ایان استیوارت، دیوید تال

مبانی ریاضیات

ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

مبانی ریاضیات

ایان استیوارت، دیوید تال

ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی

مرکز نشر دانشگاهی

The Foundations of Mathematics
Ian Stewart and David Tall
Oxford Universityt Press 1977

مبانی ریاضیات
تألیف ایان استیوارت، دیوید تال
ترجمهٔ دکتر محمدمهدی ابراهیمی
ویراستهٔ دکتر مهدی بهزاد
ناظر چاپ: حمیدرضا دمیرچی‌لو
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۵
چاپ هشتم ۱۳۸۸
تعداد ۲۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: معراج
۴۲۰۰ تومان
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

استوارت، ایان Stewart, Ian
مبانی ریاضیات / ایان استیوارت، دیوید تال؛ ترجمه محمدمهدی ابراهیمی. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.
هفت، ۳۲۰ ص. : مصور، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۵۳: ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۲۴)
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: The Foundations of mathematics.
واژه‌نامه.
کتابنامه: ص. [۲۹۲].
نمایه
چاپ هشتم: ۱۳۸۸.
ISBN 978-964-01-0253-4
۱. منطق ریاضی. الف. تال، دیوید ارم Tall, David Orme ب. ابراهیمی، محمدمهدی، ۱۳۲۶ ــ ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
QA۹/الف۵م۲ ۵۱۱/۳
۱۳۶۵
کتابخانهٔ ملی ایران ۹ـ۶۶م**

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار مؤلف	۱
قسمت I : زمینهٔ شهودی	۵
۰۱ تفکر ریاضی	۷
تشکل مفهوم	۸
طرح	۱۰
خلاصه	۱۲
تمرین	۱۳
۰۲ دستگاههای اعداد	۱۷
عدد طبیعی	۱۷
کسر	۱۹
عدد صحیح	۱۹
عدد گویا	۲۰
عدد حقیقی	۲۱
محاسبهٔ غیردقیق در ترسیم عملی	۲۳
الگویی نظری برای خط حقیقی	۲۴
بسطهای اعشاری متفاوت برای اعداد متفاوت	۲۶
عدد گویا و عدد گنگ	۲۷
نیاز به اعداد حقیقی	۲۸

عنوان	صفحه
حساب اعداد اعشاری	۳۰
دنباله	۳۱
خواص ترتیب و قدرمطلق	۳۲
همگرایی	۳۴
کمال	۳۶
دنبالهٔ نزولی	۳۸
بسطهای اعشاری متفاوت برای یك عدد حقیقی	۳۸
مجموعهٔ کراندار	۴۰
تمرین	۴۲
قسمتII : آغازصورتگرایی	۴۵
۳. مجموعه	۴۷
عضو	۴۸
زیرمجموعه	۵۳
آیامجموعه‌ای جامع وجود دارد؟	۵۵
اجتماع و اشتراك	۵۶
متمم	۶۲
مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها	۶۵
تمرین	۶۶
۴. رابطه	۶۹
زوج مرتب	۷۰
رابطه	۷۶
رابطهٔ هم‌ارزی	۷۹
حساب به‌پیمانهٔ n	۸۳
رابطهٔ ترتیبی	۸۷
تمرین	۹۰
۵. تابع	۹۳
چند تابع متداول	۹۴
مفهوم کلی تابع	۹۴
خواص کلی توابع	۹۸
نمودار تابع	۱۰۱

عنوان	صفحه
ترکیب توابع	۱۰۶
توابع وارون	۱۰۸
تحدید	۱۱۲
دنباله و nتایی	۱۱۳
تابع چند متغیره	۱۱۴
عمل دوتایی	۱۱۴
خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها	۱۱۶
تمرین	۱۱۷
۶. منطق ریاضی	۱۲۱
گزاره	۱۲۳
گزاره‌نما	۱۲۴
هر و بعضی	۱۲۵
بیش از یك سور	۱۲۷
نقیض یك گزاره	۱۲۹
دستور منطقی: رابطها	۱۳۱
ارتباط با نظریهٔ مجموعه‌ها	۱۳۳
فرمول گزاره‌های مرکب	۱۳۶
استنتاج منطقی	۱۴۰
اثبات	۱۴۲
تمرین	۱۴۴
۷. اثبات ریاضی	۱۴۹
دستگاه اصل موضوعی	۱۵۴
سؤالهای امتحانی	۱۵۶
تمرین	۱۵۶
قسمت III : عرضهٔ اصل موضوعی دستگاهها	۱۵۹
۸. اعداد طبیعی و اثبات به‌روش استقرا	۱۶۱
اعداد طبیعی	۱۶۲
تعریف به‌استقرا	۱۶۴
قواعد حساب	۱۶۷
ترتیب در اعداد طبیعی	۱۷۳

عنوان	صفحه
یکتایی $\mathbb{N}_0$	۱۷۵
شمارش	۱۷۶
ابتکار فون نویمان	۱۷۸
صورتهای دیگر استقرا	۱۸۰
تقسیم	۱۸۲
تجزیه به‌عوامل	۱۸۳
الگوریتم اقلیدسی	۱۸۴
تمرین	۱۸۶
۹. اعداد حقیقی	۱۹۳
استنتاجهای مقدماتی مربوط به‌حساب	۱۹۶
استنتاجهای مقدماتی درمورد ترتیب	۱۹۸
ساختن اعداد صحیح	۱۹۹
ساختن اعداد گویا	۲۰۲
اعداد حقیقی	۲۰۴
دنبالهٔ اعداد گویا	۲۰۴
ترتیب در $\mathbb{R}$	۲۰۹
کامل بودن $\mathbb{R}$	۲۱۰
تمرین	۲۱۲
۱۰. اعداد حقیقی به‌عنوان یك میدان مرتب کامل	۲۱۵
چند مثال از حلقه و میدان	۲۱۶
چند مثال از حلقه و میدان مرتب	۲۱۹
بازهم یکریختی	۲۲۱
ذکر چند صفت مشخصه	۲۲۳
ارتباط با دستگاههای شهودی	۲۲۹
تمرین	۲۳۰
۱۱. اعداد مختلط وماورای آن	۲۳۳
دورنمای تاریخی	۲۳۴
مزدوج	۲۳۹
قدرمطلق	۲۳۹
چهار گانهای همیلتون	۲۴۳
نیم گروه و گروه	۲۴۷

عنوان	صفحه
حلقه و میدان	۲۴۹
فضای برداری	۲۴۹
راه‌آینده	۲۵۵
تمرین	۲۵۶
۱۲. عدد اصلی	۲۵۹
قضیهٔ شرودر برنشتاین	۲۶۹
حساب اعداد اصلی	۲۷۲
ترتیب اعداد اصلی	۲۷۶
تمرین	۲۷۸
قسمت IV : تحکیم مبانی	۲۸۱
۱۳. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها	۲۸۳
برخی از مشکلات	۲۸۴
مجموعه وکلاس	۲۸۵
خود اصول موضوع	۲۸۶
اصل موضوع انتخاب	۲۸۸
سازگاری	۲۸۹
تمرین	۲۹۰
منابع	۲۹۲
اسامی خاص	۲۹۳
فهرست نمادها	۲۹۵
واژه‌نامه انگلیسی به‌فارسی	۲۹۹
واژه‌نامه فارسی به‌انگلیسی	۳۰۷
فهرست راهنما	۳۱۵

پیشگفتار مؤلف

این کتاب جهت خوانندگانی نوشته شده است که در مرحلهٔ گذار از ریاضیات دبیرستانی به نوع کاملاً پخته‌ای از تفکر که خاص ریاضیدانان حرفه‌ای است، هستند: برای دانشجویان سال اول دانشگاهها، پلی تکنیکها، وکالجها مفید است، و نیز برای دیپلمه‌های دبیرستان که قصد ادامهٔ تحصیل در ریاضیات را دارند. برای گروه وسیعتر شامل آنهایی که پایه‌ای در ریاضیات مقدماتی (در سطح دبیرستان) دارنـد و طالب بصیرت در موضوعات بنیادی و روندهای فکری ریاضی هستند هم جالب است.

اصطلاح «مبانی»، که در این کتاب به‌کار می‌رود، دارای معنایی وسیعتر ازمعنایش در حرفهٔ بنایی است. نه فقط ریاضیات را برپایهٔ این مبانی قرار می‌دهیم؛ بلکه، مانند سیمان که ساختمان را سرپا نگه‌می‌دارد و درحقیقت از آن ساخته می‌شود، این مبانی هم درتمام سطوح حضور دارند. مبانی ریاضیات، با این تعبیر، غالبـاً به صورت تمرینی اضافی در زمینهٔ صورتگرایی ریاضی ـ منطق صوری ریاضی، نظریهٔ صوری مجموعه‌ها، توصیف اصل موضوعی دستگاههای اعداد، وساختن تکنیکیشان ـ به‌دانشجویان ارائه می‌شود؛ وهمهٔ اینها با نمادگذاری ساختگی و استادانه‌ای عرضه می‌شوند. گاهی، به این دلیل که صورتگرایی محض برای دانشجویان تازه‌کار بسیار مشکل است، ایده‌ها را به طور «غیرصوری» ارائه می‌کنیم. در سایر موارد هم عمدتاً این امر صحت دارد، ولی با دلیلی کاملاً متفاوت.

روش صوری محض، حتی با شهودگرایی سطحی، ازنظر روانی برای مبتدیان مناسب نیست، زیرا این روش واقعیتهای روند یادگیری را در نظر نمی‌گیرد. تمرکز روی نکات فنی، بـه قیمت بها ندادن بـه نحوهٔ تشکل ایده‌هـا، تنها یك روی سکه را نشان می‌دهد. ریاضیدان حرفه‌ای صرفـاً در قالب نمادپردازی، خشك وکلیشه‌ای نمی‌اندیشد: برعکس، افکارش متوجهٔ قسمتهایی از یك مسئله می‌شود کـه تجربه‌اش آنها را منابع اصلی اشکال‌کار می‌داند. هنگامی که با مسئله‌ای درگیراست، دقت منطقی دردرجهٔ دوم اهمیت قرارمی‌گیرد: تنها پس از اینکه مسئله، با هرقصد و منظوری، بـه طور شهودی حل شد، آنگاه ایده‌های مربوط، اثبات صوری را به‌وجود می‌آورند. طبیعتاً، این قاعده استثناهایی هم دارد: قسمتی ازمسئله‌ای را می‌توان قبل از حتی درك شهودی بقیهٔ قسمتها صوری کرد؛ و راستی مثل اینکه

برخی از ریاضیدانان باکمك نماد فکر می‌کنند. بـا این وجود ، این گفته هنوز هم عمدتاً معتبر است.

هدف این کتاب آشنا ساختن دانشجویان با طرز تلقی ریاضیدانان حرفه‌ای با مسائلشان است. این امر مطالب «بنیادی» استانده را هم مطرح می‌سازد؛ ولی هدف ما عرضهٔ روند صوری، بـه عنوان محصول طبیعی الگوی زمینه‌ای ایده‌هاست. یك دیپلمه قواعـد ریاضی بسیاری را می‌داند، هدف ما استفاده از این دانش است جهت تبدیل مشهودات ریـاضی او به ابزاری مؤثر که بتواند قلب مسائل را بشکافد. دیدگاه ما کاملاً متضاد دیدگاهی است که (اغلب) به دانشجو گفته می‌شود «تمام چیزهایی راکه تا به حال آموخته‌ای فراموش کن، آنها نادرست هستند، ما از ابتدا شروع می‌کنیم، ولی این بار آن را درست انجام می‌دهیم». نه تنها چنین حرفی بر اعتماد دانشجو صدمه می‌زند، نادرست هم هست. به علاوه، این حرف بسیار گمراه کننده است: دانشجویی که حقیقتاً چیزهایی راکه تاکنون آموخته است به دست فراموشی می‌سپارد خود را در وضع تأسف باری می‌یابد.

معرفت روند یادگیری قیـود بسیاری بر روشهای ممکن آموزش یك مفهوم ریاضی تحمیل می‌کند. اغلب صرفاً مناسب نیست که با تعریفی دقیق آغاز کنیم، زیرا محتوای تعریف بدون توضیح بیشتر و ارائهٔ مثالهای مناسب، قابل درك نیست.

این کتاب به چهار قسمت تقسیم شده است تـا طرز تفکر موردنیاز در هرمرحله را مشخص سازد. قسمت I در سطحی غیرصوری، جهت آماده کردن صحنه است. فصل اول با آزمایش خود روند یادگیری، فلسفهٔ زمینهٔ کتاب را عرضه می‌کند. این راه مستقیم وصاف نیست؛ ضرورتاً راهی است ناهموار و سنگلاخی، با راههای فرعی وکوچه‌های بن‌بست. دانشجویی که این امر را درك کند بهتر می‌تواند با مشکلات روبرو بشود. فصل دوم مفهوم شهودی اعداد حقیقی را بـه عنوان نقاط روی خط اعـداد تحلیل می‌کند، آن را با ایدهٔ اعشاری بی‌پایان پیوند، و اهمیت خاصیت کمال اعداد حقیقی را توضیح می‌دهد.

در قسمت II نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق لازم جهت هدف مورد نظرعرضه می‌شود، و به ویژه روابط (وبه‌خصوص روابط هم‌ارزی و روابط ترتیبی) و توابع مورد توجه قرار می‌گیرد. پس‌ازقدری منطق نمادی بنیادی، «اثبات» را مورد بحث قرار می‌دهیم، وتعریفی صوری برایش ارائه می‌کنیم. پس از آن به تحلیل یك اثبات واقعی می‌پردازیم تا درحد روشنترکردن جریان کلی اثبات نشان دهیم چطور سبك ریاضی معمول مراحل عادی را در واقع به‌زمینهٔ ضمنی منتقل می‌کند. هم مزایا و هم خطرات این شیوه نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قسمت III در مورد ساخت صوری دستگاههای اعـداد ومفاهیم مربوط است. بـا بررسی اثباتهای استقرایی کـه به اصول پئانو مربوط بـه اعداد طبیعی منجر می‌شود آغاز می‌کنیم ونشان می‌دهیم که ازاینها وبا تکنیکهای نظریهٔ مجموعه‌ها چطور می‌توانیم اعداد صحیح، اعدادگویا، و اعداد حقیقی را بسازیم. درفصل بعد نشان می‌دهیم با صوری کردن اعداد حقیقی به عنوان یك میدان مرتب کامل، چگونه می‌توانیم این روند را وارونه کنیم.

ثابت می کنیم که ساختهای به دست آمده اساساً یکتا هستند، و ارتباط بین‌ساختهای صوری و همتاهای شهودیشان از قسمت I را هم به‌دست می‌دهیم. سپس به بررسی اعداد مختلط، چهارگانها، و ساختهای عمومی‌جبری و ریاضی می‌پردازیم، وبا این ترتیب منظرهٔ کاملی‌از ریاضیات پیش پایمان گذاشته می‌شود. بحثی از اعداد اصلی نامتناهی،که از ایدهٔ شمارش منشاء می گیرد، ما را درمسیر کارهای پیشرفته‌ترقرارمی‌دهد. این مطلب همچنین‌بیان می کند که هنوزکار صوری کردن ایده‌ها کامل نشده است.

قسمت IV به‌طور مختصر این مرحلهٔ آخر را بررسی می کند: صورتگرایی نظریهٔ مجموعه‌ها. یك مجموعهٔ ممکن‌ازاصول موضوع را ارائه می کنیم وبه بررسی‌اصل‌موضوع انتخاب، اصل پیوستار، و قضیه‌های گودل می‌پردازیم.

در سراسر کتاب علاقهٔ ما بیشتر به ایده‌های پشت نمای صوری است تا به جزئیات داخلی زبان صوری به‌کار رفته. شیوه‌ای‌که برای ریاضیدانان حرفه‌ای مناسب است اغلب برای دانشجویان مناسب نیست. (رشته آزمونهایی که توسط یکی از مؤلفین با کمك دانشجویان سال اول دانشگاه انجام گرفته است عملاً صحت این ادعا را بسیار روشن می‌سازد!) لذا این کتاب عرضهٔ منطقی صرف نیست که از عناصر منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها فراهم شده باشد (البته درپایان دانشجویان در وضعیتی‌خواهند بودکه ازچگونگی‌دستیابی به این نحوهٔ عمل‌لذت ببرند). ریاضیدانان آن طورکه از ظاهریك‌کتاب صوری پیداست رسمی فکر نمی کنند. مغزریاضی‌قدرت خلاقیت دارد و بسیار پیچیده است؛ درنتیجه‌گیری جهش می کند و همیشه دنباله‌ای از مراحل منطقی را طی نمی‌نماید. تنها وقتی‌که همه‌چیز درك شد ساخت منطقی‌ظاهرمی‌شود. نشان دادن عمارت‌کامل‌شده ونه نشان دادن دار بستهای موردنیاز، محروم‌کردن دانشجوست از ابزاری‌که هنگام ساختن ایده‌های ریاضی خودش به آن نیاز دارد.

ای.اس. و د.ت.
وارویك
اکتبر۱۹۷۶

قسمت I

زمینهٔ شهودی

هدف نهایی این کتاب پروراندن توصیف دقیق و منطقی مفاهیم بنیادی ریاضیات، به‌خصوص دستگاههای گوناگون اعداد و مفهوم اثبات، است. دو فصل اول، شامل بحثی به روشی غیر صوری و شهودی دربارهٔ مطالبی که احتمالاً دانشجویان از آنها آگاهی دارند، آغازگر این مطالب است. داشتن ایده‌ای روشن از آنچه که ما سعی درصوری کردنشان داریم جهت درك خود فرایند صوری بسیار مفید است.

به بیان استعاره: می‌خواهیم یك ساختمان بسازیم. دراین قسمت ازکتاب به برآورد زمین می‌پردازیم و تصاویرمقدماتی عمارت موردنظر را رسم می‌کنیم. یا می‌خواهیم گیاهی بکاریم؛ لذا باید مطمئن شویم که دانه و خاکی حاصلخیز برای کشت داریم.

لذا در این دوفصل استفاده ازدانش ریاضی‌خود، همچون عملهای حساب، را بدون اینکـه نگران مبنای منطقیشان باشیم مجاز می‌شمریم. هدف ما کشف چند نتیجه است، و یالااقل مشهوداتمان برای مطالب بعدی.

۱

تفکر ریاضی

ریاضیات عملی نیست که با کامپیوتر و درخلأ[۱] انجام گیرد. یك فعالیت بشری است که در روشنایی قرنها تجربه، وبا استفاده ازمغز بشر، با تمام قدرتها وضعفهایش، انجام می‌پذیرد. ممکن است این را یك منبع الهام‌بخش و شگفتی بدانید، یا نقصی کـه باید هرچه سریعتر اصلاح شود، هرطورکه مایل باشید؛ ولی‌این‌حقیقت باقی می‌ماندکه باید با همین بسازیم.

مشکل این نیست‌که بشر نمی‌تواند به طور منطقی فکرکند. مشکل مربوط به انواع مختلف ادراك است. یك نـوع ادراك، درك منطقی و مرحله بـه مرحلهٔ یك اثبات صوری ریاضی است. گرچـه هرمرحله را می‌توان بررسی‌کرد ولی این نـوع ادراك ممکن است حاوی ایده‌ای از چگونگی ارتباط این مراحل به هم نباشد؛ ازکل اثبات، و از دلایلی‌که در بدو امر به آن منجر می‌شود، ما را آگاه نسازد.

نوع دیگری از ادراك، درك‌کلیات است که ازآن می‌توانیم، گویی با یك نگاه، به کل‌برهان پی‌ببریم. این‌امرمستلزم این‌است‌که ایده‌های موردنظر را درقالب‌کلی‌ریاضیات بیاوریم، و آنها را با ایده‌های مشابه از موضوعات دیگر مرتبط سازیم.

دلایل لزوم این درك جامع صرفاً زیبایی‌یا آموزشی نیست. فکربشرتمایلی خطرناك

---

۱. برای مثالی سرگرم‌کننده و آموزنده از یك اثبات مرحله‌ای،که هرمرحله به‌خودی خود منطقی است، ومرحلهٔ آخرنتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد ولی مشخص نمی‌کندکه چرا قضیه صحیح است ویا در ابتدا چه طور به‌فکرخطورکرده است، به‌صفحهٔ ۳۰ کتاب **مطالب‌گوناگون ریاضیات اثر** ج. ا. لیتل‌وود (J. E. Littlewood) رجوع کنید.

و ظاهراً اجتناب‌ناپذیر به انجام خطا دارد. خطای واقعیت، خطای قضاوت، وخطای تفسیر. در روش مرحله‌ای ممکن است متوجهٔ این واقعیت نشویم که سطری نتیجهٔ منطقی سطرهای قبل نیست. ولی، در قالب کلی اگرخطایی منجر به نتیجه‌ای شودکه در تصویر کلی نگنجد، این مغایرت باعث می‌شودکه به جستجوی خطا بپردازیم.

مثلاً، اگربخواهیم ستونی ازصد عدد ده رقمی‌را جمع کنیم (فرض کنیم همهٔ اعداد صحیح و مثبت هستند)، به جای به دست آوردن جواب درست که فرض کنیم ۱۳۷۵۶۸۳۰۴۴۵۲ باشد، به سادگی ممکن است در عملیات خطا کنیم و عدد ۱۳۷۵۶۸۸۰۴۴۵۲ را به دست آوریم. در بازنویسی این جواب ممکن است برای بار دوم مرتکب خطا شویم و بنویسیم ۱۳۳۷۵۶۸۸۰۴۴۵۲ . هردو خطا ممکن است پنهان بمانند. اولی به احتمال خیلی زیاد نیاز به بررسی مرحله به مرحله‌ای محاسبه دارد. ولی، دومی را، به این دلیل که مغایر قالب کلی حساب است، می‌توان پیداکرد. مجموع ۱۰۰ عدد ده رقمی حداکثر عددی دوازده رقمی است

(زیرا ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۰۰ = ۹۹۹۹۹۹۹۹۹ × ۱۰۰)

درحالی‌که جواب پیشنهادی نهایی سیزده رقم دارد.

نه‌تنها دراعمال عددی، بلکه درکلیهٔ جنبه‌های درک بشری، ترکیبی ازدرک مرحله‌ای و درک جامع است که حایز بهترین شانس یافتن خطاست. دانشجویان باید بر هردو روش تسلط یابند تا درک کاملی از مطالب به دست آورند و در کاربرد آنها ورزیده شوند. درک مرحله‌ای نسبتاً ساده به دست می‌آید؛ در هر زمان صرفاً یك موضوع را در نظر می‌گیریم وآن قدرتمرین می‌کنیم که ایده جا بیفتد. درک جامع بسیار مشکلتراست؛ این روش‌مستلزم ساختن قالبی یکپارچه از تعداد زیادی اطلاعات جزئی است. از آن بدتر این است که پس از پروردن قالب خاصی که در مرحله‌ای مناسب موضوع است، اطلاعات جدیدی به دست آیدکه مغایرقالب باشد. دراغلب موارد این مطلب به این معنی‌است که اطلاعات جدید غلط است ولی‌گاهی هم دلالت بر ناقص بودن قالب موجود دارد. اطلاعات جدید هرچه اساسی‌تر باشد، احتمال مناسب نبودن قالب بیشتر است، و لذا دیدگاه کلی موجود باید اصلاح شود.

