy &= \int\int_C (\frac{\partial xy}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y})\,dx\,dy \\ &= \int\int_C (y-۱)\,dx\,dy \\ &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^۲ (rsin\theta-۱)\,rdr\,d\theta=\int_۰^{۲\pi}[\frac{r^۳}{۳}sin\theta-\frac{r^۲}{۲}]_۰^۲ d\theta \\ &= \int_۰^{۲\pi}(\frac{۸}{۳}sin\theta-۲)d\theta \\ &= -\frac{۸}{۳}cos\theta-۲\theta|_۰^{۲\pi} \\ &= (-\frac{۸}{۳}(۱)-۴\pi)-(-\frac{۸}{۳}(۱)-۰)=-۴\pi \end{aligned}$$

(مشابه مثال حل شده در جزوه برای قضیه گرین که در کلاس درس توصیه شده بود.)

با آرزوی موفقیت و شادکامی /اوج بگ / بهار ۱۳۹۳