دانشجویان باید انتظاربروز این‌امررا داشته‌باشند. درصورت بروز، فرایند یادگیری همواره با احساس سردرگمی و ازدست دادن اعتماد همراه است. هدف ازدرک ریاضیات جدید این‌است که اعتماد خود را تا رفع سردرگمی از دست ندهیم. برای انجام این‌امر، توانایی تشخیص موقعیت درهنگام وقوع بدما کمك می‌کند. وموضوع این فصل‌هم همین‌است.

تشکل مفهوم

همهٔ ریاضیدانان وقتی‌متولد می‌شدند بسیارجوان بودند. این‌سخن بدیهی تعبیری غیربدیهی دارد: حتی خبره‌ترین ریاضیدانان هم فرایند پیچیدهٔ فراگیری مفاهیم ریاضی را پشت سر گذاشته‌اند. ریاضیدان وقتی برای اولین‌بار با مسئله‌ای یا مفهوم جدیدی مواجه می‌شود آنها

را به ذهن خود می‌سپارد و به تجربیات خود رجوع می‌کند تا ببیند آیا چیزی نظیر آن را قبلاً دیده است. این مرحلهٔ کاوش گرایانه و خلاق ریاضیات هرچیزی جز مرحلهٔ منطقی می‌تواند باشد. تنها وقتی که اجزاء شروع به‌مرتبط شدن می‌کنند و ریاضیدان «احساسی» برای مفهوم، یا مسئله، پیدا می‌کند سیمای نظم هم واردکار می‌شود. سرانجام مرحلهٔ جلا دادن فرا می‌رسد که حقایق اساسی به صورت اثباتی تمیز وجمع وجور مرتب می‌شوند.

به عنوان مثالی علمی، مفهوم «رنگ» را درنظر می‌گیریم. تعریف لغوی این مفهوم چیزی شبیه این است: احساس حاصل از پرتوهای نور تجزیه شده در چشم. هیچ کس سعی نمی‌کند که مفهوم رنگ را با ارائهٔ این تعریف به کودک بیاموزد. («خوب، علی، بگو ببینم چه احساسی از تابش تجزیهٔ نوراین آب نبات چوبی درچشمانت پدید می‌آید...؟») ابتدا به او مفهوم «آبی» را می‌آموزیم. برای این کاریک توپ آبی، یك در آبی، یك صندلی آبی،... را به او نشان می‌دهیم و همراه هریك کلمهٔ «آبی» را هم بیان می‌کنیم. این عمل را با «قرمز»، «زرد»، «سبز»،... تکرار می‌کنیم، بعد از مدتی او شروع به درك مفهوم می‌کند: به شیئی که قبلاً آن را ندیده است اشاره می‌کنیم و اومی‌گوید «آبی». حال تظریف این امر به «آبی پررنگ»، «آبی کم رنگ»، و غیره‌کار نسبتاً ساده‌ای است. پس از تمرین‌زیاد، برای تثبیت مفهوم رنگهای مختلف دوباره شروع می‌کنیم. «رنگ آن در آبی است. رنگ آن خوك قرمز است. آن گل آلاله چه رنگی دارد؟» اگر بگوید «زرد» در این‌صورت دارد مفهوم «رنگ» را درك می‌کند. هنگامی که کودك رشد می‌کند ومفاهیم علمی را می‌آموزد سرانجام می‌توان طیف نوری را که ازمنشور می‌گذرد به اونشان داد. او طول موج نور را می‌آموزد، و به عنوان دانشمندی‌کامل، قادر است به دقت طول موج نور متناظر با هر رنگ آبی خاصی را تعیین‌کند. اکنون درك او از مفهوم «رنگ» خیلی بیشرفت کرده است؛ البته این نیز برای توضیح رنگ «آبی» به‌کودك کمك نمی‌کند. وجود تعریفی‌دقیق وخالی‌ازابهام برای «آبی» برحسب طول‌موج، درمرحلهٔ شکل‌گیری مفهوم هیچ استفاده‌ای ندارد.

در مورد مفاهیم ریاضی نیز همین‌طور است. خوانندهٔ این‌کتاب تعداد زیادی مفهوم ریاضی‌را درذهنش‌پرورانده است: می‌داند چطوریك معادلهٔ درجهٔ دوم را حل‌کند، چطور نمودار رسم‌کند، چطوریك تصاعد هندسی‌راجمع‌کند. مهارت زیادی درمحاسبات حسابی دارد. قصد ما پروردن این اندوخته از ادراك ریاضی است وبسط این مفاهیم به سطحی کاملتر. برای این امر باید از مثالهایی که از تجربهٔ خواننده به دست می‌آیند استفاده‌کنیم، وبراساس‌این مثالها مفاهیم جدید را معرفی نماییم. وقتی این مفاهیم تثبیت شدند،خود جزئی از تجربهٔ غنی‌تر در می‌آیندکه بر روی آنها می‌توانیم در سطوح بازهم بالاترکارکنیم. اگرچه مسلماً می‌توانیم‌همهٔ ریاضیات را با روشهای صوری برمبنای مجموعهٔ تهی، وبدون استفاده ازهیچ‌اطلاع دیگری، بپرورانیم؛ ولی‌این‌کار برای کسانی که درك قبلی‌از ریاضیات مورد بحث ندارندکاملاً نامفهوم است. یك متخصص با دیدن دستگاهی منطقی که در یك کتاب نوشته شده است می‌تواند بگوید «حدس می‌زنم منظور از آن شیء «صفر» است، پس آن شیء «یك» است، آن یکی«دو» است،... وکل‌این‌اشیاء باید اعداد صحیح باشند،...

آن یکی چیست؟ آهان فکر کنم فهمیدم: باید «جمع» باشد...». یك غیرمتخصص خود را در مقابل توده‌ای از نمادهای رمزی می‌بیند. هرگز کافی نیست که یك مفهوم جدید را تعریف کنیم ولی مثالهایی وافی کـه آن را توصیف کند و به ما بگوید چه می‌توان با آن مفهوم انجام داد، ارائه ننماییم. (البته یك متخصص غالباً در مقامی هست که مثالهایی از خودش ارائه کند، و ممکن است به کمك زیادی احتیاج نداشته باشد.)

طرح

پس، هرمفهوم ریاضی قالبی منظم متشکل از ایده‌هایی است که به طریقی به یکدیگر مرتبط هستند، و از تجربهٔ مفاهیمی که قبلاً تثبیت شده‌اند ناشی می‌شود. روانشناسان چنین قالبهای منظم متشکل از ایده‌هـا را «طرح» می‌نامند. مثلاً، یك کودك ممکن است یاد بگیرد کـه بشمارد («یك، دو، سه، زنگ مدرسه...») وایده‌هایی نظیر «دو شیرینی»، «سه سگ»، ... را نیز فرا می‌گیرد و سرانجام پـی می‌بردکـه دو شیرینی، دوگوسفند، دوگاو در چیزی مشترکند، و آن چیز«دو» است. اوطرحی برای مفهوم «دو» می‌سازد. واین طرح تجربه‌اش: کـه دو دست دارد، دو پـا دارد، هفتهٔ قبل دوگوسفند در مزرعـه دیده است، قافیهٔ زنگ مدرسه «یك، دو،...» است و الی آخر، را دربرمی‌گیرد. این واقعاً بسیار شگفت‌آور است که مغز چه اندازه اطلاعات را روی هم می‌ریزد تا این مفهوم، یا طرح، را تشکیل بدهد. کودك محاسبات ساده را هم یاد می‌گیرد («اگر پنج سیب داشته باشید و دوتای آن را به کسی بدهید، چندتا برایتان می‌ماند؟») و سرانجام طرحی می‌سازدکه مسئلهٔ «پنج منهای دو چند است؟» را حل کند.

حال اگر از او بپرسید «پنج منهای شش چنـد است؟» جواب او «نمی‌توان انجام داد» خواهد بود، یا شاید صرفـاً خنده‌ای تمسخرآمیزکـه انسانی بالـغ و چنین سؤال احمقانه‌ای! این امر به‌این دلیل است که این سؤال درطرحی که کودك برای تفریق ساخته است نمی‌گنجد: او به «پنـج سیب داریم و شش‌تای آن را بـه دیگری می‌دهیم» رجوع می‌کند و نتیجه می‌گیردکـه این عمل امکان‌پذیر نیست. در مرحله‌ای بسیار دورتر مفهوم اعـداد منفی را فرا می‌گیرد، و جواب این سؤال را «منهای یك» می‌دهد. چه شده است؟ طرح اولیهٔ او برای «تفریق» چنان اصلاح شده است که ایده‌های جدید را دربرمی‌گیرد ـ احتمالاً با گرماسنج، یـا حساب بانکداری، یـا چیزی دیگر درك او از این مفهوم تغییر یافته است. طی‌فرایند این تغییر، با مسائل گیج‌کننده‌ای روبرومی‌شود (منهای یك سیب چه شکلی دارد؟) و سرانجام خود را قانـع می‌کندکه (شمردن سیب مانند خواندن‌گرماسنج نیست).

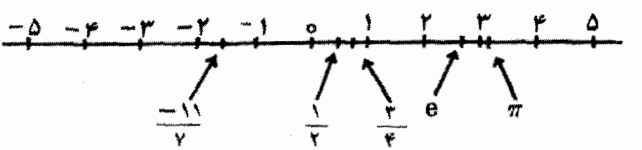
قسمت بزرگی ازفرایند یادگیری این است که طرحهای موجود چنان اصلاح شوند که پذیرای ایده‌های جدید هم باشند. همان‌طورکـه گفتیم این فرایند با دورهٔ سردرگمی همراه است. اگر امکان داشت ریاضیات را بدون مواجههٔ با این مسئله آموخت، زندگی بسیار شیرین می‌شد. متأسفانه، فکـر بشر ظاهراً این‌طور عمل نمی‌کند («جاده‌ای سلطنتی

به‌هندسه وجود ندارد»)[1] و بهترین کار این است که نه فقط سردرگمیها را پیدا کنیم، بلکه علت آنها را نیز دریابیم. در خواندن این کتاب خواننده به دفعات دچار سردرگمی خواهد شد. بی‌شك، گاهی علت آن بی‌دقتی مؤلفین هست؛ ولی اغلب علت آن فرایندکار است. این امر را باید نشانهٔ پیشرفت تلقی کرد ــ مگر اینکه برای مدتی طولانی ادامه یابد!

مثال

این فرایند را می‌توان با نگاهی به توسعهٔ تاریخی مفاهیم ریاضی مجسم کرد، که خودش یك فرایند یادگیری است؛ البته، در این امر به جای یك نفر، نفرهای متعددی درکارند. وقتی که ابتدا اعداد منفی معرفی شدند مخالفتهای زیادی با آنها می‌شد («نمی‌توانیم کمتر از هیچ داشته باشیم») ولی امروز، در این دنیای مالی بدهکار و بستانکار، اعداد منفی جزئی از زندگی روزمره شده‌اند. جالبتر از آن عرضهٔ اعداد مختلط است. لایبنیتز[2] می‌دانست که مربع هرعدد مثبت یا هرعدد منفی همیشه باید مثبت باشد. اگر j ریشهٔ دوم منهای یك باشد، آنگاه $j^2 = -1$، پس j نمی‌تواند عددی مثبت یا منفی باشد. لایبنیتز معتقد بود که j را باید عددی بسیار مرموز تلقی کرد: عددی غیرصفر که نه کوچکتر از صفر است و نه بزرگتر از صفر. این امر به سردرگمی بسیاری منجر شد، و اعداد مختلط را با سوءظن همراه کرد ــ این سوءظن هنوز هم درگوشه وکنار دیده می‌شود. اعداد مختلط به‌آسانی در طرح بسیاری ازمردم در مورد «عدد» نمی‌گنجد، ودانشجویان غالباً دراولین مواجهه مفهوم را رد می‌کنند. ریاضیدانان جدید این مورد را باکمك طرح تعمیم یافته‌ای که در آن این حقایق با معنی هستند بررسی می‌کنند.

تصور کنیم که اعداد حقیقی را طبق معمول روی یك خط علامت گذاری کرده باشیم:



اعداد منفی اعدادی هستند که در سمت چپ صفر قرار دارند واعداد مثبت آنهایی که در سمت راست صفر. j درکجا قراردارد؟ نه درسمت چپ می‌تواند قرارگیرد، ونه درسمت راست. کسانی که در طرحشان اعداد مختلط نمی‌گنجد باید چنین استدلال کنند: این مطلب به این معنی است که j در هیچ کجای این خط قرار نمی‌گیرد. روی این خط جایی برای j وجود ندارد، پس j یك عدد نیست. از آنجا که j یك عدد نیست، مسلماً با استفاده از آن نمی‌توان حساب یا جبر هم انجام داد.

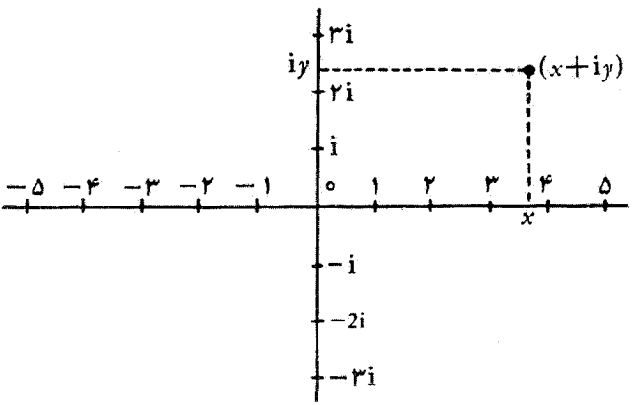
اما، اعداد مختلط را می‌توان به‌عنوان نقاط یك صفحه مجسم کرد. اعداد حقیقی روی «محور xها» قرار می‌گیرند، j به‌فاصلهٔ یك واحد ازمبدأ روی «محور yها» واقع می‌شود،

---

۱. گویا گفتهٔ اقلیدس است به بطلمیوس.

2. Leibniz

و عدد $x+iy$ به فاصلهٔ x واحد ازمحور yها و y واحد از خط حقیقی قرار می‌گیرد (به‌ازای x یا y منفی‌جهت عوض می‌شود). با این ایراد به i («که درهیچ کجای خط نمی‌تواند قرار گیرد») چنین‌مقابله می‌کنیم که البته i روی خط قرارندارد، بلکه به اندازهٔ یك واحد بالای آن است. این‌طرح تعمیم یافته می‌تواند بدون هیچ مشکلی‌حقایق مضطرب‌کننده را دربر گیرد. بنابراین این حقایق دیگر مضطرب کننده نیستند و راه برای درك چگونگی استفاده از اعداد مختلط در مسائل ریاضی باز است.



خلاصه

مشاهدات فوق در زمینهٔ روانشناسی‌انسانها[۱]، تاحد زیادی، ساخت این‌کتاب راتعیین‌کرده است. همیشه میسر نیست که تعریفی لغوی ودقیق برای هرمفهومی‌که با آن مواجه می‌شویم ارائه دهیم. ممکن‌است بگوییم که مجموعه «دستهٔ معینی از اشیاء» است، ولی با این‌کار جنجال برمی‌انگیزیم زیرا «دسته» همان معنی «مجموعه» را دارد.

در مطالعهٔ مبانی ریاضیات باید آماده باشیم که با ایده‌های جدید به تدریج آشنا شویم، نه اینکه با تعریفی جزم شروع کنیم که فوراً درك هم نشود. با ادامه دادن راهمان، درك ما از یك ایده دقیقتر می‌شود. گاهی به مرحله‌ای می‌رسیم که تعریف مبهم اولیهٔ را می‌توانیم به طور دقیقتری فرمول بندی‌کنیم («زرد رنگ نوری است که طول موجش ۵۵۰۰ Å است»). تعریف جدید، که ظاهراً از ایده‌های مبهمی‌که به فرمول‌بندی‌آن منجر شد بهتراست، فریبندگی گمراه‌کننده‌ای دارد. آیا بهتر نیست که با این تعریف زیبا ومنطقی شروع کنیم؟ پاسخ کوتاه «نه» است. ارزش‌این‌تعریف جدید را بدون درك مفاهیم مربوط، مفاهیمی‌که براساس همان ایده‌های مبهم اصلی شکل می‌گیرند، نمی‌توانیم دریابیم. روش کاملاً صوری در ریاضیات ممکن است برای یك متخصص منطق ریاضی‌بسیار مناسب باشد. ولی برای دانشجویان اصلاً مناسب نیست. به جای آن باید معلومات ودرك قابل

---

۱. به‌کتاب اسکمپ [۱۳] رجوع شود.

ملاحظهٔ قبلی‌دانشجویان از ریاضیات را طوری بازسازی‌کردکه برای تفکر پیشرفتهٔ ریاضی مناسب باشد. در این صورت (و این مرحله‌ای است‌کـه امیدواریم در آخرکتاب بـه آن برسیم) تعاریف صوری معانی حقیقی به خود می‌گیرند.

تمرین

غرض ازمثالهای زیربرانگیختن‌خواننده است جهت بررسی فرایند افکار خودش ودیدگاه فعلی‌ریاضیش. بسیاری از این مثالها جواب «صحیحی» ندارند، ولی بسیار آموزنده‌است کـه خواننده حل آنها را بنویسد و در جـای امنی نگهداری‌کند و ببیند در طول مطالعهٔ کتاب چطور عقایدش ممکن است تغییرکنند. آخرین تمرین این‌کتـاب بررسی مجدد این پرسشهاست.

۱. فکرکنیدکه دربارهٔ ریاضیات چطور فکر می‌کنید. اگر با مسئلهٔ جدیدی روبرو شوید که درقالبی‌که باآن‌آشنا هستید می‌گنجد، پاسختان ممکن‌است ازیك منطق قوی برخوردار باشد و درغیراین صورت پاسخ اولیه‌تان می‌تواند متضمن هرچیزی جزمنطق باشد. درحل سه مسئلهٔ زیر بکوشید، و حداکثر تلاش خود را در یادداشت‌کردن مراحلی‌که به جواب منتهی می‌شوند اعمال‌کنید.

(الف) سن پدر علی سه برابر سن علی است. ده سال بعد سن او دو برابر سن علی می‌شود. اکنون علی چند ساله است؟

(ب) به یك قرص مسطح و یك کره با قطرهای یکسان، با فاصله‌های مساوی چنان نگاه می‌کنیم‌که صفحهٔ قرص برخط دید عمود باشد.کدام بزرگتر به نظرمی‌رسد؟

(پ) دویست سربـاز در آرایشی مستطیلی، در ده سطر وبیست ستون، ایستاده‌اند. بلندترین شخص هرسطر را انتخاب می‌کنیم، و بین این ده نفر، سرباز Sکوتاهترین است. به همین‌نحوکوتاهترین‌فرد هرستون را انتخاب می‌کنیم و T بلندترین این‌بیست نفراست. آیا S و T یك شخص هستند؟ اگرنیستند، درموردراندازه‌های S و T چه می‌توانید بگویید؟

طریقهٔ حل این سه مسئله وهمچنین‌جواب نهایی را، اگر به آن رسیده‌اید، یادداشت کنید.

۲. دو مسئلهٔ زیر را درنظربگیرید:

(الف) می‌خواهیم نه مترمربع پارچه را بین پنج خیاط به طور مساوی تقسیم‌کنیم؛ به هریك چقدر پارچه می‌رسد؟

(ب) می‌خواهیم نه بچه را بین پنج زوج به طور مساوی به فرزند خواندگی‌تقسیم کنیم؛ به هر زوج چند بچه داده می‌شود؟

بیان ریاضی هردو مسئله به صورت زیر است:

«x را چنان پیداکنیدکه $۹ = ۵x$»

آیا جواب هردو مسئله یکی است؟ فرمول‌بندی ریاضی چطور می‌تواند بین این دو مورد تمایز قایل‌شود؟

۳. فرض کنید می‌خواهید اعداد منفی را به‌کسی که با این مفهوم آشنا نیست توضیح دهید، و با این جمله روبرو می‌شوید:
«اعداد منفی نمی‌توانند وجود داشته باشند زیرا نمی‌توان کمتر ازهیچ داشت.» چه پاسخی می‌دهید؟

۴. منظور از اینکه بسط اعشاری «عود» می‌کند چیست؟ کسرنظیرعدد اعشاری ...۳۳۳ر۰ چیست؟ نظیرعدد اعشاری ...۹۹۹ر۰ چطور؟

۵. استفادهٔ ریاضی از زبان گاهی با زبان محاوره‌ای تفاوت می‌کند. در مورد هریك از احکام زیر، یادداشت کنیدکه آیا فکرمی‌کنیدآنها صحیح هستند یاغلط. جواب خود رابرای مقایسهٔ با آنچه‌که در فصل ۶ می‌خوانید نگهدارید.

(الف) همهٔ اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول هستند.
(ب) هریك از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول است.
(پ) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ اول هستند.
(ت) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ زوج هستند.
(ث) همهٔ اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ زوج هستند.
(ج) برخی از اعداد ۲، ۵، ۱۷، ۵۳، ۹۷ فرد هستند.

۶. «اگرخوك بال داشت، پرواز می‌کرد.»
آیا این یك استنتاج منطقی است؟

۷. «مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵،... و غیره نامتناهی است.» توضیح دهیدکه کلمهٔ «نامتناهی» در این مورد چه معنایی دارد.

۸. تعریف صوری عدد ۴ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:
ابتدا توجه کنیدکه هرمجموعه با نوشتن‌اعضایش دریك آکولاد { } مشخص‌می‌شود و مجموعهٔ بدون عضو با ∅ نمایش داده می‌شود. آنگاه تعریف می‌کنیم که

$$۴ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}.$$

آیا می‌توانید این تعریف را درك کنید؟ آیا تصورمی‌کنیدکه این تعریف برای مبتدیان مناسب است؟

۹. به نظرشما، کدام یك از عبارات زیر بهترین توضیح برای برابری

$$(-۱)\times(-۱) = +۱$$

است؟

(الف) واقعیتی است علمی که با تجربه کشف شده است،
(ب) تعریفی است فرمول‌بندی شده توسط ریاضیدانان بـه عنوان تنهـا راه معقول به دردخور کردن عملیات حساب،
(پ) استنتاجی است منطقی از اصول موضوع مناسب،
(ت) دارای توضیحی است دیگر.
برای انتخاب خود دلیل ارائه دهید و آن را برای بررسیهای بعدی محفوظ نگهدارید.

۱۰. درضرب دوعدد در یکدیگر، ترتیب مهم نیست، $xy = yx$. آیا می‌توانید این نتیجه را در موارد زیر:
(الف) هرگاه x و y هردو عدد صحیح باشند،
(ب) هرگاه x و y اعدادی حقیقی باشند،
(پ) هرگاه x و y اعداد دلخواهی باشند،
توجیه کنید؟

۲

دستگاههای اعداد

خوانندگان درك منظمی از حساب دستگاههای گوناگون اعداد ــ اعداد شمارشی، اعداد منفی، و غیره ــ دارند. ولی ممکن است فرایند حساب را با دقت منطقی بررسی نکرده باشند. بعداً در این کتاب می‌خواهیم دستگاههای اعداد را در یك قالب اصل‌موضوعی دقیق قرار دهیم. در این فصل راه احتمالی پرورش ایده‌های خوانندگان از این دستگاهها را به‌اختصار مرور خواهیم کرد. گرچه استفادهٔ مداوم از این ایده‌ها بسیاری از مشکلاتی را که هنگام شکل گرفتن مفاهیم بروز می‌کردند برطرف کرده است، این مشکلات در بررسی صوری نیز ممکن است دوباره ظاهر شوند و باید مجدداً مورد توجه قرار گیرند. بنابراین بسیار شایسته است قبل از اینکه گرفتار اصولی کردن مطالب شویم اندکی از وقت خود را هم صرف یادآوری نحوهٔ پرورش آنها کنیم. خوانندگان مجرب ممکن است به‌علت پایین بودن سطح مطالب مورد بحث وسوسه شوند که از مطالعهٔ این فصل صرف‌نظر کنند. لطفاً این کار را نکنید. ایده‌های افراد بالغ همه براساس مطالب ابتدایی نهاده شده‌اند. اگر بخواهیم مبانی ریاضیات را درك کنیم، آگاهی از نحوهٔ پیدایش فرایند فکری ریاضی خودمان با اهمیت است.

عدد طبیعی

اعداد طبیعی همان اعداد شمارشی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ... هستند. کودکان نام این اعداد، و

ترتیب آنها را برحسب عادت می‌آموزند. کودکان در اثر تماس با بزرگسالان به‌معنایی که بزرگسالان برای عباراتی نظیر «دوشیرینی»، «چهارمهره» قایل می‌شوند پی‌می‌برند. استفاده از کلمهٔ «صفر» ومفهوم «هیچ شیرینی» قدری مشکلتر است وکمی بعد از آن حاصل می‌شود.

برای شمارش اشیا، صرفاً به‌نوبت به‌آنها اشاره می‌کنیم و می‌گوییم «یك، دو، سه، . . .» تا زمانی که به‌همهٔ اشیا، هرکدام یکبار، اشاره‌کرده باشیم.

سپس حساب اعداد طبیعی راکه با جمع آغاز می‌شود، می‌آموزیم. در این مرحله «قوانین» بنیادی جمع (که به‌طور جبری به‌عنوان قانون جا به‌جایی $a+b=b+a$، و قانون شرکت‌پذیری $a+(b+c)=(a+b)+c$ بیان می‌شوند) بسته به‌روشی که به‌کار می‌بریم ممکن‌است «واضح» باشند یا واضح نباشند. اگرجمع را برحسب روی هم‌ریختن عملی دسته‌های اشیا وسپس شمارش نتیجه معرفی کنیم، این دوقانون تنها به‌این فرض‌ضمنی وابسته می‌شوندکه تعویض ترتیب اشیا دریك دسته تعداد اشیا را تغییرنمی‌دهد. همچنین یك روش جدید استفاده از چوبهای رنگی‌که طولشان نمایشگر اعداد است (وبا دنبال‌هم قراردادنشان با هم جمع می‌شوند) «نامفهومهای» جا به‌جایی وشرکت‌پذیری را چنان بدیهی می‌سازدکه حتی اشاره به آنها تا حدی سبب گمراهی است. ولی، اگر جمع را به‌کودکان با «ادامهٔ شمارش» بیاموزیم وضع کاملاً فرق می‌کند. برای محاسبهٔ $۴+۳$ او از ۳ شروع می‌کند وبه‌شمارش چهارتای دیگر ادامه می‌دهد: ۴، ۵، ۶، ۷. وبرای محاسبهٔ $۳+۴$ از ۴ شروع می‌کند وسه‌تای دیگر را هم می‌شمارد: ۵، ۶، ۷. حال دلیل اینکه در هردومورد جواب یکی است بسیارپوشیده‌تر است. درواقع برای کودکانی که این روش‌را می‌آموزند اغلب محاسبهٔ عباراتی‌چون $۱۷+۱$ مشکل است، ولی محاسبهٔ $۱+۱۷$ بدیهی است!

اکنون به‌بررسی‌مفهوم ارزش‌مکانی‌ارقام می‌پردازیم. عدد ۳۳ شامل‌دو تا سه است، ولی آنها به‌یك معنی نیستند. باید تأکیدکنیم که این امر صرفاً به‌علامت‌گذاری مربوط می‌شود، وبه‌خود اعداد ارتباطی ندارد. ولی‌این‌علامت‌گذاری بسیارمفید و با اهمیت است. با این علامت‌گذاری (اصولاً) می‌توانیم اعداد به‌دلخواه بزرگ را بنویسیم، و محاسبات را راحت‌انجام دهیم. ولی، توصیف ریاضی‌ودقیق فرایندهای کلی‌حساب درعلامت‌گذاری مکانی هندی‌ـعربی بسیار پیچیده است (به‌همین‌علت است‌که‌کودکان وقت زیادی صرف یادگیری کلی‌آن می‌کنند) و، مثلاً، خیلی مناسب اثبات قانون جا به‌جایی نیست. گاهی‌یك دستگاه ابتدایی‌تر برتریهایی هم دارد. مثلاً، مصریان قدیم نماد | را برای نمایش ۱، ∩ را برای نمایش ۱۰، ⊙ را برای ۱۰۰، ونمادهای دیگری را برای ۱۰۰۰، وغیره به‌کار می‌بردند. هرعدد با تکرار این نمادها نوشته می‌شد: مثلاً ۲۴۷ را به‌صورت

⊙⊙∩∩∩|||||||

می‌نوشتند. جمع کردن در دستگاه مصری آسان است: تنها باید نمادها راکنارهم قرارداد. اکنون نیز قوانین جا به‌جایی وشرکت‌پذیری واضح هستند. ولی این علامت‌گذاری برای محاسبه چندان مناسب نیست. برای بازیافتن‌علامت‌گذاری مکانی از علامت‌گذاری مصری

تنها باید برخی از «قواعد انتقالی»، مانند $\cap = |||||||||$، را پذیرفت وهیچ‌گاه نمادی را بیش از ۹ بار به‌کارنبرد.

قبل از ادامهٔ بحث، به‌معرفی چند نماد می‌پردازیم. مجموعهٔ اعداد طبیعی را با $\mathcal{N}$ نمایش می‌دهیم. نماد $\in$ «عضوی است از» یـا «متعلق است بـه» معنی می‌دهد. پس نماد

$$۲\in\mathcal{N}$$

را «۲ متعلق است به‌مجموعهٔ اعـداد طبیعی»، یا به‌زبان معمولیتر، «۲ عددی طبیعی است» می‌خوانیم.

کسر

کسرها را برای امکان عمل تقسیم معرفی می‌کنیم. تقسیم ۱۲ به ۳ قسمت آسان است: $۴+۴+۴=۱۲$. تقسیم، مثلاً، ۱۱ به ۳ قسمت مساوی‌که هرقسمت عددی طبیعی باشد امکان‌پذیرنیست. ازاین‌رو به‌تعریف کسر m/n که $m,n\in\mathcal{N}$ و $n\neq ۰$ رهنمون می‌شویم. عملهای جمـع وضرب در $\mathcal{F}$، مجموعهٔ کسرها، را هـم می‌توانیم تعریف کنیم: این اعمال به‌صورت جبری عبارتند از

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

این‌نمادگذاری یك نقص دارد وآن اینکه دوکسر به‌ظاهرمتفاوت ممکن است برابرباشند. مثلاً، $۴/۶=۲/۳$. این نقص بـا مجاز دانستن «حذف» عوامل مشترك، وتحویل‌کسر به «ساده‌ترین صورت» برطرف می‌شود.

عدد صحیح

همان‌کاری‌که‌کسرها درتقسیم می‌کنند، اعداد صحیح درتفریق انجام می‌دهند. تفریقی نظیر $۷-۲=?$ جوابی در $\mathcal{N}$ نـدارد. باید اعـداد منفی را معرفی‌کنیم. اعـداد منفی اغلب برحسب «خط اعداد» به‌کودکان معرفی می‌شوند. خطی مستقیم می‌کشیم وآن را به‌فواصل مساوی قسمت می‌کنیم. یکی‌ازاین‌علامتها را ۰ می‌نامیم، سپس اعداد طبیعی۱، ۲، ۳، ... را به‌دنبال هم درطرف راست، و اعداد منفی ۱ —، ۲ —، ۳ —، ... را در طرف چپ صفرعلامت‌گذاری می‌کنیم.



این امر دستگاه تعمیم یافته‌ای از اعداد به‌نام «اعداد صحیح» را به‌دست می‌دهد. هر عدد صحیح یا برابرعددی طبیعی چون n است، یا نمادی است مانند $n-$ که در آن n یك عدد طبیعی است، یـا ۰. حرف $\mathbb{Z}$ را برای نمایش مجموعهٔ اعـداد صحیح به‌کار می‌بریم. (Z نخستین حرف کلمهٔ آلمانی «Zahlen» به‌معنای عدد صحیح است.)

توصیف محاسبه‌در $\mathbb{Z}$ قدری پیچیده است. غالباً برای توصیف اعداد منفی از مفهوم بدهی استفاده می‌کنیم. درضرب اعداد منفی باید این نکته را درنظر بگیریم که «منفی درمنفی مثبت می‌شود».

از یکی دیگر از نمادهای نظریهٔ مجموعه‌ها هم استفادهٔ زودرس می‌کنیم، نماد $\subseteq$ «زیرمجموعه‌ای است از» معنی دارد. پس داریم

$$\mathcal{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

زیرا هرعدد طبیعی عددی صحیح نیزهست. همچنین داریم

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}.$$

گروهی از ریاضیدانان درقیاس با «اعداد صحیح منفی» -۱، -۲، -۳، ...، «اعداد صحیح مثبت» را با $+۱$، $+۲$، $+۳$، و غیره نمایش می‌دهند. جهت دقت، آنها بین اعداد طبیعی که برای شمارش به‌کار می‌روند، و اعداد مثبت فرق می‌گذارند. منصفانه نیست که این افراد را برای قایل‌شدن تمایزی که ممکن است غیرلازم به‌نظر آید مجازات کنیم، زیراگاهی این امر از لحـاظ تکنیکی مفید است. زمانی یك دانشمند یونانی مدعی شدکه ادیسه[1] اثر همر[2] نیست بلکه اثر شخص دیگری همنام اوست. اگردلیل خوبی برای تمایزاین‌دو داشته باشیم (با توجه به‌اینکه به‌هرحال تقریباً هیچ چیزی از همر نمی‌دانیم) این‌امرکاملاً موجه است؛ ولی‌دربیشتر هدفهای عادی این تمایزکاملا بی‌معنی است. همین مطالب را می‌توان درمورد اعداد طبیعی واعداد صحیح مثبت هم بیان‌کرد.

عددگویا

دستگاه $\mathbb{Z}$ برای امکان عمل‌تفریق درهرموردی تعبیه شده است؛ و دستگاه $\mathcal{F}$ برای امـکان عمل تقسیم (به‌استثنای تقسیم برصفر). ولی، درهیچ‌یك از این دو دستگاه انجام هردو عمل همیشه ممکن نیست. برای امکان‌پذیر ساختن هردو عمل یکجا، دستگاه «اعدادگویا» با نماد $\mathbb{Q}$ (حرف تحریری Q، برای «خارج‌قسمت»[3]) را درنظرمی‌گیریم. بسیارشبیه روشی که $\mathbb{Z}$ را از $\mathcal{N}$ به‌دست آوردیم، این‌دستگاه را هم با معرفی «کسرهای منفی» از $\mathcal{F}$ به‌دست می‌آوریم.

هنوزهم‌می‌توان $\mathbb{Q}$ را روی «خط اعداد» بـا علامت‌گذاری کسرها درنقاط مناسب بین اعداد صحیح، منفی‌ها در طرف چپ و مثبتها در طرف راست آن، نمایش داد. مثلاً، طبق شکل، $۴/۳$ دریك سوم فاصلهٔ بین ۱ و ۲ قراردارد:

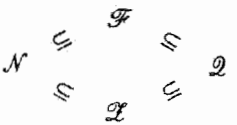
---

1. Odyssey 2. Homer 3. quotient



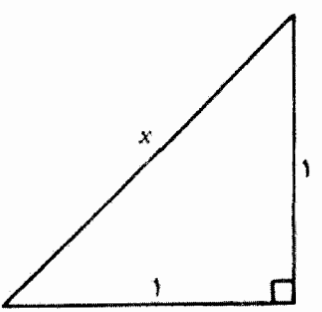
قواعد جمع‌وضرب اعداد گویاهمان قواعد جمع وضرب کسرهاهستند، ولی حال m، n، p، و q می‌توانند اعدادی صحیح باشند، و نه صرفاً اعدادی طبیعی.

هردومجموعه‌های $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{F}$ زیرمجموعهٔ $\mathcal{Q}$ هستند. روابط بین چهاردستگاه اعـدادی راکه تاکنون دیده‌ایم می‌توانیم با شکل زیرنمایش دهیم:



عدد حقیقی

از اعداد می‌توانیـم برای اندازه‌گیری طول، یاکمیتهای دیگرفیزیکی استفاده‌کنیم، ولی یونانیان می‌دانستند پاره خطهایی هم وجود دارندکه طول آنها را نمی‌توان، در تئوری، دقیقاً با اعداد گویا اندازه‌گرفت. آنها هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده ولی‌عمیقشان قضیهٔ فیثاغورث[1] بود. با اعمال این‌قضیه برمثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که **طول**اضلاع کوچکترش ۱ باشد، نتیجه می‌گیریم که طول وترش x است، و $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. حال: عددگویایی چون m/n وجود نداردکه $(m/n)^2 = 2$. برای اثبات این امر از این قضیه



استفاده می‌کنیم‌که هرعدد طبیعی را می‌توان به‌طوریکتا به‌عوامل اول تجزیه‌کرد. مثلاً، می‌توان نوشت

$$۳۶۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵$$

---

1. pythagoras

یا

$$۳۶۰ = ۵ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲$$

ولی به‌هرصورتی که این عوامل را بنویسیم همواره یك ۵، دوتا ۳ وسه‌تا ۲ داریم. با استفاده از علامت‌گذاری توانی می‌نویسیم

$$۳۶۰ = ۲^۳ . ۳^۲ . ۵ .$$

این‌قضیهٔ تجزیه به‌عوامل یکتا را به‌طور صوری درفصل۸ اثبات می‌کنیم، ولی فعلاً صحت آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

اگرعددی طبیعی را به‌عوامل اول تجزیه‌کنیم وسپس آن را به‌توان دوبرسانیم، هر عامل اول به‌تعدادی زوج ظاهرمی‌شود. مثلاً،

$$(۳۶۰)^۲ = (۲^۳ . ۳^۲ . ۵)^۲ = ۲^۶ . ۳^۴ . ۵^۲,$$

و توانهای ۶، ۴، و ۲ همه زوج هستند. اثبات کلی این مطلب چندان مشکل نیست.

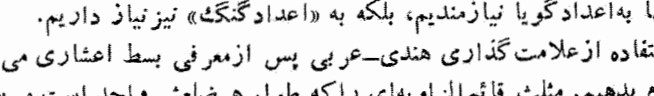
حال عددگویای دلخواه m/n را در نظرمی‌گیریم و آن را به‌توان دو می‌رسانیم. (از آنجاکه مربع m/n همان مربع $m/n-$ است، می‌توان فرض‌کردکه m و n مثبت هستند.) $m^۲$ و $n^۲$ را تجزیه و درصورت امکان عوامل مشترك صورت ومخرج را حذف می‌کنیم. اگرعدد اولی‌چون p حذف شود، آنگاه چون توان هرعدد اول زوج است پس $p^۲$ حذف می‌شود. ازاین‌رو پس‌از حذف نیزتوان اعداد اول باقیمانده زوج هستند. ولی $(m/n)^۲$ باید برابر ۲ گردد، که شامل یك عدد اول (همان۲) است، که تنها یکبار ظاهر می‌شود (و توانی فرد دارد).

نتیجه می‌گیریم‌که مربع هیچ عددگویایی نمی‌تواند برابر ۲ باشد، ولذا طول وتر مثلث مفروض‌عددی‌گویا نیست.

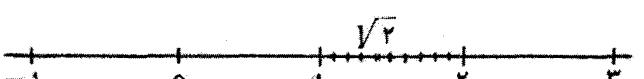
با استفاده از قدری بیشترنمادگرایی جبری می‌توانیم فرم صوری این اثبات را هم عرضه‌کنیم؛ ولی‌اثبات فوق برای مقصود ما کافی‌است. همین برهان نشان می‌دهدکه اعدادی چون ۳، ۳/۴، یا ۵/۷ هم جذرگویا ندارند.

اگربخواهیم صحبت از طولهایی‌مانند $\sqrt{۲}$ بکنیم باید دستگاه‌اعداد رابازهم تعمیم بدهیم. نه‌تنها به‌اعدادگویا نیازمندیم، بلکه به «اعدادگنگ» نیزنیاز داریم.

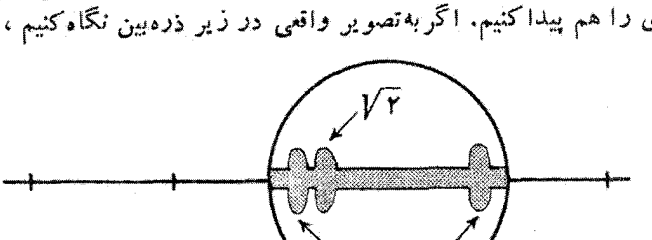
با استفاده ازعلامت‌گذاری هندی–عربی پس ازمعرفی بسط اعشاری می‌توانیم این امر را انجام بدهیم. مثلث قائم‌الزاویه‌ای راکه طول هرضلعش واحد است می‌سازیم، وبا ابزار رسم طول وتر آن را به‌خط اعداد منتقل می‌کنیم. آنگاه نقطهٔ مشخصی روی خط اعداد به‌دست می‌آوریم‌که آن را $\sqrt{۲}$ می‌نامیم. این نقطه بین ۱ و ۲ قرار می‌گیرد، و اگر



طول واحد از ۱ تا ۲ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم‌کنیم می‌بینیم‌که $\sqrt{۲}$ بین ۱٫۴ و ۱٫۵ واقع است. با تقسیم مجدد فاصلهٔ بین ۱٫۴ و ۱٫۵ به‌ده قسمت مساوی ممکن است تقریب



بهتری برای $\sqrt{۲}$ پیدا کرد. درعمل داریم به‌حد دقت ترسیم نزدیك می‌شویم. ممکن است تصور کنیم که دریك شکل دقیق با نگاهی تیزتر و یا با بزرگتر کردن شکل، می‌توانیم رقم اعشار بعدی را هم پیدا کنیم. اگر به‌تصویر واقعی در زیر ذره‌بین نگاه کنیم ، نه‌تنها طول



خطوط ترسیم شده بزرگ می‌شوند، بلکه ضخامت آنها نیز بزرگ می‌شوند. این روش برای رسیدن به‌تقریبی بهتر برای $\sqrt{۲}$ چندان رضایتبخش نیست.

دقت ترسیم عملی درواقع بسیارمحدود است. یك مداد رسم ظریف خطی به‌ضخامت ۰٫۱ میلیمتر رسم می‌کند. حتی اگرخطی به‌طول ۱ متر را به‌عنوان طول واحد به‌کاربریم، چون ۰٫۱ میلیمتر برابر ۰٫۰۰۰۱ متر است، نمی‌توانیم به‌دقتی بیش از چهار رقم‌اعشار امید داشته باشیم. حتی اگر کاغذی بسیار بزرگتر و ابزاری بسیار دقیقتر هم به‌کار برده شود باکمال تعجب پیشرفت چندانی در دقت برحسب تعداد ارقام اعشاری که می‌توانیم پیدا کنیم حاصل نمی‌شود. سال نوری تقریباً $۹٫۵ \times ۱۰^{۱۵}$ متراست. به‌عنوان حالتی‌فرین، فرض کنیم طول واحد برابر با $۱۰^{۱۸}$ متردرنظرگرفته شود. اگرشعاع نوری از یك طرف شروع به‌تابش کند و همزمان با آن درطرف دیگراین طول واحدکودکی به‌دنیا آید، این کودك باید بیش از ۱۰۰ سال عمرکند تا بتواند این شعاع نور را ببیند. در فرین پایین قدرت دید، طول موج نورقرمز تقریباً ۷×۱۰^{-۷} متر است، پس طولی که اندازهٔ آن $۱۰^{-۷}$ متر باشدکوچکتر از طول موج نورقابل رؤیت است. از این‌رو با میکروسکوپهای معمولی نمی‌توان نقاطی راکه $۱۰^{-۷}$ متر ازیکدیگرفاصله دارند از هم تمیزداد. در روی خطی با طول واحد $۱۰^{۱۸}$ متر، تمیز اعدادی که‌کمتر از $۱۰^{۱۸}/۱۰^{-۷} = ۱۰^{-۲۵}$ متر از یکدیگرفاصله داشته باشند ممکن نیست. و این بدین معناست‌که با ترسیم نمی‌توان به‌دقتی معادل ۲۵ رقم اعشار دست یافت، حتی این نیزدرعمل مبالغهٔ محض است، وسه رقم‌اعشار بهترین تقریبی است‌که در واقع می‌توان به‌آن امیدوار بود.

محاسبهٔ غیردقیق در ترسیم عملی

بی‌دقتی ذاتی‌کار به مسائلی درمحاسبه منجرمی‌شود. اگر دو عدد غیر دقیق را با هم جمع

کنیم،خطاها نیز با هم جمع می‌شوند. اگرنتوانیم خطاهای کمتر از مقداری‌چون e راتمیز دهیم، آنگاه، در عمل، نخواهیم توانست تفاوت بین a و $a+3e/4$ و بین b و $b+3e/4$ را تعیین کنیم. ولی با جمع کردن آنها، می‌توانیم $a+b$ را از $a+b+3e/2$ تمیزدهیم. درمورد ضرب، خطاها می‌توانند بسیار بیشتر از این هم بزرگ بشوند. کلا نمی‌توان امیدوار بودکه جوابها با همان درجه از دقت اعداد به‌کارگرفته شدهٔ درمحاسبه باشند.

اگرمحاسبات را انجام دهیم وکلیهٔ جوابها را تا چند رقم اعشارمعینی‌محاسبه‌کنیم، خطاهای مربوط، به‌نتایج مضطرب‌کننده‌ای منجرمی‌شوند. مثلاً، فرض‌کنیم محاسبات را تا دو رقم اعشار انجام می‌دهیم (اگر رقم سوم ۵ یا بیشتر از ۵ باشد به «بالاگرد می‌کنیم» و اگرکمترباشد به‌پایین). دو عدد حقیقی a و b را درنظر می‌گیریم، و حاصلضرب آنها تا دو رقم اعشار را با $a \otimes b$ نمایش می‌دهیم. مثلاً، $۴٫۲۶ \otimes ۳٫۰۵ = ۱۲٫۹۹$ زیرا $۴٫۲۶ \times ۳٫۰۵ = ۱۲٫۹۹۳$. با استفاده از این قانون ضرب، داریم

$$(۱٫۰۱ \otimes ۰٫۵) \otimes ۱۰ \neq ۱٫۰۱ \otimes (۰٫۵ \otimes ۱۰).$$

طرف چپ بـه $۱٫۰۱ \otimes ۵٫۱ = ۱۰$ تحویل می‌یابد، در حالی‌کـه طرف راست برابر $۱٫۰۱ \otimes ۵٫۰۵ = ۵$ است. این مثال به‌هیچ‌وجه منحصربه‌فرد نیست، و نشان می‌دهدکـه قانون شرکت‌پذیری در مورد $\otimes$ صدق نمی‌کند.

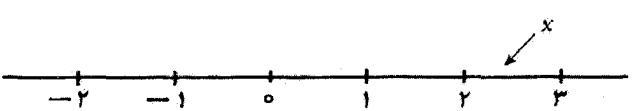
علاوه براین اگر $a \oplus b$ را مجموع تا دو رقم اعشار تعریف‌کنیم ، قوانین دیگری هم در این مورد صادق نخواهند بود، از جمله قانون پخشی

$$a \otimes (b \oplus c) \overset{?}{=} (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

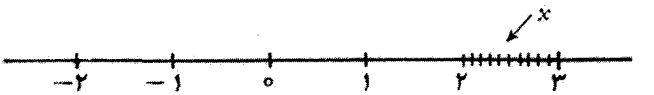
الگویی نظری برای خط حقیقی

هم‌اکنون ملاحظه‌کردیم‌کـه اگر اندازه‌گیری اعداد دقیق نباشد، آنگاه برخی از قوانین حساب بهم می‌خورند. برای اجتناب از این امر باید مفهوم دقیق اعداد حقیقی را در نظر بگیریم.

فرض‌کنیم عدد حقیقی x روی خط نظری اعداد حقیقی داده شده است، ومی‌خواهیم آن را به‌صورت بسط اعشاری بنویسیم. ابتدا می‌بینیم‌که x بین دوعدد

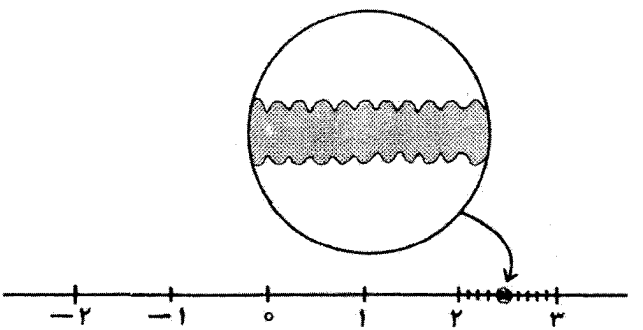


صحیح واقع می‌شود. درمثال فوق x بین۲ و۳ است، پسx برابر است با «۲ وخرده‌ای». سپس فاصلهٔ بین ۲ و ۳ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. بازهم، x دریکی از زیر-فاصله‌ها واقع می‌شود. در تصویر x بین ۲٫۴ و ۲٫۵ قرارداد،

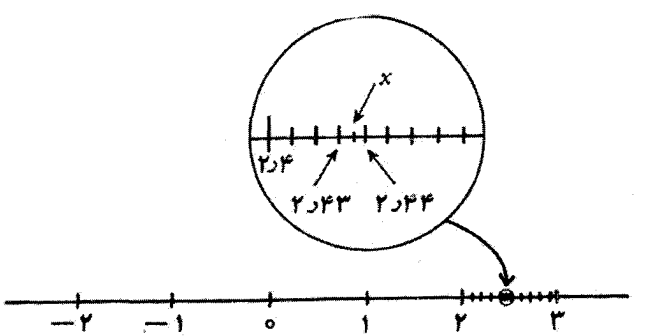


پس x برابر است با «۲٫۴ و خرده‌ای». برای کسب ایده‌ای بهتر، فاصلهٔ بین ۲٫۴ و ۲٫۵ را به‌ده قسمت مساوی تقسیم، و فرایند فوق را برای یافتن‌رقم بعدی بسط اعشاری تکرار می‌کنیم. هم‌اکنون، دریك وضع عملی، داریم به‌حد دقت ترسیم نزدیك می‌شویم.

در تصویرنظری باید تصورکنیم که می‌توانیم به‌شکل با دقت‌کافی نگاه‌کنیم، یا آن را بزرگ نماییم، و رقم اعشار بعدی را بخوانیم. اگر به‌تصویر واقعی زیردره‌بین نگاه کنیم، نه‌فقط درازای خطوط بزرگ می‌شوند بلکه ضخامت آنها نیز بزرگ می‌شوند. این روش برای به‌دست‌آوردن تقریب بهتر چنـدان رضایتبخش نیست. در حالت نظری، باید فرض‌کنیم کـه خط هیچ ضخامتی ندارد، و لـذا وقتی تصویر بزرگ می‌شود خط پهن‌تر



نمی‌گردد. این تصویر را می‌توان با ترسیم خطوط بزرگ شده با همان ابزار رسم قبلی، و نازکترکردن آنها تا حد امـکان، به‌عنوان تصویرعملی درنظرگرفت. در این صورت x بین ۲٫۴۳ و ۲٫۴۴ قرار می‌گیرد، پس x برابر است با «۲٫۴۳ و خرده‌ای». با استفاده



ازاین روش می‌توانیم، به‌طورنظری، هرعدد حقیقی را به‌صورت بسط اعشاری تا هرتعداد رقم اعشارکه لازم بدانیم نمایش دهیم. دوعدد متفاوتند اگر ، بـا محاسبهٔ تعدادکافی رقم اعشاری، سرانجام دریك رقم اعشار به دو جواب متفاوت دست یابیم.

این روش نظری را می‌توان با اصطلاحات دقیقتر ریاضی به‌صورت زیر بیان کرد:

(یك) اگر عدد حقیقی x مفروض باشد، عددی صحیح چون a_0 پیدا کنید که

$$a_0 \leqslant x < a_0 + ۱ .$$

(دو) عددی صحیح چون a_1 بین ۰ و ۹ شمولی پیدا کنید که

$$a_0 + \frac{a_1}{۱۰} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1 + ۱}{۱۰} .$$

(سه) پس از پیدا کردن a_0، a_1، ...، a_{n-1}، با فرض اینکه a_1، ...، a_{n-1} اعداد صحیح بین ۰ و ۹ شمولی باشند، عدد صحیح a_nی بین ۰ و ۹ شمولی پیدا کنید که

$$a_0 + \frac{a_1}{۱۰} + \cdots + \frac{a_n}{۱۰^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{۱۰} + \cdots + \frac{a_n + ۱}{۱۰^n} .$$

به‌این ترتیب فرایندی استقرایی به‌دست می‌آید که در مرحلهٔ n م x را تا n رقم اعشار تعیین می‌کند:

$$a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant x < a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n + ۱/۱۰^n .$$

برای نمایش دقیق نظری عدد x، به‌بسطی اعشاری چون

$$a_0 ، a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots$$

نیاز داریم که الی‌غیرالنهایه ادامه داشته باشد. (البته، اگر a_nها از جایی به‌بعد برابر صفر باشند، در نماد عادی آن صفرها را حذف می‌کنیم: به‌جای ۱۰۶۶٫۳۱۷۰۰۰۰۰۰۰ ... می‌نویسیم ۱۰۶۶٫۳۱۷ .) هر عدد با بسط اعشاری نامتناهی را یك عدد حقیقی می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

در بیشتر موارد عملی تنها به‌چند رقم اعشار نیاز داریم. مشاهدات بخش اول این فصل نشان می‌دهد که ۲۵ رقم اعشار برای اندازهٔ طولهایی که بشر قادر به‌دیدن آنهاست کافی است. البته این تخمین بسیار بالایی است، ومعمولاً دو یا سه رقم اعشار برای کارهای عملی کاملاً کافی است.

بسطهای اعشاری متفاوت برای اعداد متفاوت

اگر مانند بالا عدد x را به یك عدد اعشاری بی‌پایان بسط دهیم، می‌گوییم که $a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n$ بسط x است تا n رقم اعشار (بدون «گرد کردن»). اگر بسطهای اعشاری دو عدد حقیقی x و y تا n رقم اعشار برابر باشند، آنگاه

$$a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant x < a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n + ۱/۱۰^n ,$$
$$a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant y < a_0 ، a_1 a_2 \cdots a_n + ۱/۱۰^n .$$

نامساوی دوم را می‌توانیم به‌صورت زیر هم بنویسیم

$$-a_0 ، a_1 \cdots a_n - ۱/۱۰^n < -y \leqslant -a_0 ، a_1 \cdots a_n .$$

با جمع کردن این نامساوی و نامساوی اول، داریم

$$-۱/۱۰^n < x-y < ۱/۱۰^n .$$

به‌عبارت دیگر اگر بسطهای اعشاری دو عدد حقیقی تا n رقم اعشار برابر باشند، آنگاه تفاوت آنها حداکثر $۱/۱۰^n$ است.

اگر x و y دو عدد متفاوت روی خط حقیقی باشند و بخواهیم بین آنها فرق قایل شویم، تنها باید n ی پیدا کنیم که $۱/۱۰^n$ از تفاضل آنها کوچکتر باشد: آنگاه بسطهایشان تا n رقم اعشار متفاوت خواهند بود. بازهم، وقتی x و y آن‌قدر به‌هم نزدیك باشند که قابل تشخیص نباشند، نارساییهای ترسیم عملی آشکار می‌گردد. برحسب مفهوم نظری خط حقیقی، این تمایز باید همیشه میسر باشد. این امر چنان با اهمیت است که خوب است نامی به‌آن داده شود. ریاضیدان بزرگ یونانی، ارشمیدس[1]، خاصیتی را بیان می‌کند که معادل چیزی است که ما لازم داریم، و لذا شرط خود را به‌او نسبت می‌دهیم:

شرط ارشمیدس: به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت ε ، عدد صحیحی چون n وجوددارد که $\varepsilon > ۱/۱۰^n$.

عددگویا و عددگنگ

همان‌طورکه دیدیم، عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ گنگ است: بسیاری ازاعداد دیگر هم گنگ هستند. اثبات گنگ بودن یك عدد همیشه ساده نیست. (برای e نسبتاً ساده است، وبرای π مشکلتر؛ اعداد جالب بسیاری هم وجود دارندکه قرنهاست ریاضیدانان به‌گنگ بودنشان متقاعد هستند، ولی هرگز به‌اثباتشان دست نیافته‌اند.) ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{۲}$ گنگ است نتیجه می‌گیریم که بین‌هردوعدد گویا اعدادی گنگ وجود دارند. ابتدا به‌لم زیر نیازداریم.

لم ۱. اگر m/n و r/s گویا باشند، و $r/s \neq ۰$، آنگاه $m/n+(r/s)\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات. فرض کنیم $m/n+(r/s)\sqrt{۲}$ عددی گویا و برابر با p/q باشدکه p و q اعدادی صحیح هستند. آنگاه با حل معادله برای $\sqrt{۲}$ داریم

$$\sqrt{۲} = (pn-mq)s/qnr,$$

که گویاست، ومتناقض گنگ بودن $\sqrt{۲}$. □

قضیهٔ ۲. بین هردو عددگویای متمایز عددی گنگ وجود دارد.

---

1. Archimedes

اثبات. فرض کنیم اعداد گویای مفروض، m/n و r/s باشند، و $m/n < r/s$. آنگاه

$$m/n < m/n + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(r/s - m/n) < r/s$$

(زیرا $\sqrt{۲}/۲ < ۱$)، و عدد میانی بنا به‌لم قبل گنگ است. □

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیهٔ متناظری به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۳. بین هردو عدد گنگ متمایز عددی گویا وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم اعداد گنگ مفروض a و b باشند و $a < b$. بسط اعشاری آنها را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم n مین رقم اعشار اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است. آنگاه

$$a = a_۰ ، a_۱ \cdots a_{n-۱} a_n \cdots ,$$

$$b = a_۰ ، a_۱ \cdots a_{n-۱} b_n \cdots ,$$

و $a_n \neq b_n$. فرض کنیم $x = a_۰ ، a_۱ \cdots a_{n-۱} b_n$. آنگاه x گویاست، و باید داشته باشیم $a < x < b$. (واضح است که $a < x \leqslant b$، ولی چون b گنگ است، $x \neq b$.) □

در واقع تمرینات آخر این فصل نشان می‌دهند که اعداد گویا و گنگ به‌طور بسیار پیچیده‌ای درهم آمیخته‌اند. نباید به‌اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی، «متناوب» هستند.

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست که بسط اعشاریشان به‌فواصل منظم تکرار می‌شوند (از اثبات این مطلب صرفنظر می‌کنیم). با بیان دقیقتر، گوییم یك بسط اعشاری تکراری است هرگاه، از رقمی به‌بعد، دنبالهٔ ثابتی از ارقام به‌طور نامتناهی تکرار شود. مثلاً $۱٫۵۴۳۲۱۷۴۱۷۴۱۷۴۱۷۴\ldots$ یك بسط اعشاری تکراری است. این عدد را، با گذاشتن نقطه روی دورقم اول و آخر قسمتی که تکرار می‌شود، به‌صورت $۱٫۵۴۳۲۱۷۴$ می‌نویسیم.

نیاز به‌اعداد حقیقی

ملاحظه کردیم اعتقاد یونانیان (جزئی ازفلسفهٔ مرموز مقلدین فیثاغورث) مبنی براینکه همهٔ اعداد گویا هستند آنها را به‌بن‌بست کشاند. اگر اعداد حقیقی را به‌عنوان اعداد اعشاری نامتناهی درنظر بگیریم می‌توانیم براین بن‌بست روانی فایق آییم، زیرا واضح است که

اعداد گویا، یعنی اعدادی که بسطشان تکرار می‌شود، همهٔ اعداد را دربرنمی‌گیرند.

ولی، دیدیم که برای مقاصد عملی نیازی به‌اعداد اعشاری نامتناهی، یا حتی متناهی ولی خیلی طولانی، نداریم. پس چرا این همه مشکلات را پذیرا شویم؟ یك دلیل این‌امر را قبلاً ذکر کردیم: حساب اعداد اعشاری به‌طول محدود از قوانین آشنایی که اعداد صحیح یا گویا از آنها پیروی می‌کنند تبعیت نمی‌کند. شاید دلیلی جدی‌تر، در رابطهٔ با آنالیز باشد.

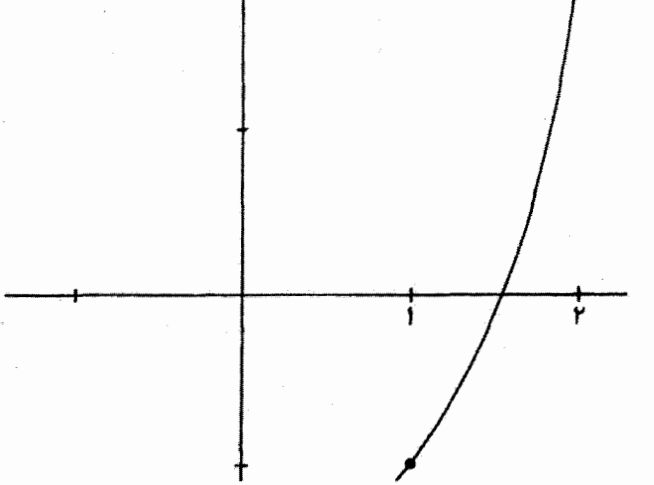
تابع زیر را درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x^2-2 \quad (x\in\mathbb{R}).$$

این تابع در $x=1$ منفی است و در $x=2$ مثبت. بین این دو عدد، در $x=\sqrt{2}$، تابع برابر صفر است. ولی اگر x را به‌اعداد گویا محدود کنیم، تابع

$$f(x)=x^2-2 \quad (x\in\mathbb{Q})$$

نیز در $x=1$ منفی است و در $x=2$ مثبت است، ولی در هیچ عددگویای x بین این دو عدد صفر نمی‌شود، زیرا $x^2=2$ جواب گویا ندارد. این مطلب ایجاد مشکل می‌کند.



قضیه‌ای اساسی در آنالیز حکم می‌کند که اگر تابع پیوسته‌ای در نقطه‌ای منفی و درنقطهٔ دیگری مثبت باشد، آنگاه باید بین این دونقطه صفرشود. این قضیه برای توابع روی‌اعداد حقیقی صادق است، ولی برای توابع روی اعدادگویا صادق نیست. تمدنی چون تمدن یونان باستان، بدون روش رضایتبخشی برای استفاده از اعدادگنگ، نمی‌توانست نظریهٔ حد

را بسازد، یا حساب دیفرانسیل و انتگرال را ابداع کند.

حساب اعداد اعشاری

ایدهٔ نمایش اعداد حقیقی با اعداد اعشاری نامتناهی ایدهٔ مفیدی است، ولی برای محاسبات عددی، و همچنین برای بررسیهای نظری در یك سطح بالاتر از سطح مقدماتی، چندان مناسب نیست. برای جمع دو عدد اعشاری متناهی از اولین رقم سمت راست شروع می‌کنیم: ولی دراعداد اعشاری نامتناهی اولین رقم سمت راست وجود ندارد و ازهیچ‌جا نمی‌توانیم شروع کنیم.

در عوض می‌توانیم از سمت چپ شروع کنیم، و اولین ارقام اعشاری دو عدد را جمع کنیم، سپس دو رقم اول را، وبعد سه رقم اول را، و همین‌طور الی آخر. برای مثال دو عدد ۰٫۶ = ۲/۳ و ۰٫۲۸۵۷۱۴ = ۲/۷ را با این روش جمع می‌کنیم:

$$۰٫۶ + ۰٫۲ = ۰٫۸$$
$$۰٫۶۶ + ۰٫۲۸ = ۰٫۹۴$$
$$۰٫۶۶۶ + ۰٫۲۸۵ = ۰٫۹۵۱$$
$$۰٫۶۶۶۶ + ۰٫۲۸۵۷ = ۰٫۹۵۲۳$$
$$۰٫۶۶۶۶۶ + ۰٫۲۸۵۷۱ = ۰٫۹۵۲۳۷$$
$$۰٫۶۶۶۶۶۶ + ۰٫۲۸۵۷۱۴ = ۰٫۹۵۲۳۸۰ .$$

جواب واقعی برابر با ۰٫۹۵۲۳۸۰ = ۲۰/۲۱ = ۲/۷ + ۲/۳ است. ملاحظه می‌کنیم که مجموع اولین رقمهای اعشار، اولین رقم اعشارجواب را به‌دست نمی‌دهد، و همچنین مجموع دو رقم اول نیز برابر با دو رقم اعشار جواب نیست. این امر دقیقاً به‌این دلیل است که ارقام «انتقالی» [ده بریکها] از مکانهای قبلی ممکن است در مکانهای بعدی اثر بگذارند.

در این مثال، جملات متوالی بزرگ می‌شوند و به‌جواب واقعی نزدیك و نزدیکتر. دنبالهٔ اعداد ۰٫۸, ۰٫۹۴, ۰٫۹۵۱, ۰٫۹۵۲۳, ... دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی است و به ۲۰/۲۱ «میل می‌کند»، به‌این‌معنی که با محاسبهٔ ارقام اعشار به‌تعداد کافی می‌توانیم خطا را به هر اندازه که مایل باشیم کوچك کنیم.

درچند بخش بعد به‌بررسی جزئیات ایده‌های لازم جهت بیان دقیق این مفهوم می‌پردازیم. برای مقاصد نظری غالباً آسانتر است که از دنباله‌های صعودی (تقریبهای یك عدد حقیقی) استفاده کنیم تا از بسطهای اعشاری.

دنباله

هر دنباله از اعداد حقیقی را می‌توان فهرست بی‌پایانی چون

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \cdots , a_n , \cdots$$

پنداشت که در آن هر a_n عددی حقیقی باشد. (در فصل ۵ با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف صوری‌تری ارائه خواهد شد). مثلاً،

(۱) دنبالهٔ مجذورات: $1, 4, 9, 16, \cdots$، با $a_n = n^2$.

(۲) دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$: $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$، با n تا n رقم اعشار) $a_n = \sqrt{2}$.

(۳) دنبالهٔ: $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, \cdots$، با $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

(۴) دنبالهٔ: $3, 1, 4, 1, 5, 9, \cdots$، با $a_n = (n$مین رقم بسط اعشاری $\pi)$.

نماد اختصاری دنبالهٔ $a_1 , a_2 , \cdots$ که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد

$$(a_n)$$

است که جملهٔ nم دنباله بین دو پرانتز قرار داده شده است. پس مثال ۱ را می‌توان (n^2) هم نوشت.

ملاحظه می‌کنیم که مفهوم دنباله بسیار کلی است. هر فهرست بی‌پایانی از اعداد را می‌توان در نظر گرفت. لزومی ندارد که جملهٔ nم با «فرمول خوبی» تعریف بشود، همین قدر کافی است که مقادیر a_n مشخص باشند.

دنباله‌ها را می‌توان جمع، تفریق، یا ضرب کرد. باید این عملها را تعریف کنیم: ساده‌ترین راه، انجام این عملها روی هر زوج از جملات در مکانهای متناظر است. به‌عبارت دیگر، جمع کردن دنباله‌های

$$a_1 , a_2 , \cdots$$

و

$$b_1 , b_2 , \cdots$$

به‌معنای تشکیل دنبالهٔ

$$a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , \cdots$$

است. مثلاً، اگر $a_n = n^2$ و $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$، آنگاه جملهٔ nم $(a_n) + (b_n)$ برابر است با

$$n^2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} .$$

از آنجا که جملهٔ nم دنبالهٔ $(a_n) + (b_n)$ برابر است با $a_n + b_n$، قاعده برای جمع را

می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n).$$

به‌همین نحو قواعد تفریق و ضرب عبارتنداز:

$$(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n),$$
$$(a_n)(b_n)=(a_nb_n).$$

درمورد تقسیم، می‌نویسیم

$$(a_n)/(b_n)=(a_n/b_n),$$

ولی توجه داریم که این تقسیم را تنها وقتی می‌توانیم انجام دهیم که همهٔ جملات b_n غیر صفر باشند.

مثال. اگر $a_n=$ ($\sqrt{۲}$ تا n رقم اعشار)، و $b_n=$ (nمین رقم بسط اعشاری π)، آنگاه چند جملهٔ اول $(a_n)(b_n)$ برابرند با:

$$۱٫۴\times۳=۴٫۲$$
$$۱٫۴۱\times۱=۱٫۴۱$$
$$۱٫۴۱۴\times۴=۵٫۶۵۶$$
$$۱٫۴۱۴۲\times۱=۱٫۴۱۴۲۰$$

اگردنبالهٔ ۴٫۲، ۱٫۴۱، ۵٫۶۵۶، ۱٫۴۱۴۲ داده شود، آیا می‌توانید قاعدهٔ جملهٔ nم آن را حدس بزنید؟ این مثال گویای این مطلب است که برای مشخص کردن هردنباله باید اصولاً بدانیم که همهٔ جملات آن چگونه محاسبه می‌شوند. به‌طورکلی نوشتن چند جمله‌از یك دنباله وسپس گذاشتن چند نقطه کافی نیست. دنبالهٔ $۳, ۱, ۴, ۱, ۵, ۹, \ldots$، یقیناً به‌نظرمی‌رسد که متشکل از ارقام π باشد. ولی، این دنباله می‌تواند دنبالهٔ ارقام عدد $۳۵۵/۱۱۳$ هم باشد، که به همان صورت شروع می‌شود. به‌این دلیل است که، در مثال (۴)، قاعدهٔ کلی پیداکردن جملهٔ nم را هم مشخص کردیم.

با این وجود، اغلب مشاهده می‌کنیم که ریاضیدانان چیزی چون

$$۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, \ldots$$

را می‌نویسند وانتظار دارند نتیجه بگیریم که جملهٔ nم آن ۲^n است. یك‌جنبهٔ آموزش ریاضیات درك این مطلب است که ریاضیدانان در واقع چطور عمل‌می‌کنند، و سبك تفکر آنها چیست: به‌شرطی که ایده ازفحوای کلام مشخص باشد، بایدآمادگی‌پذیرش تفاوتهایی جزئی درنمادگذاری را داشته باشیم.

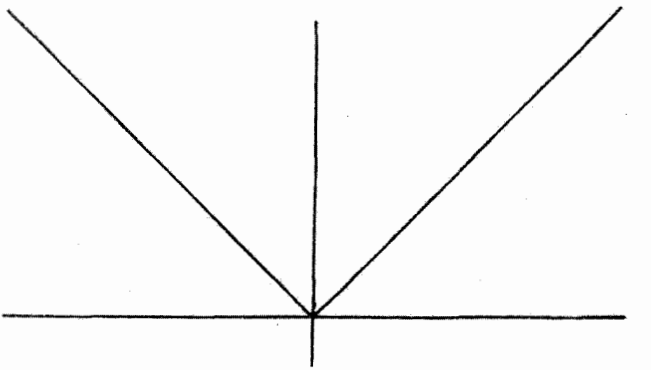
خواص ترتیب وقدرمطلق

ازموضوع منحرف می‌شویم ومفهوم مهمی‌راکه عنقریب‌استفاده شایانی‌خواهد داشت معرفی

می‌کنیم. اگر x عددی حقیقی باشد، پیمانه یا قدد مطلق x را با

$$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0 \text{ اگر}\\ -x & x<0 \text{ اگر}\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. نمودار $|x|$ به‌ازای x به صورت زیر است:



مقدار $|x|$ بیان می‌کندکه x بدون‌درنظرگرفتن مثبت یامنفی‌بودنش چه‌اندازه بزرگ یاچه اندازه کوچك است. شاید مفیدترین حکم درمورد قدر مطلق همان نامساوی مثلثی باشد؛ وجه تسمیه آن این‌است‌که تعمیمش به اعداد مختلط این حقیقت‌را بیان می‌کندکه هرضلع مثلث‌کوتاهتر است از روی هم دوضلع دیگرآن. چنین است:

قضیهٔ ۴. (نامساوی مثلثی). اگر x و y دوعدد حقیقی باشند، آنگاه

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

اثبات. ایده این است کـه $|x+y|$ بیانگر فاصلهٔ $x+y$ از مبدأ است؛ این فاصله حداکثر برابر با مجموع فاصله‌های $|x|$ و $|y|$ اعداد x و y ازمبدأ است،واز مجموع کمتر است هرگاه x و y مختلف‌العلامه باشند. (بارسم یك تصویر این مطلب را بررسی کنید.) ساده‌ترین راه اثبات این است کـه برحسب علامت و اندازه‌های نسبی x و y، چند حالت درنظر بگیریم.

(یك) $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$. آنگاه $x+y\geqslant 0$، پس داریم

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|.$$

(دو) $x\geqslant 0$ و $y<0$. اگر $x+y\geqslant 0$ آنگاه

$$|x+y|=x+y<x-y=|x|+|y|.$$

ازطرف دیگر، اگر $x+y<0$ آنگاه

$$|x+y|=-(x+y)=-x-y<|x|+|y|.$$

(سه) حالت $x<0$ و $y\geqslant 0$ نظیرحالت (دو) باتعویض x و y است.

(چهار) $x<0$ و $y<0$. آنگاه $x+y<0$، پس داریم

$$|x+y|=-x-y=|x|+|y|.$$

به این نحو اثبات درهمهٔ حالات کامل می‌شود. □

می‌توانیم درپی نامساویهای دیگری چون

$$|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|$$

هم باشیم که صادق است زیرا $x-z=(x-y)+(y-z)$، و در نتیجه $|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|$.

قدرمطلق بیشتر برای بیان اختصاری برخی از نامساویها به‌کار می‌رود. مثلاً،

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

را می‌توان به‌صورت

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$$

هم نوشت که قابل تبدیل به

$$|x-a|<\varepsilon$$

است.

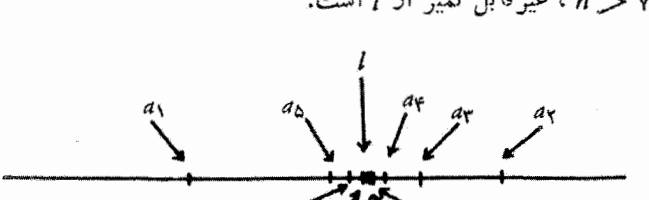
همگرایی

اکنون آماده‌ایم به بررسی مفهوم کلی نمایش هرعدد حقیقی، به عنوان «حد» یك دنباله و نه صرفاً به عنوان بسط اعشاری خاصی، بپردازیم. به عنوان تمرین، ازخواننده می‌خواهیم که، باهرواحد بزرگ دلخواه وبا نهایت دقت اعداد ۱ر۴، ۱ر۴۱، ۱ر۴۱۴، ۱ر۴۱۴۲، $\sqrt{2}$، را درفاصلهٔ بین ۱ و ۲ مشخص کند.

ملاحظه می‌کنیم که درصورت دقت درترسیم، اعداد ۱ر۴، ۱ر۴۱، ۱ر۴۱۴، ۱ر۴۱۴۲، به یکدیگر نزدیك ونزدیکترمی‌شوند، تااینکه دیگر ازیکدیگرواز $\sqrt{2}$ قابل تمیز نباشند. بارسم تصویری دقیقتر، باید درمسیر دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$ به‌پیش برویم تا این موضوع حادث بشود. پس اگر بادقت 10^{-8} عمل کنیم، از جملهٔ هشتم به‌بعد همهٔ نقاط این دنباله از $\sqrt{2}$ غیرقابل تشخیص خواهند بود.

این مشاهده انگیزه‌ای است برای مفهوم نظری همگرایی. فرض کنیم ε هرعددحقیقی

مثبتی باشد (ε حرف یونانی نظیر «e» است ومی‌توان آن را حرف اول کلمهٔ «error» [به معنی خطا] پنداشت). برای همگرایی عملی دنبالهٔ (a_n) به حدی چون l، اگر بادقت ε کارکنیم، لازم است عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد که هرگاه $n > N$، تفاضل بین a_n و l کمتراز ε باشد. به عبارت دیگر، $|a_n - l| < \varepsilon$. درشکل زیر نقاط با فاصلهٔ کمتراز ε از یکدیگر را نمی‌توانیم ازهم تمیز بدهیم: در این مورد $N = ۷$ و a_n، در صورتی که $n > ۷$، غیرقابل تمیز از l است.



درهمگرایی نظری لازم است که همین پدیده به‌ازای همهٔ ε های مثبت رخ بدهد. این امر با توجه به‌این درك ضمنی است که به‌ازای ε های کوچکتر ممکن است N های بزرگتری لازم باشند. ازاین لحاظ، N وابسته به ε است. پس داریم:

تعریف. دنباله‌ای چون (a_n) از اعداد حقیقی به حد l میل می‌کند اگر، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی طبیعی چون N وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $n > N$،

$$|a_n - l| < \varepsilon .$$

ریاضیدانان برای بیان این مفهوم از نمادهای اختصاری گوناگونی استفاده می‌کنند. برای بیان اینکه «دنبالهٔ (a_n) به حد l میل می‌کند» می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

یا

$$a_n \to l \text{ ، هرگاه } n \to \infty .$$

نماد مرکب «$n \to \infty$» به‌منزلهٔ تذکر این مطلب است که رفتار a_n به‌ازای n های بزرگ (مثلاً $n > N$) مورد علاقهٔ ماست. برای نماد «∞» به تنهایی هیچ معنایی قایل نیستیم. این نماد عددی «بسیار بزرگ»، یاچیزی ازاین نوع نیست: این حتی یك عدد نیست. در واقع غالباً بهتراست کلاً ازاین نماد صرفنظر کنیم، وفقط بنویسیم

$$\lim a_n = l,$$

ولی باید درنظر داشته باشیم که ریاضیدانان انواع دیگری از حد را درمباحث دیگرهم

به‌کار می‌برند که ممکن است با این یکی اشتباه بشود.

مثال. دنبالهٔ $a_n = ۱ + ۱۰^{-n}$ یعنی ۱٫۱ , ۱٫۰۱ , ۱٫۰۰۱ , ۱٫۰۰۰۱ , ... است، هرگاه $n \to \infty$ به حد ۱ میل می‌کند. زیرا، به‌ازای $\varepsilon > ۰$، باید N مناسبی پیدا کنیم که

$$\text{به‌ازای } n > N \text{، } |۱ + ۱۰^{-n} - ۱| < \varepsilon.$$

ولی این امر از شرط ارشمیدس نتیجه می‌شود: اگر Nی پیدا کنیم که $۱۰^{-N} < \varepsilon$، آنگاه به‌ازای هر $n > N$ داریم $۱۰^{-n} < ۱۰^{-N} < \varepsilon$. (در صورت آشنایی با نظریهٔ لگاریتم تنها کافی است $N > \log_{۱۰}(۱/\varepsilon)$ اختیار شود.)

دنباله‌ای چون (a_n) را که به یك حد l میل می‌کند همگرا می‌نامیم. اگر حدی وجود نداشته باشد، دنباله واگرا نام دارد.

لازم به تذکر است که هر دنبالهٔ همگرا تنها می‌تواند به یك حد میل کند. زیرا فرض کنیم $a_n \to l$ و $a_n \to m$ و $l \neq m$. فرض کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}|l - m|$. به‌ازای n به قدر کافی بزرگ، داریم

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$

$$|a_n - m| < \varepsilon.$$

پس، بنا به نامساوی مثلثی، داریم $|l - m| < ۲\varepsilon = |l - m|$، که صحیح نیست.

به عبارت دیگر، اگر ازجایی به‌بعد همهٔ جملات a_n باید به l بسیار نزدیك باشند دیگر نمی‌توانند به m نیز خیلی نزدیك باشند، زیرا این امر مستلزم این است که a_n ها به طور همزمان در دومحل مختلف باشند.

کمال

دنباله‌ای چون (a_n) صعودی است اگر هر $a_n \leqslant a_{n+۱}$، یعنی

$$a_۱ \leqslant a_۲ \leqslant a_۳ \leqslant \cdots$$

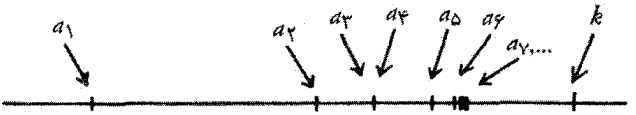
فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای صعودی باشد. یا جملات a_n بدون حد صعود می‌کنند، و سرانجام هر اندازه که بخواهیم بزرگ می‌شوند، یا اینکه باید عددی حقیقی چون k وجود داشته باشد که به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$. مثالی از دنبالهٔ نوع اول ... , ۲۵ , ۱۶ , ۹ , ۴ , ۱ است؛ و مثالی از نوع دوم دنبالهٔ تقریبهای اعشاری e است:

۲٫۷ , ۲٫۷۱ , ۲٫۷۱۸ , ۲٫۷۱۸۲ , ...

که هر جملهٔ آن کوچکتر از ۳ است.

اگر عدد حقیقی k وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$ آنگاه (a_n) را کراندار می‌خوانیم.

اگر بخواهیم نقاط یك دنبالهٔ صعودی و کراندار را روی خط حقیقی رسم کنیم تنها لازم است فاصلهٔ بین a_1 و k را رسم کنیم، زیرا همهٔ نقاط دیگر دنباله در این فاصله قرار دارند. پس یك تصویر نوعی به صورت



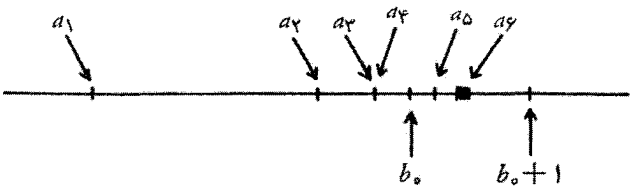
است. به طور شهودی واضح است که جملات این دنباله کم کم به یکدیگر نزدیك می‌شوند، و به‌حدی چون l، $l \leqslant k$، میل می‌کنند. این مشاهده برای دنباله‌های اعداد حقیقی وحدود حقیقی درست است، ولی برای دنباله‌های اعداد گویا وحدود گویا درست نیست. مثلاً دنبالهٔ تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد گویاست که هیچ عدد گویایی حدش نیست.

این واقعیت که هر دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی به حدی حقیقی میل می‌کند خاصیت کمال اعداد حقیقی نامیده می‌شود. (با توجه به این نام، مجموعهٔ اعداد گویا «ناکامل» است زیرا «فاقد» اعدادی چون $\sqrt{2}$ است).

خاصیت کمال اعداد حقیقی را می‌توانیم با استفاده از ایدهٔ اعشاری به‌خوبی توجیه کنیم. فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی باشد، و به‌ازای هر n، $a_n \leqslant k$.

حال مجموعهٔ اعداد صحیح بین $a_1 - 1$ و k متناهی است، پس بزرگترین عدد صحیحی چون b_0 وجود دارد که جمله‌ای مانند a_{n_0} از این دنباله کمتر از b_0 نباشد.

آنگاه همهٔ جملات a_n کوچکتر از b_0+1 هستند.



فاصلهٔ از b_0 تا b_0+1 را به ده قسمت تقسیم، و b_1ی پیدا می‌کنیم که جمله‌ای مانند $a_{n_1} \geqslant b_0+b_1/10$، ولی هیچ جملهٔ $a_n \geqslant b_0+(b_1+1)/10$ نباشد. با ادامهٔ این روش دنباله‌ای از اعداد اعشاری چون

$$b_0 , b_0 \cdot b_1 , b_0 \cdot b_1 b_2 , \ldots$$

به دست می‌آوریم که به ازای $n > n_r$ جملهٔ a_n بین $b_0 \cdot b_1 \ldots b_r$ و $b_0 \cdot b_1 \ldots b_r + 1/10^r$ قرار داشته باشد. آنگاه عدد حقیقی

$$l = b_0 \cdot b_1 b_2 \ldots$$

دارای این خاصیت است که به‌ازای $n > n_r$ ، $|a_n - l| < ۱/۱۰^r$. ازاین‌رو $a_n \to l$ هرگاه $n \to \infty$.

به‌آسانی بررسی می‌شود که l از k بزرگتر نیست.

دنبالهٔ نزولی

نزولی ندارد خودرا به دنباله‌های صعودی محدود کنیم. دنباله‌ای چون (a_n) نزولی است اگر به ازای هر n، $a_n \geqslant a_{n+۱}$. اگر به‌ازای هر n، $a_n \geqslant k$ آنگاه k را یك کران پایین دنباله و دنباله را ازپایین کراندار می‌گوییم. (برای پرهیز از اشتباه، ازاین پس در مورد دنباله‌های صعودی به‌جای «کراندار» می‌توانیم بگوییم ازبالا کراندار.) قضیهٔ مشابهی در مورد دنباله‌های نزولی هم هست، ولی به جای رونویس کردن مجدد اثبات وتعویض نامساویها، لمی‌را به‌کار می‌بریم. اگر (a_n) نزولی باشد، آنگاه $(-a_n)$ صعودی است. اگر به‌ازای هر n، $a_n \geqslant k$ آنگاه به‌ازای هر n، $-a_n \leqslant -k$، پس $(-a_n)$ ازبالا کراندار است، ولذا به‌حدی چون l میل می‌کند. به‌آسانی نتیجه می‌شود که $-a_n \to -l$. بنابراین هر دنبالهٔ نزولی از اعداد حقیقی که ازپایین به k محدود شود به‌حدی چون $-l$، $-l \geqslant k$، میل می‌کند.

بسطهای اعشاری متفاوت برای یك عدد حقیقی

قبلاً عددی حقیقی چون x را با استفاده از نامساویهای

$$a_۰ + \frac{a_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{a_n}{۱۰^n} \leqslant x < a_۰ + \frac{a_۱}{۱۰} + \cdots + \frac{a_n + ۱}{۱۰^n},$$

که در آن $a_۰$ عددی صحیح است و a_n، به‌ازای $n \geqslant ۱$، عددی صحیح از ۰ تا ۹، به صورت یك عدد اعشاری نامتناهی، $a_۰ر a_۱ a_۲ \ldots$، بسط دادیم. این شرطرا می‌توانیم به‌صورت

$$(*) \qquad a_۰ر a_۱ a_۲ \ldots a_n \leqslant x < a_۰ر a_۱ a_۲ \ldots a_n + \frac{۱}{۱۰^n}$$

نیز بنویسیم. اگراین عبارت‌را متوالیاً به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ به‌کار ببریم برای هرعدد حقیقی بسط اعشاری یکتایی به‌دست می‌آوریم، و اعداد حقیقی متفاوت، بسطهای اعشاری متفاوتی خواهند داشت. ولی، این کل موضوع نیست زیرا با به‌کاربردن شرط (*) برخی ازبسطهای اعشاری به‌دست نمی‌آیند. مثلاً، بسط $۹۹۹۹۹۹۹\ldots ر۰$ که درآن $a_۰ = ۰$ و به‌ازای هر $n \geqslant ۱$، $a_n = ۹$، حاصل نمی‌شود.

حال ببینیم که چرا این مطلب درست است. فرض کنیم بسط اعشاری عدد حقیقی x برابر $۹۹۹۹۹۹۹\ldots ر۰$ باشد. آنگاه، برطبق (*)، باید داشته باشیم

$$۰٫۹۹۹\ldots۹ \leqslant x < ۰٫۹۹۹\ldots۹ + ۱/۱۰^n,$$

که درهرطرف آن n تا ۹ وجود دارد. پس به‌ازای هر $n \in \mathcal{N}$

$$۱ - (۱/۱۰^n) \leqslant x < ۱$$

یا

$$۰ < ۱ - x \leqslant ۱/۱۰^n.$$

بنا به شرط ارشمیدس این امر غیرممکن است، زیرا چون $۰ < ۱ - x$ باید snی وجود داشته باشدکه $۱ - x < ۱/۱۰^n$.

دلیل اینکه این دنباله از ۹ها نمی‌تواند به‌دست آید مربوط به‌انتخاب نامساویهای (*) است. اگر به‌جای (*) از

$$(**) \qquad a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n < x \leqslant a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n + ۱/۱۰^n$$

استفاده کنیم آنگاه تعریف مفید دیگری برای بسط اعشاری به دست می‌آوریم، و به‌آسانی می‌بینیم که بسط عدد $x = ۱$ به صورت $۰٫۹۹۹۹۹۹۹\ldots$ درمی‌آید.

ولی، قاعدهٔ دوم (**) هیچ‌گاه بسط $۱٫۰۰۰۰۰۰۰\ldots$ را به‌دست نخواهد داد.

بامقایسهٔ (*) و (**)، می‌بینیم که برای x هردو، بسط‌اعشاری‌یکسان به‌دست‌می‌دهند، البته به‌شرطی که تساوی درهیچ یك از آنها وجود نداشته باشد. حال برابری فقط و فقط وقتی رخ می‌دهدکه x به‌صورت $a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n$ باشد. (ممکن است چنین به‌نظر آیدکه $a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n + ۱/۱۰^n$ فراموش شده است، ولی این عدد برابر است با $a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots (a_n + ۱)$ اگر $a_n \neq ۹$، و برابر است با حاصل نهایی هرگاه $a_n = ۹$، ولذا نتیجه همان است.) دراین‌حالت این دو روش نتایج متفاوت به‌دست می‌دهند. مثلاً اگر $x = ۱\frac{۵۷}{۱۰۰}$، آنگاه بسط اعشاری‌حاصل‌از روش اول برابراست با $۱٫۵۷۰۰۰۰\ldots$ وحاصل ازروش دوم برابراست با $۱٫۵۶۹۹۹۹\ldots$. به‌طورکلی،اگر x بسط اعشاری باپایانی‌چون $x = a_۰ ٫ a_۱ \ldots a_n$ داشته‌باشدکه $a_n \neq ۰$، آنگاه باروش‌اول $a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n ۰۰۰ \ldots$، به دست می‌آید، وباروش دوم $a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots (a_n - ۱)۹۹۹\ldots$.

بهترین راه برخورد بااین مسئله این‌است‌که هردو حالت‌را مجاز بدانیم. صرفاً فرض می‌کنیم $s_n = a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n$ آن قسمت ازبسط اعشاری تا n رقم اعشار (بدون‌گرد کردن) باشد. آنگاه l، حد دنبالهٔ (s_n)، را با

$$l = a_۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n \ldots$$

نمایش می‌دهیم. دراین صورت ممکن است دو دنبالهٔ متفاوت دارای حدود برابر باشند، واین تنها وقتی اتفاق می‌افتدکه همان‌گونه‌که دیدیم یکی عدد اعشاری با پایانی باشد و دیگری به‌دنباله‌ای از ۹ ختم شود. مثلاً اگر $s_n = ۰ ٫ a_۱ a_۲ \ldots a_n$ و هر $a_r = ۹$، آنگاه دنبالهٔ (s_n) حدی دارد که با $۰٫۹۹۹\ldots۹$ نمایش داده می‌شود. این حد دقیقاً همان ۱ است، پس

$$۱٫۰۰\ldots۰\ldots=۰٫۹۹\ldots۹\ldots$$

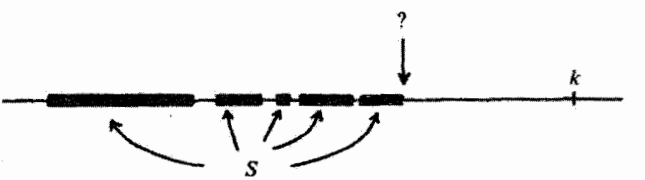
این نکته مهم است که $۰٫۹۹\ldots۹\ldots$ را عددی «بسیار جزئی کوچکتر» از ۱ تصور نکنیم، این دو صرفاً دو راه مختلف نوشتن یك عدد حقیقی هستند.

بهتر و آسانتر است که هردو نماد گذاری را مجاز بدانیم زیرا تحت شرایط خاصی درمحاسبه‌ای ممکن است دنبالهٔ نامتناهی از ۹ها به دست آید. این امر با استفاده ازدوروشی که قبلاً برای پیدا کردن بسط اعشاری حد دنباله‌های صعودی کراندار بیان کردیم اتفاق می‌افتد.

مثال. فرض کنیم $a_۱=۱$ و به طور کلی $a_{n+۱}=a_n+(\frac{۱}{۲})^n$، آنگاه بدیهی است که (a_n) صعودی است و با محاسبه به دست می‌آید که $a_n=۲-(\frac{۱}{۲})^{n-۱}$، پس این دنباله از بالا به ۲ محدود می‌شود. با استفاده از روش صفحهٔ ۳۷، درمی‌یابیم که دنبالهٔ (a_n) برابر است با $b_۰٫b_۱b_۲\ldots b_n\ldots=۱٫۹۹\ldots۹\ldots$.

مجموعهٔ کراندار

با رسم تصویر یك دنبالهٔ صعودی کراندار در واقع می‌توان فرایند حد را عملاً مشاهده کرد، که جملات آخر دنباله در فواصلی سریعاً نزولی به یکدیگر می‌پیوندند. اکنون نه فقط یك دنباله، بلکه زیرمجموعهٔ دلخواهی چون S از $\mathcal{R}$ را که از بالا به وسیلهٔ k محدود می‌شود بررسی می‌کنیم. ولذا به‌ازای هر $s\in S$، داریم $s\leqslant k$. آیا مفهومی شبیه به مفهوم حد وجود دارد؟



طبیعی‌ترین چیزی را که می‌توان انتظار داشت این است که S دارای یك بزرگترین عضو باشد، یعنی عددی چون $s_۰\in S$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $s\in S$، $s_۰\geqslant s$. متأسفانه، این مطلب کاملاً درست نیست. مثلاً، اگر S مجموعهٔ همهٔ اعضایی باشد که اکیداً از ۱ کوچکترهستند، آنگاه با اینکه یقیناً S از بالا کراندار است (مثلاً به $k=۱$) عضوی در S نیست که بزرگتر از همهٔ اعضای S باشد. زیرا فرض کنیم که y بزرگترین عضو آن باشد. آنگاه $y\in S$ پس $y<۱$، و آنگاه داریم

$$y<\frac{۱}{۲}(y+۱)<۱۰$$

پس $\frac{1}{2}(y+1) \in S$ که بزرگتر است از بزرگترین عضو فرضی y.

ولی همه چیز از دست نرفته است: صرفاً باید دقیقتر باشیم. دراین مثال مجموعهٔ S کرانهای بالای بسیاری دارد: در واقع هر $k \geqslant 1$ یك کران بالای S است. حال مجموعهٔ همهٔ کرانهای بالا حتماً یك کوچکترین عضو دارد. در واقع دراین مثال آن عضو ۱ است. به عبارت دیگر، نه تنها ۱ یك کران بالاست، بلکه هر کران بالای دیگر از ۱ بزرگتراست.

قبل از فرمول‌بندی این مطلب، باید کاملاً مطمئن شویم که این مفاهیم را درك می‌کنیم. یك زیرمجموعهٔ غیرتهی چون $S \subseteq \mathcal{R}$ ازبالا کراندار به $k \in \mathcal{R}$ نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $s \in S$، $s \leqslant k$. عدد k را یك کران بالای S می‌نامیم.

زیرمجموعه‌ای چون $S \subseteq \mathcal{R}$ کوچکترین کران بالایی مانند λ دارد اگر:

(یك) λ یك کران بالای S باشد،

(دو) اگر k هر کران بالایی برای S باشد، آنگاه $\lambda \leqslant k$.

گرچه کرانهای بالای بسیاری می‌توانند وجود داشته باشند ولی کوچکترین کران بالا باید یکتا باشد. زیرا اگر λ و μ هردو کوچکترین کران بالای S باشند، آنگاه با به‌کاربردن (دو) برای هریك ازاین‌دو داریم $\mu \leqslant \lambda$ و $\lambda \leqslant \mu$، ولذا $\lambda = \mu$.

مثال

(۱) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح باشد، آنگاه S هیچ کران بالا ندارد و لذا یقیناً کوچکترین کران بالا نیز ندارد.

(۲) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نابیشتراز ۴۹ باشد، آنگاه ۴۹ کوچکترین کران بالای S است.

(۳) اگر S مجموعهٔ همهٔ تقریبهای اعشاری ... ، ۱٫۴۱۴ ، ۱٫۴۱ ، ۱٫۴ ، ۱، برای $\sqrt{2}$، باشدآنگاه کوچکترین کران بالای S برابر $\sqrt{2}$ است.

(۴) اگر S مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای r باشدکه $r^2 < 2$، آنگاه $\sqrt{2}$ کوچکترین کران بالای S است.

درمثال ۲ کوچکترین کران بالا عضوی از S است، ولی درمثالهای ۳ و ۴ چنین نیست. لذا حتی اگر کوچکترین کران بالا وجود داشته باشد، ممکن است عضو مجموعهٔ مفروض نباشد.

باز هم مفاهیم دیگری نظیر مفاهیم فوق وجود دارند. زیرمجموعه‌ای چون S را از پایین کراندار می‌گوییم اگر kی در $\mathcal{R}$ وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $s \in S$، $k \leqslant s$، ودرایـن صورت k را یك کران پایین می‌نامیم. عدد $\mu \in \mathcal{R}$ یك بزرگترین کران پایین S نامیده می‌شود اگر

(یك) μ یك کران پایین S باشد،

(دو) اگر k کران پایینی برای S باشد، آنگاه $\mu \geqslant k$.

با لمی مشابه آنکه در مورد دنباله‌های نزولی به‌کار بردیم می‌توانیم همهٔ مسائل مربوط به‌بزرگترین کران پایین‌را به‌کوچکترین کران بالا تبدیل کنیم. درواقع همهٔ خواص بنیادی کرانهای بالا برای کرانهای پایین نیز برقرارند، البته به‌شرطی که $\geqslant$ را با $\leqslant$ عوض کنیم.

خاصیت کمال اعداد حقیقی‌را می‌توانیم به‌صورت کلی‌تری هم فرمول‌بندی کنیم:

قضیهٔ ۵. هرزیرمجموعهٔ غیرتهی از $\mathcal{R}$ که ازبالاکراندار باشدکوچکترین کران بالا هم دارد.

«غیرتهی» بودن الزامی‌است زیرا همهٔ اعدادکران بالای مجموعه بدون عضوهستند. بااستفاده ازبسطهای اعشاری، به همان نحوی‌که در مورد دنباله‌های صعودی انجام دادیم، می‌توانیم قضیهٔ فوق‌را اثبات کنیم. درواقع آسانتراست‌که ابتدا قضیه‌را برای کرانهای پایین اثبات وسپس بااستفاده از لم، آن‌را به‌کرانهای بالا تبدیل کنیم. لذا قضیهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

قضیهٔ ۶. هرزیرمجموعهٔ غیرتهی از $\mathcal{R}$ که ازپایین‌کراندار باشد بزرگترین کران پایین‌هم دارد.

اثبات. فرض‌کنیم a_0 بزرگترین عدد صحیحی باشدکه یك‌کران پایین‌است. فرض کنیم a_1 بزرگترین عدد صحیح از ۰ تا ۹ باشدکه a_0,a_1 یك‌کران پایین است. حال، به طور کلی، فرض‌کنیم a_n بزرگترین عدد صحیح از ۰ تا ۹ باشدکه $a_0,a_1a_2\cdots a_n$ یك کران پایین است. آنگاه می‌توان نشان دادکه

$$a_0,a_1a_2\cdots$$

بزرگترین‌کران پایین است. □

متذکرشدیم‌امکان‌پذیرنیست‌که تصویرچنان دقیقی رسم‌کنیم‌که بتوانیم اعدادگویارا ازاعداد غیرگویا تمیزدهیم. ولی مفاهیم‌کرانهای بالا و کرانهای پایین یك تفاوت نظری اساسی بین اعداد حقیقی وگویا فراهم می‌آورند. مثالهای (۳) و (۴) فوق مجموعه‌های کرانداری ازاعدادگویاهستندکه هیچ‌کوچکترین‌کران بالای گویا ندارند. به‌عبارت‌دیگر: $\mathcal{R}$ کامل است ولی $\mathcal{Q}$ کامل نیست. واین همان خاصیتی است‌که وقتی بعداً دراین‌کتاب اعداد حقیقی را به‌طور صوری تعریف می‌کنیم نقشی اساسی خواهد داشت.

تمرین

۱. هرمطلبی ازتجزیهٔ اعداد طبیعی به‌عوامل اول راکه لازم دارید دانسته فرض‌کنیدونشان دهیدکه هرعدد گویای مثبت r را می‌توان دقیقاً به یك روش به‌صورت حاصلضربی چون

$$r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

نوشت. دراینجا $p_1 = 2$ ، $p_2 = 3$ ، ... اعداداول به‌ترتیب صعودی هستند وهر α_k عددی صحیح است (مثبت، منفی یاصفر).

اعـداد‌گویای زیر را به‌این صورت بنویسید: ۲۰/۴۵، ۲، ۳/۸، ۱۴/۴۵. نشان دهید کـه $\sqrt{r}$ دقیقاً وقتی گویاست که α_1، α_2، ... زوج باشند. نتیجه بگیرید که به‌ازای هر عـدد صحیح مثبت n، $\sqrt{n}$ گنگ است اگر وفقط اگر n مربع عددی صحیح نباشد.

۲. باتعمیم نتیجهٔ تمرین ۱ همهٔ اعداد گویای r راکه $\sqrt[3]{r}$ (ریشهٔسوم r) گنگ باشدبیابید. نشان‌دهیدکه $\sqrt[n]{(\frac{3}{8})}$ به‌ازای هرعدد طبیعی $n \geqslant 2$ گنگ است.

۳. کدام یك ازاحکام زیر درست هستند؟

(الف) اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x+y$ گنگ است.

(ب) اگر x و y هردوگویا باشند، آنگاه $x+y$ گویاست.

(پ) اگر x گنگ باشد و y گویا، آنگاه $x+y$ گویاست.

(ت) اگر x و y هردوگنگ باشند، آنگاه $x+y$ گنگ است.

احکام درست‌را اثبات‌کنید ومثالهایی برای رد احکام نادرست بیاورید.

۴. ثابت‌کنیدکه بین هردو عدد حقیقی متمایز بینهایت عددگویا وبینهایت عددگنگ متمایز وجود دارند. (دراینجا منظور از «بینهایت» این است‌که به‌ازای هرعدد طبیعی n، حداقل n عدد باخاصیت مذکور وجود دارند.)

۵. به‌ازای اعداد حقیقی a، r و عدد طبیعی n، فرض‌کنید $s_n = a + ar + \cdots + ar^n$. نشان دهیدکه $rs_n - s_n = a(r^{n+1} - 1)$ ونتیجه بگیرید که

$$\text{به‌ازای } r \neq 1 \text{ ، } \left| s_n - \frac{a}{1-r} \right| = \left| \frac{r^{n+1}}{1-r} \right| .$$

به‌ازای $|r| < 1$ نتیجه بگیریدکه $s_n \to a/(1-r)$ هرگاه $n \to \infty$.

۶. ثابت‌کنیدکه عدد اعشاری بی‌پایان $x = a_0 . a_1 a_2 a_3 \cdots$ عددی‌گویاست اگر و فقط اگر«سرانجام دورهٔ‌گردش» داشته باشد یعنی،از a_nی‌به‌بعد بلوکی از ارقام الی غیرالنهایه تکرار گردد.

$$x = a_0 . a_1 \cdots a_n \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}}\ \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}}\ \underbrace{a_{n+1} \cdots a_{n+k}} \cdots$$

(راهنمایی: برای یك‌طرف‌قضیه، تمرین۵را با $a = a_{n+1} \cdots a_{n+k} / 10^{n+k}$ و $r = 1/10^k$ به‌کار ببرید.)

۰۷. ثابت کنید عدد

$$y = ۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰\ldots$$

(که درفرم اعشاری ارقامش اعداد طبیعی، پشت سرهم، هستند) گنگ است.
آیا

$$۰٫۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱\ldots$$

(که در آن هردسته از صفرهای متوالی یك صفر بیشتراز دستهٔ قبلی دارد) عددی گویاست یا گنگ؟

۰۸. بگویید آیا هیچ یك ازدنباله‌های (a_n) زیر به حدی میل می‌کند، واگر بـه حدی میل می‌کند آن حد چیست. با استفاده از تعریف $\varepsilon - N$ صحت جواب خودرا ثابت کنید.

(الف) $a_n = n^۲$،

(ب) $a_n = ۱/(n^۲+۱)$،

(پ) $a_n = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \ldots + (\frac{۱}{۳})^n$،

(ت) $a_n = (-۱)^n$،

(ث) $a_n = (-\frac{۱}{۲})^n$.

قسمت II

آغاز صورتگرایی

در پنج فصل بعد روشهای لازم جهت قراردادن استدلال ریاضی برپایهٔ منطقی استوارتررا می‌پرورانیم. دراینجا نیزاستفاده از ایده‌های شهودی را مجازمی‌شماریم، ولی‌تنها به‌عنوان انگیزهٔ مفاهیمی‌که معرفی می‌کنیم، و نه به‌عنوان جزئی از استدلال.

در تشبیه به «ساختمان»، آجر، سیمان، تیرآهن، سفال، لوله، و مواد دیگر را تدارك می‌بینیم؛ وگروهی ازبناها، گچ برها، نجارها، ولوله‌کشها را جهت روی هم‌گذاشتن صحیح این‌موادگرد هم می‌آوریم. درتشبیه به «گیاه»، گلدان، کاردك، چنگك، بیلچه، ومقدارمناسبی حشره‌کش برای از بین بردن حشرات، موردنیاز است.

کار خود را بر روی دو ایدهٔ اصلی متمرکز می‌کنیم: استفاده از نظریـهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان منبع مواد اولیه، و استفاده از منطق برای حصول اطمینان از دقت و اعتبار اثبات قضایا. سه فصل اول را به‌مجموعه‌هـا و موضوعات مربوط به‌آن اختصاص می‌دهیم، و دو فصل بعدی را به‌منطق. هردو ایده را از دیدگاه ریاضیدانی عملی‌که بیشتر مایل است این مفاهیم را درکارش به‌کاربرد تا در خود این موضوعات، دنبال می‌کنیم.

۳

مجموعه

بنابر عقیده‌ای که در فصل ۱ بیان کردیم، جهت ارائهٔ تعریفی دقیق برای مفهوم «مجموعه» هیچ اقدامی نمی‌کنیم. این امر ما را از توصیف مجموعه باز نمی‌دارد. هرمجموعه دسته‌ای است از چیزهای دلخواه. کلمهٔ «دسته» هیچ حکمی در مورد تعداد چیزهای در مجموعه نمی‌کند: مجموعه ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد: ممکن است فقط یك شیء در آن باشد، یا حتی هیچ شیئی در آن نباشد. همچنین کلمهٔ «دسته» هیچ حکمی درمورد یکنواختی نوع چیزهای تشکیل‌دهندهٔ مجموعه نمی‌کند: یك مجموعهٔ کاملاً خوب ممکن‌است متشکل از سه عدد، دو مثلث، ویك تابع باشد. بدیهی است که مفهومی بسا این عمومیت، میدان وسیعی برای مثالهای نامأنوس فراهم می‌سازد. ولی، مجموعه‌های موردتوجه ما در ریاضیات لزوماً آنهایی‌هستندکه ازاشیاءریاضی تشکیل می‌شوند. دریك سطح مقدماتی با مجموعه‌های اعداد، مجموعه‌های نقاط در صفحه، مجموعه‌های منحنیهای هندسی، و مجموعه‌های توابع آشنا می‌شویم. در ریاضیات پیشرفته‌تر، بامجموعه‌های متنوع فراوانی برمی‌خوریم؛ در واقع تقریباً همهٔ مفاهیم مورد توجه در ریاضیات، از نظریهٔ مجموعه‌ها نشأت می‌گیرند.

امروزه مفهوم«مجموعه» درتمام ریاضیات مفهومی‌بنیادی تلقی‌می‌شود—حتی‌بنیادی‌تر ازمفهوم «عدد» که در قرون اولیه اساس کارشمرده می‌شد. دلایل‌زیادی برای این امر وجود دارد. یکی اینکه درحل معادلات معمولا مجموعه‌ای از جوابها به دست می‌آید و نه صرفاً یك جواب: مثلا، معادلات درجهٔ دوم معمولاً دو جواب دارند. همچنین ریاضیات جدید تأکید بسرتعمیم دارد. قضایای جالب توجه در موارد متعددی بکار می‌آیند. اهمیت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که دریك مثلث قائم‌الزاویهٔ خاص صدق می‌کند، بلکه به‌این

خاطر است که در مورد همهٔ آنها صحیح است. و از این‌رو، خاصیتی از مجموعهٔ همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه را بیان می‌کند. مفهوم «گروه» (که بعداً در این کتاب شرح داده می‌شود) به‌اشکال متعددی در تمام ریاضیات ظاهر می‌شود. زبان مجموعه‌ها کمک می‌کند که خواص کلی گروه را فرمول‌بندی کنیم، و لذا در تمام مظاهر آن این خواص را به‌کار ببندیم. این قدرت بیان مفاهیم کلی با استفاده از زبان نظریهٔ مجموعه‌هاست که ویژگی خاصی به ریاضیات جدید داده است.

جهت مواجهه با همهٔ مجموعه‌هایی که در ریاضیات مطرح می‌شوند، آسانتر است که نخست خواص عمومی مشترك در همهٔ مجموعه‌ها را بررسی کنیم و سپس آنها را در موارد خاص به‌کار ببریم. در این فصل می‌پردازیم به‌روشهای طبیعی و متعدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها برای تشکیل مجموعه‌های دیگر. همان‌طور که مطالعهٔ سیستماتیك خواص کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و از این قبیل، به‌جبر اعداد می‌انجامد، مطالعهٔ سیستماتیك این روشها نیز به‌نوعی «جبر» مجموعه‌ها منجر می‌شود.

عضو

چیزهایی که با هم مجموعهٔ مفروضی را تشکیل می‌دهند، عضوها یا عنصرهای آن مجموعه نامیده می‌شوند. همچنین می‌گوییم این عضوها متعلق به‌مجموعه هستند. برای آنکه تعلق عضوی چون x به‌مجموعه‌ای چون S را به‌طور نمادی بیان کنیم، می‌نویسیم

$$x \in S.$$

اگر x متعلق به S نباشد، می‌نویسیم

$$x \notin S.$$

برای اینکه مجموعهٔ تحت بررسی را بشناسیم، بدیهی است که باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند. برعکس، اگر موضوع عضویت کاملاً معلوم باشد، می‌دانیم که این اعضا چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند. ملا لغطی بودن در این مورد آن‌طور هم که به‌نظر می‌رسد بیهوده نیست، زیرا اغلب ممکن است یك مجموعه را به‌روشهای مختلف توصیف کنیم، و پس از مشاهدهٔ اعضای آن پی ببریم که این مجموعه‌ها همه یکی هستند. مثلاً، اگر A مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ

$$x^2 - ۶x + ۸ = ۰$$

باشد و B مجموعهٔ اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه A و B هردو دقیقاً دو عضو دارند، ۲ و ۴. یعنی مجموعه‌های A و B یکی هستند. بنابراین عقلایی است بگوییم که دو مجموعه برابرند اگر اعضایشان یکی باشد. برابری دو مجموعهٔ S و T را به‌صورت معمول

$$S = T$$

نمایش می‌دهیم، و اگر S و T برابر نباشند، می‌نویسیم

$$S \neq T.$$

این معیار ظاهراً پیش‌پا افتاده برای برابری مجموعه‌ها، نتایج جالب توجهی هم دارد که هم‌اکنون ملاحظه می‌کنیم.

ساده‌ترین روش مشخص‌کردن یك مجموعه، فهرست‌کردن اعضایش است (البته اگر امکان‌پذیر باشد). نماد استانداردِ این روش‌محصورکردن فهرست درون آکولاد { } است. لذا هرگاه بنویسیم

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

منظورمان این است که S مجموعه‌ای است‌که اعضایش اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و فقط اینها، هستند. به‌عنوان مثالی دیگر، اگر

$$T = \left\{۷۹, \pi^۲, \sqrt{(۵+\sqrt{۷})}, \frac{۴}{۵}\right\},$$

آنگاه اعضای T اعداد ۷۹، $\pi^۲$، $\sqrt{(۵+\sqrt{۷})}$، و ۴/۵ هستند.

در مورد این نماد دو نکته را که هر دو از مفهوم برابری مجموعه‌ها ناشی می‌شوند باید تأکید کنیم. اول اینکه ترتیب فهرست‌کردن اعضا بی‌اهمیت است. مجموعهٔ $\{۱, ۶, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ با مجموعهٔ S برابر است، و همچنین است مجموعهٔ $\{۴, ۶, ۱, ۲, ۵, ۳\}$. چرا؟ زیرا درهرسه مورد اعضا فرقی ندارند و همان ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ هستند. ترتیب اعضای داخل آکولاد هیچ دلیل ریاضی ندارد، بلکه ناشی از قرارداد نوشتن از چپ به‌راست است. دوم آنکه، تکرار اعضا در فهرست نیز مجموعه را تغییر نمی‌دهد. مثلاً، $\{۵, ۳, ۱, ۶, ۴, ۳, ۲, ۱\}$ همان دوست قدیمی‌ما جناب S است. دلیلی برای این‌قرارداد ظاهراً نامأنوس هم وجود دارد. ممکن است دو فهرست را ترکیب کنیم و مجموعه‌ای مثلاً متشکل از همهٔ مقسوم‌علیه‌های سرهٔ ۱۲، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، و اعداد فردکوچکتر از ۶ را که ۱، ۳، و ۵ هستند، به‌دست آوریم. صرفاً با نوشتن یك فهرست بعد از فهرست دیگر دقیقاً همان مجموعه‌ای را به‌دست می‌آوریم که نوشتیم. در این مورد، بسیار آسان است‌که فهرست را مرور و تکراریها را حذف کنیم؛ ولی، به‌طورکلی، بهتر است انعطاف‌پذیری نماد را حفظ کنیم وتکرار را مجاز بدانیم. با توجه به‌این قرارداد که هرمجموعه با اعضایش مشخص می‌شود، نتیجه می‌گیریم که همهٔ نمایشهای گوناگون مجموعهٔ S تنها اعضای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶ را دارند ولاغیر.

ممکن‌است تصورشودکه مطالب فوق تنها صفات ویژهٔ نمادگذاری را نشان می‌دهند و ارزش مفهومی چندانی‌ندارند. با این حقیقت آشناییم‌که، مثلاً، در نوشتن‌کسرنمادهای متفاوتی‌برای نمایش یك عدد به‌کارمی‌روند: $۱/۲ = ۲/۴ = ۳/۶ = \ldots$. در واقع این امریکی‌ازمتداولترین‌کاربرد علامت برابری است؛ به‌عبارت دیگر، هرگاه بنویسیم $x = y$، منظورمان این است‌که دو نماد طرفین علامت برابری چیزی جز دو نام متفاوت برای یك

چیز نیستند، $۴ = \sqrt{۱۶} + ۱ = ۵ - ۳ = ۱۲ \div ۳ = ۲ + ۲$. وقتی برای بیان برابری مجموعه‌ها می‌نویسیم $S = T$، از همین قرارداد استفاده می‌کنیم. حال که این مطلب را درک کردیم، مشکلی اساسی وجود ندارد؛ این چند سؤال را صرفاً بدین دلیل مطرح کردیم که تکلیف آنها را معلوم کرده باشیم.

در مشخص کردن یك مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعهٔ اعداد اول با همین عبارت بهتر توصیف می‌شود تا با فهرست

$$\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \ldots\}.$$

ذکر چند جمله از یك مجموعهٔ بی‌پایان به‌روش فوق در معرض همان سوء تعبیری است که وقتی چند جملهٔ اول یك دنباله را می‌نویسیم، منتهی کمی هم بدتر. برای دنباله نظمی متصور هستیم، ولی برطبق قرارداد درمورد مجموعه‌ها، اعضای داخل آکولاد هیچ ترتیب خاصی ندارند. لذا فهرست فوق را چنین نیز می‌توان نوشت

$$\{۷, ۱۷, ۳۷, ۴۷, ۲, ۱۱, ۳, ۵, \ldots\}.$$

چه کسی می‌تواند از این آشفتگی سردر بیاورد وقسم بخورد که این مجموعه، همان مجموعهٔ همهٔ اعداد اول است؟ حال که این تذکر را بیان کردیم باید اذعان کنیم که ریاضیدانان، نمادگذاری آکولاد برای مجموعه‌های متناهی را در مناسبتهایی به‌کار می‌برند. ما نیز گاهی چنین می‌کنیم.

در مورد فوق، دقیقتر است اگر بنویسیم

$$P = \{\text{همهٔ اعداد اول}\}$$

که بی‌نیاز از توصیف است. تغییر مختصری که بسیار مفید هم هست، چنین است

$$P = \{p \mid p \text{ عددی اول باشد}\}.$$

آکولاد را «مجموعهٔ همهٔ . . .» می‌خوانیم، وخط عمودی را «. . . هایی که»، و لذا کل نماد را به‌صورت «مجموعهٔ همهٔ pهایی که p عددی اول باشد» می‌خوانیم که خود مسلماً به‌معنی «مجموعهٔ همهٔ اعداد اول» است. به‌طور کلی هر تعریف از نوع

$$Q = \{x \mid x \text{ شرطی در مورد}\}$$

به‌این معنی است که Q مجموعهٔ همهٔ xهایی است که در مورد آنها شرط مفروض صادق باشد. برای اینکه ببینیم این نماد چقدر مفید است، فرض کنیم می‌خواهیم S را مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم زیر تعریف کنیم:

$$x^۲ - ۵x + ۶ = ۰.$$

البته می‌توان معادله را حل کرد ونوشت $S = \{۲, ۳\}$. ولی راه بسیار آسانتر این است که از حل معادله اجتناب کنیم و بنویسیم

$$S=\{x|x^{۲}-۵x+۶=۰\}.$$

به‌این طریق تعریفی دقیق و بدون ابهام برای S به‌دست می‌آید. البته این تعریف به‌حل معادله کمکی نمی‌کند! ولی نکتهٔ اصلی همین است که بدون آنکه در واقع هیچ عملی انجام دهیم می‌توانیم مجموعهٔ S را مشخص کنیم.

در این نمادگذاری نیز ابهامی وجود دارد که باید با آن برخوردی عاقلانه داشته باشیم. اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، آنگاه مجموعهٔ

$$\{x|۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

متشکل است از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵؛ ولی اگر اعداد حقیقی موردنظر باشند، آنگاه همهٔ اعداد حقیقی دیگر بین ۱ و ۵ را نیز شامل می‌شود. بهترین راه‌حل این است که مجموعه‌ای چون Y را نیز که اعضای مجموعهٔ موردنظر می‌بایست از آن انتخاب شوند مشخص کنیم. نماد

$$X=\{x\in Y|x \text{ شرطی در مورد}\}$$

به‌این معنی است که X مجموعهٔ تمام اعضایی مانند x موجود در مجموعهٔ مفروض Y است که به‌ازای آنها شرط مفروض درمورد x برآورده می‌شود. در واقع این نماد درست مانند

$$X=\{x|\ x\in Y \text{ و شرطی در مورد } x\}$$

است، ولی ما نماد اول را ترجیح می‌دهیم، زیرا این نماد برنقش Y تأکید دارد.

اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آنگاه اعضای مجموعهٔ

$$\{x\in\mathbb{Z}|۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

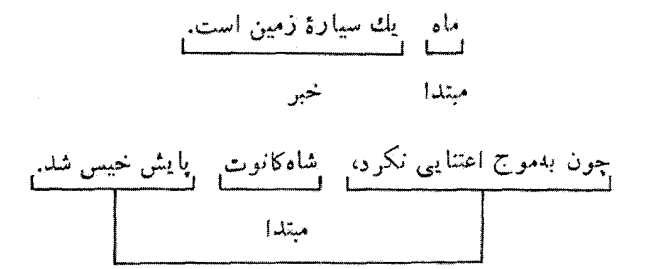
عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵؛ درحالی که هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ که درعبارت $۱\leqslant a\leqslant ۵$ صدق کند عضوی از مجموعهٔ

$$\{x\in\mathbb{R}|\ ۱\leqslant x\leqslant ۵\}$$

است.

دلیل بازهم جدیتری برای تعیین مجموعه‌ای چون Y که اعضای مجموعهٔ X از آن انتخاب می‌شوند وجود دارد، و آن این است که یقین حاصل شود «شرطی در مورد x» به‌ازای اعضای $x\in Y$ عاری از معنی نیست. آن «شرط در مورد x» باید خاصیتی باشد که به‌ازای هر $x\in Y$ به‌روشنی یا درست باشد یا نادرست، و در این صورت اعضای مجموعهٔ X که با این خاصیت انتخاب می‌شوند دقیقاً تمام اعضایی از Y هستند که این خاصیت در مورد آنها درست است.

در دستور زبان فارسی، هر جمله به‌دو قسمت تقسیم می‌شود، مبتدای جمله و بقیهٔ جمله، که چیزی در بارهٔ مبتدا می‌گوید و خبر نام دارد.



ریاضیدانان که عادت دارند نمادی چون x را برای نمایش یك مجهول به‌کار ببرند، ممکن است موضوع را چنین تحلیل کنند که خبر در جملهٔ نخست عبارت است از:

x یك سیارهٔ زمین است

و خبر در جملهٔ دوم عبارت است از:

چون به‌موج اعتنایی نکرد، x پایش خیس شد.

زیبایی این توصیف این است که مکان مبتدا در جمله مشخص است. برای باز یافتن جملهٔ اصلی، صرفاً مبتدای مناسب را به‌جای x قرار می‌دهیم.

این تحلیل، ایدهٔ یك گزاره‌نما در ریاضیات را توصیف می‌کند. به‌بیان ساده، گزاره‌نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هرگاه عضوی چون $a \in Y$ را به‌جای x قرار دهیم جملهٔ حاصل یا به‌وضوح درست باشد یا به‌وضوح نادرست. اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما «برای مجموعهٔ Y معتبر» است. مثلاً، عبارت

$$۱ \leqslant x \leqslant ۵$$

یك گزاره‌نماست که برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ معتبر است. برای مجموعهٔ $\mathbb{R}$ هم معتبر است. با قراردادن هر عدد صحیح یا حقیقی به‌جای x جمله‌ای به‌دست می‌آید که یا درست است یا نادرست.

$۱ \leqslant ۳ \leqslant ۵$ درست است،

$۱ \leqslant ۵۷ \leqslant ۵$ نادرست است،

والی آخر.

مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid ۱ \leqslant x \leqslant ۵\}$، همان مجموعهٔ همهٔ $x \in \mathbb{Z}$ است که گزاره‌نمای $۱ \leqslant x \leqslant ۵$ درست باشد.

گزاره‌نماها لزوماً به‌مجموعهٔ اعداد منحصر نمی‌شوند. مثلاً، اگر T مجموعهٔ مثلثهای واقع در صفحه باشد، آنگاه عبارت

x قائم‌الزاویه است

گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعهٔ T، و

$$\{x \in T \mid x \text{ مثلثی قائم‌الزاویه باشد}\}$$

صرفاً مجموعهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ واقع درصفحه است.

بازهم می‌توانیم مثالهای فراوانی ازگزاره نماها بیاوریم، ولـی بـه‌این کار نیازی نداریم زیرا به‌هرتقدیرمثالهای بسیاری درمتن ظاهرخواهندشد. خواننده باید این مطلب‌را در ذهن خودش بپروراندکه درنماد

$$\{x \in Y \mid P(x)\}$$

منظور این است‌که $P(x)$ گزاره نمایی است برحسب x ومعتبر به‌ازای هر $x \in Y$.

زیر مجموعه

در درون هرمجموعهٔ مفروض A مجموعه‌های دیگری وجود دارند، که ازحذف برخی از اعضای A به‌دست می‌آیند. این‌مجموعه‌هارا زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. به‌بیان صوری‌تر، می‌گوییم B یك زیر مجموعه از A است اگر هرعضو B عضوی از A باشد، ومی‌نویسیم

$$B \subseteq A$$

یا

$$A \supseteq B .$$

همچنین می‌گوییم‌که B مشمول، یا جزء، A است. باتوجه به این تعریف بدیهی است‌کـه $A \subseteq A$. اگر $B \subseteq A$ و $B \neq A$، آنگاه می‌گوییم‌که B یك زیرمجموعهٔ سره از Aاست، و می‌نویسیم[1]

$$B \subsetneq A .$$

ازمعیار برابری مجموعه‌ها قضیه‌ای بدیهی ولی سودمند حاصل می‌شود:

قضیهٔ ۱. فرض‌کنیم A و B دومجموعـه باشند. آنگاه $A = B$ اگـر وفقط اگـر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

اثبات. اگر $A = B$ آنگاه، از آنجاکه $A \subseteq A$، نتیجه می‌گیریم‌کـه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. برعکس، فرض‌کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. آنگاه هر عضو Aعضوی از B است، و هرعضو B عضوی از A. ازاین‌رو اعضای A و B یکی هستند ولذا $A = B$. □

کاربرد عملی این قضیه این است که غالباً می‌خواهیم برابری دومجموعه را نشان دهیم که

---

۱. بسیاری از ریاضیدانان نماد $\subset$ را بـه‌جای نماد $\subseteq$ که ما به‌کار می‌بریم به‌کار می‌برند وبرخی دیگر $\subset$ را به‌جای $\subsetneq$ که ما انتخاب کرده‌ایم. خوشبختانـه استفاده از $\subseteq$ کاملاً خالی از ابهام است.

هریك ممکن است برحسب این یا آن گزاره‌نما داده‌شده باشد. برای ساده‌کردن‌کار، عضوی نوعی از A را (که برحسب گزارهٔ معینی داده شده‌است) در نظر می‌گیریم ونشان می‌دهیم که این عضو عضوی از B نیز هست. این امرثابت می‌کندکه $A \subseteq B$، آنگاه با برهانی مناسب وازهمان نوع نشان‌می‌دهیم‌که $B \subseteq A$. به‌زودی مثالهای فراوانی‌ازاین نوع‌روش اثبات‌را خواهیم دید (مثلاً درقضیه‌های ۳، ۴، و ۵).

یك خاصیت بنیادی زیرمجموعه‌ها این‌است‌که هرزیرمجموعهٔ یك زیرمجموعه، خود یك زیرمجموعه است:

قضیهٔ ۲. اگر A، B، و C سه مجموعه باشندکه $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه $A \subseteq C$.

اثبات. هرعضو A عضوی از B است وهرعضو B عضوی‌از C است. بنابراین هر عضو A عضوی از C نیز هست، لذا $A \subseteq C$. □

این مطلب خیلی مهم است‌که زیر مجموعه‌هارا بااعضا اشتباه نگیریم، زیرا که این دو مفهوم‌کاملاً متفاوت‌هستند. اعضای مجموعهٔ $\{۲ , ۱\}$ عبارتنداز ۱ و ۲. زیرمجموعه‌های $\{۲ , ۱\}$ عبارتنداز $\{۲ , ۱\}$، $\{۱\}$، $\{۲\}$، و زیرمجموعهٔ چهارمی‌که فعلاً بهتراست‌آن‌را با $\{\ \}$ نمایش دهیم.

به‌علاوه، اگر «$\subseteq$» را بـه «$\in$» تغییر دهیم قضیهٔ ۲ نادرست می‌شود. اعضای اعضا لزومی ندارند عضو باشند. مثلاً، فرض‌کنیم:

$$A = ۱, B = \{۱ , ۲\}, C = \{\{۱ , ۲\}, \{۳ , ۴\}\}$$

آنگاه $A \in B$ و $B \in C$. ولی‌اعضای C عبارتنداز $\{۱ , ۲\}$, $\{۳ , ۴\}$ لذا $A = ۱$ عضو C نیست.

حال بـه‌سراغ مجموعهٔ $\{\ \}$ می‌رویم. مجموعه‌ای را تهی می گوییم‌که هیچ عضوی نداشته باشد. مثلاً، مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbb{Z} | x = x + ۱\}$$

تهی است. زیرا معادلـهٔ $x = x + ۱$ جوابی در $\mathbb{Z}$ ندارد. بـه‌واسطهٔ عـدم وجود عضو، مجموعهٔ تهی دارای خواص قابل ملاحظه‌ای (قابل ملاحظه درنگاه اول) است. مثلاً، اگر E مجموعه‌ای تهی و X مجموعه‌ای دلخواه باشد، آنگاه $E \subseteq X$. چرا؟ باید نشان دهیم که هـرعضو E عضوی‌از X نیزهست. تنها وقتی این مطلب نادرست‌است‌کـه E عضوی چون e داشته باشدکه متعلق به X نباشد. ولی E، چون تهی‌است اصلاً هیچ عضوی‌ندارد، ولذا شامل چنین عضوی نیست.

این برهان (عجیب ولی منطقی) را «برهان به‌انتفای مقدم» می‌نامیم، و نباید اهمیت خاصی برای‌آن قایل شویم.

فرض‌کنیم دومجموعهٔ تهی E و E' داده شده‌اند. بنا به‌مطلب فوق. داریم $E' \subseteq E$ و $E \subseteq E'$. پس‌بنا به‌قضیهٔ ۱، $E = E'$. همهٔ مجموعه‌های تهی برابرند. ازاین‌رو مجموعهٔ

تهی یکتاست. بنابراین نماد خاصی‌را به‌آن اختصاص می‌دهیم: برای نمایش مجموعهٔ تهی می‌نویسیم

$$\varnothing .$$

این‌امر باعث تعجب نیست، درغیبت هرنوع عضوی، به‌هیچ وجه نمی‌توان دو مجموعهٔ تهی‌را از هم تمیزداد. همان طورکه در [۱۵] آمده است «محتوای دو پاکت خالی برابرند».

آیا مجموعه‌ای جامع وجود دارد؟

همان طورکه مجموعهٔ تهی $\varnothing$ وجود داردکه شامل هیچ عضوی نیست، این سؤال پیش می‌آیدکه آیا مجموعهٔ بسیار بزرگی چون Ω وجود داردکه بی‌قید وشرط شامل همه چیز باشد. خواهیم دیدکه چنین چیزی بسیار تخیلی است. چنین مجموعه‌ای باید جوال بسیار بزرگی باشد؛ اگر بخواهد همه چیزرا شامل شود باید شامل همهٔ اعداد، همهٔ اعضای همهٔ مجموعه‌ها، همهٔ مجموعه‌ها، همهٔ مکانهای دنیا، دیوان حافظ، رستم دستان، سال ۱۰۶۶، لطیفه‌های ملانصرالدین،... هم‌باشد. اگرجرأت تصور چنین مجموعهٔ Ω را داشته باشیم، آنگاه خود Ω باید مفهومی قابل قبول باشد و لذا باید آن‌را نیز دردستهٔ همهٔ اشیا قرار دهیم. لذا مجموعه‌ای می‌یابیم باخاصیت $\Omega \in \Omega$! ولی اکثرمجموعه‌های بامعنی به‌خودشان تعلق ندارند، درحقیقت خواننده می‌تواند دقایقی‌ازعمرگرانبهای خودرا صرف پیداکردن چنین مجموعه‌ای‌کند. اگر از مجموعهٔ فرضی Ω اشیایی‌را انتخاب‌کنیم‌که مجموعه باشند و به‌خودشان تعلق نداشته باشند، مجموعهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$S=\{A\in\Omega \mid A\notin A\}.$$

حال سؤالی یك میلیون تومانی: آیا $S \in S$ ؟...

اگر $S \in S$، آنگاه باتوجه به‌گزاره‌نمای معرف S، داریم $S \notin S$.

اگر $S \notin S$، آنگاه S درگزاره‌نمای معرف صدق می‌کند، ولذا $S \in S$!

فرض خیالی وجود مجموعهٔ جامع Ω مارا به‌یك پارادوکس رهنمون‌کرد. لذا یك مجموعهٔ جامع نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ممکن است تصورشودکه اگر اشیای عجیب‌را حذف وتوجه خودرا صرف یافتن مجموعه‌ای جامع درحوزهٔ ریاضیات‌کنیم، می‌توانیم ازاین پارادوکس رها شویم. این نیز تله‌های خودش‌را دارد. اگربخواهیم مجموعه‌ای چون Ω_M متشکل ازهمهٔ اشیای ریاضی (به‌هرمعنایی) را تصورکنیم، آنگاه وقتی‌که زیر مجموعه‌ای از Ω_M متشکل از همهٔ اشیای ریاضی‌راکه متعلق به خودشان نیستند درنظرمی‌گیریم، به همان دام قبلی گرفتار می‌شویم.

برای احتراز ازاین‌گونه پارادوکسها، ضروراست مجموعه‌هایی‌را درنظربگیریم‌که تعریف روشنی داشته باشند ودقیقاً بدانیم چه‌اشیایی عضوآن هستند وکدام نیستند.

فقدان یك مجموعهٔ جامع دلیل دیگری است که نماد

$$\{x \in Y | P(x)\},$$

که در آن Y مجموعهٔ معلومی است و $P(x)$ یك گزاره‌نما، برنماد

$$\{x | P(x)\}.$$

برتری دارد. با در دست داشتن مجموعهٔ مشخصی چون Y، قبل‌از اقدام به‌گزینش اعضایی از Y که به‌ازای آنها گزاره‌نمای $P(x)$ درست است، می‌توانیم گزاره‌نمای $P(x)$ را بررسی ویقین حاصل کنیم که به‌ازای همهٔ اعضای Y معتبراست. چنانچه بدون تبعیض نماد $\{x | P(x)\}$ را که امتحان عضویت هرشیء x را جایز می‌شمارد، به‌کاربریم مانند این‌است که $\{x \in \Omega | P(x)\}$ را درنظربگیریم. ملاحظه‌کردیم که هیچ مجموعهٔ جامعی وجود ندارد. اگر از ابتدا مجموعه‌ای چون Y را مشخص نکنیم، آنگاه باید بی‌هیچ قید وشرطی همهٔ اشیاء را با گزاره‌نمای $P(x)$ آزمایش کنیم. درآن‌صورت شخص ممکن‌است شیئی‌را امتحان کندکه حتی مربوط به بحث نباشد و بازهم به‌پارادوکس برسد. برای روشن شدن مطلب به‌مثال مشخصی می‌پردازیم. اگر $\mathcal{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathcal{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی، و T مجموعهٔ همهٔ مثلثهای واقع در صفحه باشد، آنگاه $\mathcal{Z} \notin \mathcal{Z}$ ، $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ و $T \notin T$. اگر Y مجموعه‌ای باشدکه اعضایش $\mathcal{Z}$ ، $\mathcal{R}$، و T باشند، آنگاه

$$\{x \in Y | x \notin x\} = \{\mathcal{Z}, \mathcal{R}, T\}.$$

برای این مجموعهٔ Y، خاصیت $x \notin x$ گزاره‌ای کاملاً قابل قبول است. اگر

$$\{x | x \notin x\}$$

را درنظر بگیریم، آنگاه چون محدودیتی برای x قایل نشده‌ایم، تصور ما می‌تواند حادثه بیافریند و بادرنظرگرفتن خود مجموعهٔ $S = \{x | x \notin x\}$ به‌همان تناقض قبلی، یعنی $S \in S$ اگر وفقط اگر $S \notin S$، برسیم.

نتیجهٔ این بحث خاص این است که نظریهٔ مجموعه‌ها یك دستگاه نمادگذاری است و نه یك دستورالعمل شعبده بازی. ازاین‌رو، خوب یا بد بودن آن به نحوهٔ استفاده از آن بستگی دارد. اگرخوب ازآن استفاده شود، خوب هم عمل می‌کند. ولی مانند هر دستگاه دیگر، استفادهٔ غلط ازآن می‌تواند نتایج نامطلوب داشته باشد.

اجتماع و اشتراك

دو روش مهم «ترکیب» مجموعه‌ها به‌اجتماع واشتراك معروف هستند. اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش همان اعضای A است همراه با اعضای B. اگر

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

آنگاه اجتماع آنهامجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ است. اجتماع A و B را به‌صورت $A\cup B$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم

$$A\cup B=\{x|(x\in A \text{ یا } x\in B \text{ (یا به هردو)})\}.$$

اشتراك A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق داشته باشند. اشتراك مجموعه‌های A و B در فوق، مجموعهٔ $\{۳\}$ است، زیرا فقط ۳ به هر دوی آنها تعلق دارد. نماد نمایش اشتراك $A\cap B$ است. یعنی

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ و } x\in B\}.$$

توجه داشته باشیدکه اشتراك را به‌صورت زیرنیز می‌توان نوشت:

$$A\cap B=\{x\in A|x\in B\}$$

ولذا می‌توان آن‌را زیرمجموعه‌ای از A دانست که بااستفاده از گزاره‌نمای $x\in B$ انتخاب می‌شود. (به‌عبارت معادل، می‌توان آن‌را زیرمجموعه‌ای از B دانست که در گزاره نمای $x\in A$ صدق می‌کند). ازسوی دیگر، اجتماع مستلزم ساختن مجموعهٔ جدیدی است که (معمولاً) ازهردو مجموعهٔ A و B بزرگتر است؛ لذا مثالی داریم از ساختن یك مجموعه که اعضایش ازمجموعهٔ ازقبل تعیین شده‌ای چون Y انتخاب نمی‌شود.

عملهای اجتماع واشتراك ازقوانین «استانداردی» معینی پیروی می‌کنند. اکثراین قوانین بدیهی هستند، ولی برای سهولت آنهارا درسه قضیهٔ زیر ذکرمی‌کنیم.

قضیهٔ ۳. فرض‌کنیم A، B، و C مجموعه‌هایی باشند. آنگاه داریم:

(الف) $A\cup\varnothing=A$،

(ب) $A\cup A=A$،

(پ) $A\cup B=B\cup A$،

(ت) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

اثبات. تنها (ت) قدری مشکل است. فرض کنیم $x\in(A\cup B)\cup C$. آنگاه $x\in A\cup B$ یا $x\in C$. اگر $x\in C$، آنگاه $x\in B\cup C$، ولذا $x\in A\cup(B\cup C)$. در غیراین صورت، $x\in A\cup B$ ولذا یا $x\in A$ یا $x\in B$. درهرحال دوباره نتیجه می‌شودکه $x\in A\cup(B\cup C)$. بنابراین ثابت کردیم که اگر $x\in(A\cup B)\cup C$ آنگاه $x\in A\cup(B\cup C)$، به‌عبارت دیگر

$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C).$$

برهانی مشابه، باهمان مراحل و باهمان سادگی، نشان می‌دهدکه

$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C.$$

بااستفاده از قضیهٔ ۱، برابری موردنظر حاصل می‌شود. □

خواننده حتماً متوجه شده‌است که این اثبات پیچیده‌تر از آن است کـه مطلب اقتضا می‌کند، زیرا بدیهی است که $(A\cup B)\cup C$ مجموعه‌ای است که اعضایش روی‌هم‌اعضای A، اعضای B، و اعضای C است؛ واین همان مجموعه $A\cup(B\cup C)$ است. حال که این برابری معلوم شد، می‌توان همهٔ پرانتزهارا حذف کرد وفقط نوشت

$$A\cup B\cup C.$$

نتایج مشابهی برای اشتراك هم برقرارند.

قضیهٔ ۴.

(الف) $A\cap\varnothing=\varnothing$،

(ب) $A\cap A=A$،

(پ) $A\cap B=B\cap A$،

(ت) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

اثباتها شبیه اثباتهای قضیهٔ ۳ هستند. □

درپایان، دوتساوی وجود دارندکه اجتماع واشتراك را درهم می‌آمیزند:

قضیهٔ ۵.

(الف) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$،

(ب) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

اثبات. فرض کنیم $x\in A\cup(B\cap C)$. آنگاه $x\in A$ یا $x\in B\cap C$. اگر $x\in A$ آنگاه یقیناً $x\in A\cup B$ و $x\in A\cup C$، ولذا $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. درحالت‌دیگر، $x\in B\cap C$ نتیجه می‌دهد $x\in B$ و $x\in C$. ازاین‌رو، $x\in A\cup B$ و $x\in A\cup C$، و لذا $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. این ثابت می‌کند که

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C). \qquad (*)$$

برعکس، فرض کنیم $y\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. آنگاه $y\in A\cup B$ و $y\in A\cup C$. در اینجا دوحالت‌را باید بررسی کنیم: وقتی $y\in A$ و وقتی $y\notin A$. اگر $y\in A$، آنگاه یقیناً $y\in A\cup(B\cap C)$. ازسوی دیگـر، اگر $y\notin A$، آنگاه ازآنجاکه $y\in A\cup B$، بایـد داشته باشیم $y\in B$؛ به‌همین نحو نتیجه می‌شود $y\in C$. لذا $y\in B\cap C$، که مجدداً نتیجه می‌شود $y\in A\cup(B\cap C)$. بنابراین

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).$$

ازاین و (*) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

اثبات (ب) مشابهٔ اثبات فوق است. □

قضیهٔ ۵ یك‌زوج «قانون پخش‌پذیری» به‌دست می‌دهدکه قابل مقایسه با پخش‌پذیری

ضرب اعداد روی جمع است:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c).$$

ولی درمورد اعداد، تعویض دوعمل قاعدهٔ جدیدی به‌دست نمی‌دهد:

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$

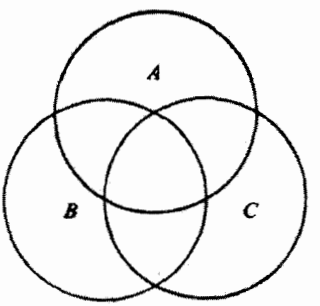
درحالت کلی درست نیست.

عملهای $\cup$ و $\cap$ روی مجموعه‌ها به‌طور متقارنتری عمل می‌کنند: هـریك برروی دیگری پخش‌پذیراست.

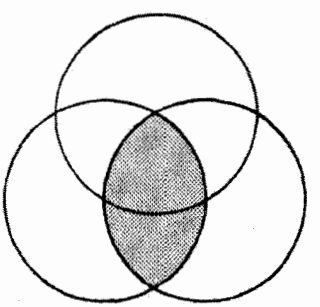
یك راه تصوراین اتحادهای گوناگون درنظریهٔ مجموعه‌ها، رسم چیزی است موسوم به دیاگرامهای ون[1]. اتحاد

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

را می‌توان بارسم سه قرص دو بـه دو متقاطع کـه مجموعه‌های A ، B ، و C را نمایش می‌دهند به‌صورت زیرنمایش داد:



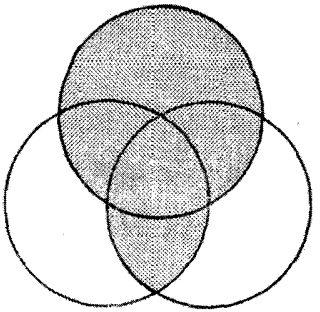
$B\cap C$ ناحیهٔ سایه‌دار مشترك بین B و C است:



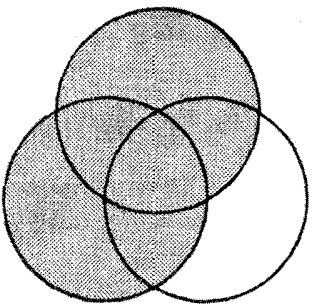
واجتماعش با A برابراست با:

---

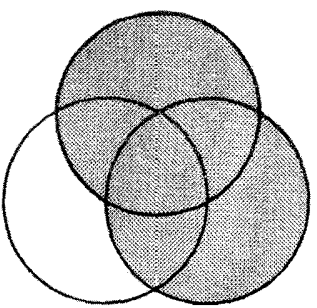
1. Venn



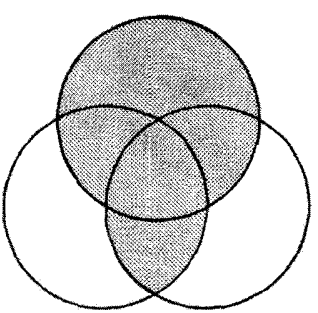
ازسوی دیگر، $A \cup B$ برابراست با:



و $A \cup C$ برابراست با:

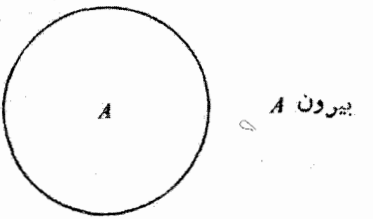


ولذا $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ناحیهٔ مشترك بین این دو است، که عبارت‌است‌از:

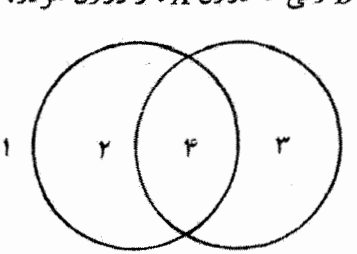


ونتیجه همان ناحیهٔ قبلی است.

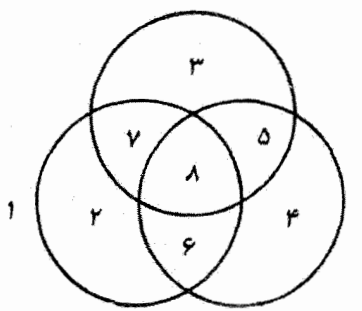
شاید خواننده مایل باشد بارسم دیاگرامهای ون مناسبی، اتحادهای دیگر قضیه‌های ۳، ۴، و ۵ راهم مجسم کند. ایـن ابزارهای تصویری، اگر درست انتخاب شوند، به‌بیشتر خوانندگان کمک‌می کنند که‌ایدهٔ ملموستری ازموضوع به‌دست آورند. برای‌حصول جامعترین تصویرممکن، دیاگرام باید بادقت رسم شود. باتنها یك مجموعهٔ A، دوناحیهٔ متمایز وجود دارد، درون A و بیرون A:



بادرنظرگرفتن دومجموعهٔ A و B ، چهارناحیه بـه‌دست می‌آیـد، بیرون هردو، درون A ولی نه درون B ، درون B ولی نه درون A ، و درون هردو:

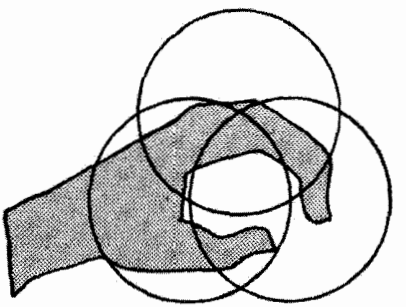


اگر سه مجموعهٔ A ، B ، و C را درنظر بگیریم، هشت ناحیه به‌دست می‌آید:



اگرمجموعهٔ چهارمی چون D چنان اضافـه شودکـه D با هریك ازاین هشت ناحیه فصل مشترك داشته باشد و ناحیهٔ بیرون D نیز این نواحی‌را قطع‌کند، آنگاه روی هـم شانزده ناحیه‌حاصل‌می‌شود. اگر بخواهیم A ، B ، C ، و D را با دایره نمایش دهیم، به‌هیچ‌وجه

نمی‌توانیم به‌این امر دست یابیم. صرفاً سعی کنید دایرهٔ چهارمی با خواص مذکور به آخرین دیاگرام فوق اضافه کنید، آنگاه متوجه منظورما خواهید شد. البته این‌امر انجام‌پذیراست، ولی نه بایك دایره:



خود ون نیز وقتی برای نخستین بار این دیاگرامهارا رسم می‌کرد به‌چنین محدودیتهایی پی برده بود. این‌اشکالات‌را می‌توان بااستفاده‌ازشکلهای نامأنوسی برای نمایش مجموعه‌ها برطرف کرد، ولی به‌لحاظ وجوداین دشواریهای فنی، بهتراست این شکلهارا فقط به‌عنوان ابزاری کمکی درنظربگیریم، ونه به‌عنوان یك روش واقعی اثبات. بهترین روش اثبات روابط کلی بین مجموعه‌ها، مشابه روشی است که درقضیه‌های ۳ ، ۴، و ۵ بیان شد.
مثلاً ، ارتباطی کلی بین اجتماع، اشتراك، و زیرمجموعه‌ها وجود دارد:

قضیهٔ ۶. اگر A و B دومجموعه باشند، احکام زیرمعادلند:
(الف) $A \subseteq B$ ،
(ب) $A \cap B = A$ ،
(پ) $A \cup B = B$.

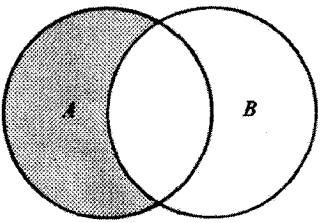
اثبات. رابطهٔ (ب) گویای این مطلب است که اعضای مشترك بین A و B همهٔ اعضای A هستند، لذا هرعضو A متعلق به B است، نتیجه اینکه $A \subseteq B$. عکس‌آن واضح است، ولذا (الف) و (ب) معادلند.
رابطهٔ (پ) حاکی‌است که اگر اعضای A را به B اضافه‌کنیم، دوباره B حاصل می‌شود. بنابراین هیچ یك ازاعضای A نمی‌تواند متعلق به B نباشد، ولذا نتیجه می‌شودکه $A \subseteq B$. عکس این نیز واضح است، پس (الف) و (پ) نیز معادلند. □

متمم

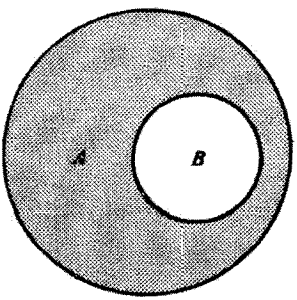
فرض‌کنیم A و B دو مجموعه باشند. تفاضل مجموعه‌ای $A - B$ طبق تعریف مجموعهٔ تمام اعضایی از A است که به B تعلق ندارند. بااستفاده ازنماد این تعریف چنین بیان می‌شود:

$$A-B=\{x\in A|x\notin B\}.$$

دریك دیاگرام ون، $A-B$ ناحیهٔ سایه‌دار زیراست:



اگر B زیر مجموعه‌ای از A باشد، آنگاه $A-B$ را متمم B نسبت به A می‌نامیم.



خوب بود اگرمی‌شد A را اصلاً درنظرنمی‌گرفتیم، ومتمم B را مجموعهٔ متشکل ازهمهٔ اشیایی‌که به B تعلق ندارند تعریف می‌کردیم. این انتظار زیادی است، زیرا این معنارا داردکه B ومتمم‌فرضیش مجموعه‌ای چون Ω را می‌سازندکه مطلقاً هرچیزی‌را دربردارد، ولی قبلاً نشان دادیم‌که چنین مجموعه‌ای نمی‌تواند وجـود داشته باشد. دربخش خاصی از ریاضیات ممکن‌است مجموعه‌ای چون U وجود داشته باشدکـه همهٔ اشیای‌آن بحث‌را دربرگیرد. این مجموعه را عالم سخن یا مجموعهٔ جامع (جامع بـه‌تعبیرفعلی) مـی‌نامیم. مثلاً، وقتی اعداد صحیح مورد بحث هستند مجموعـهٔ جامع‌را $U=\mathcal{Z}$ درنظر می‌گیریم. البته $U=\mathcal{R}$ هم خوب است. نکتهٔ مهم این‌است‌که مجموعهٔ جامع باید بـه‌اندازه‌ای باشد که همهٔاشیای تحت بررسی‌را دربرگیرد. به‌قول معروف «در بحثی راجـع به‌سگها، وقتی همهٔ سگهای غیرگله مورد نظرند، بیجاست نگران شترها باشیم.»

وقتی روی U توافق کـردیم، متمم B^c از زیرمجموعـه‌ای چون B از U را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B^c=U-B.$$

پس B^c متمم B نسبت به U است. ولی چون روی U توافق شده‌است، می‌توانیم آن‌را از نماد مربوط حذف کنیم، وبه هدف خود برسیم.

البته عمل ^{c} ازقوانین ساده‌ای پیروی می‌کند، ازجمله:

قضیهٔ ۷. اگر A و B دوزیر مجموعه ازمجموعهٔ جامع U باشند، آنگاه:
(الف) $\varnothing^c = U$،
(ب) $U^c = \varnothing$،
(پ) $(A^c)^c = A$،
(ت) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $B^c \subseteq A^c$.

باتوجه به (پ) می‌توانیم بنویسیم $A^{cc} = (A^c)^c$.
کمترابتدایی، ولی بسیارجالب، قوانین دمورگان[1] هستند:

قضیهٔ ۸. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی‌از مجموعهٔ جامع U باشند، آنگاه:
(الف) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$،
(ب) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

اثبات. فرض‌کنیم $x \in (A \cup B)^c$. آنگاه $x \notin A \cup B$. درنتیجه $x \notin A$ و $x \notin B$، پس $x \in A^c$ و $x \in B^c$، که نتیجه می‌دهد $x \in A^c \cap B^c$. بنابراین $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.
برای رسیدن به رابطهٔ شمول عکس، مراحل استدلال‌را وارونه‌کنید.
این‌امر (الف) را ثابت می‌کند. رابطهٔ (ب) را می‌توان به‌طورمشابه اثبات کرد. همچنین می‌توان در (الف)، A^c را به جای A و B^c را به‌جای B گذاشت و

$$(A^c \cup B^c)^c = A^{cc} \cap B^{cc} = A \cap B$$

را به‌دست آورد. بامتمم‌گیری، داریم

$$A^c \cup B^c = (A^c \cup B^c)^{cc} = (A \cap B)^c$$

که همان رابطهٔ (ب) است. □

این قوانین پدیده‌ای را توصیف می‌کنندکه خوانندگان باهوش ممکن است متوجهٔ آن شده باشند: قوانین درنظریهٔ مجموعه‌ها زوج زوج هستند، به این معناکه اگردریکی اجتماع‌را بااشتراك واشتراك را با اجتماع عوض‌کنیم دیگری نتیجه می‌شود. این مطلب‌را به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

اصل دوگانی دمورگان

اگر درهر اتحاد درستی‌ازنظریهٔ مجموعه‌هاکه شامل تنها عملهای $\cup$ و $\cap$ باشد، سراسر،

---

1. De Morgan

عملهای $\cup$ و $\cap$ را باهم عوض کنیم، اتحاد درست دیگری نتیجه می‌شود.

اثبات کلی این مطلب مشکل نیست، ولی نیاز به‌یك استدلال استقرایی پیچیده داردکه موضوع اصلی‌راکاملاً تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. مورد زیر نمونه‌ای است‌کلی از این اصل. اتحاد

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

را درنظرمی‌گیریم. ازطرفین متمم می‌گیریم وقوانین دمورگان‌را به‌کار می‌بریم تا

$$A^c\cap(B\cap C)^c=(A\cup B)^c\cup(A\cup C)^c$$

را به‌دست آوریم. حال قوانین دمورگان‌راکه مجدداً به‌کار ببریم، داریم

$$A^c\cap(B^c\cup C^c)=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cap C^c).$$

تااینجا $\cup$ و $\cap$ با هم عوض شده‌اند. حال همه جا A را با A^c و B را با B^c و C رابا C^c عوض می‌کنیم. از آنجا که این اتحاد بـرای همهٔ مجموعه‌های A ، B ، و C درست است، این تعویض مجاز است. در نتیجه

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C).$$

این همان قانون اول است، تنها باتعویض $\cup$ها و $\cap$ها باهم.

سؤال. وجود عمل ^{c} دراتحاد چه‌اثری روی استدلال دارد؟ (روش فوق‌را دراتحاد

$$B\cup(A\cap A^c)=B$$

به‌کار ببرید. چه‌اتفاقی می‌افتد؟).

مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها

ممکن است‌که همهٔ اعضای مجموعهٔ مفروضی چون S خود مجموعه باشند. در واقع، غالباً درنظرگرفتن مجموعه‌ای ازمجموعـه‌ها ابزار مفیدی است. مثلاً ممکن است داشته باشیم $S=\{A, B\}$ که درآن $A=\{۱, ۲\}$ و $B=\{۲, ۳, ۴\}$. مثالی پیچیده‌تر این است‌کـه مجموعه‌ای چون X رادرنظربگیریم و $\mathbb{P}(X)$ را مجموعهٔ همهٔ‌زیرمجموعه‌های X بگیریم. این مجموعه را که مجموعهٔ توانی X می‌نامیم درخاصیت زیرصدق می‌کند:

$$Y\in\mathbb{P}(X) \text{ اگر وفقط اگر } Y\subseteq X.$$

مثلاً، اگر $X=\{۰, ۱\}$، آنگاه $\mathbb{P}(X)=\{\varnothing, \{۰\}, \{۱\}, \{۰, ۱\}\}$. در حالاتـی نظیر این‌که هرعضو S خود یك مجموعه است، می‌توان قدمی‌فراترگذاشت واعضای متعلق بـه این اعضارا درنظرگرفت. این‌امر تعمیم مفاهیم اجتماع واشتراك را به‌دست می‌دهد:

$$\bigcup S=\{x|S \text{ بـه ازای } A \text{ یی در } x\in A\},$$
$$\bigcap S=\{x|S \text{ به‌ازای همهٔ } A \text{های در } x\in A\}.$$

$\bigcup S$ را «اجتماع S» و $\bigcap S$ را «اشتراك S» می‌نامیم. به‌عبارت‌دیگر، اجتماع S تشکیل می‌شود ازهمهٔ اعضای مـوجـود دراعضای S، واشتراك S تشکیل می‌شود ازتمام اعضای مشترك بین همهٔ اعضای S. مثلاً،

$$\bigcup\{\{۱, ۲\}, \{۲, ۳, ۴\}\}=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$$
$$\bigcap\{\{۱, ۲\}, \{۲, ۳, ۴\}\}=\{۲\}.$$

به‌طور کلی، به‌ازای هرمجموعهٔ X، داریم

$$\bigcup \mathbb{P}(X)=X$$
$$\bigcap \mathbb{P}(X)=\varnothing.$$

گرچه ممکن‌است این نماد در ابتداکمی نامأنوس به‌نظرآید، ولی بسیار باصرفـه است و حقیقتاً تعمیم واقعی مفاهیم معمولی است. مثلاً، مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $S=\{A_۱, A_۲\}$، آنگاه

$$\bigcup S=A_۱\cup A_۲$$
$$\bigcap S=A_۱\cap A_۲.$$

به‌طورکلی‌تر،

$$\bigcup\{A_۱, A_۲, \cdots, A_n\}=A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n,$$
$$\bigcap\{A_۱, A_۲, \cdots, A_n\}=A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_n.$$

نمادگذاری دیگر (ومتداولتر) برای این دو مفهوم آخراین است‌که بنویسیم

$$A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{r=۱}^{n}A_r$$

$$A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{r=۱}^{n}A_r.$$

یکبار دیگر درآخرفصل ۵ هم به‌اجتماع واشتراك تعمیم یافته بازخواهیم گشت.

تمرین

۱. کدام ازمجموعه‌های زیرباهم برابرند؟
(الف) $\{۲, ۱, -۱\}$،
(ب) $\{۲, ۱, ۲, -۱\}$،

(پ) $\{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leqslant ۲ \text{ و } n \neq ۰\}$،
(ت) $\{۲, ۱, ۲, -۲, -۱, ۲\}$،
(ث) $\{۱, -۱\} \cup \{۲, -۲\}$،
(ج) $\{-۲, -۱, ۱, ۲\} \cap \{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

۲ . ثابت کنید که به‌ازای هردو مجموعهٔ A و B،

$$(A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و B مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۳ باشد، مجموعهٔ $(A-B) \cup (B-A)$ را توصیف کنید.

۳ . اثبات احکام ۳ (الف)، ۳ (ب)، ۳ (پ)، وهمهٔ احکام قضیهٔ ۴ را بنویسید. با رسم دیاگرامهای ون این نتایج را روشن کنید.

۴ . دیاگرام ون مناسبی برای همهٔ فرمولهای شامل ۵ مجموعهٔ متفاوت رسم کنید.

۵ . اگر $S = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid ۰ \in X\}$ باشرط S، مطلوب‌است $\bigcap S$ و $\bigcup S$.

۶ . اگر $S = S_۱ \cup S_۲$، ثابت کنید که $\bigcup S = (\bigcup S_۱) \cup (\bigcup S_۲)$.

۷ . اگر A دارای n عضو باشد $(n \in \mathcal{N})$، تعداد زیرمجموعه‌های A را به‌دست آورید. اگر بااثبات به روش استقرا آشنا هستید، نتیجه‌را بااین روش اثبات کنید.

۸ . اگر A ، B ، و C مجموعه‌هایی متناهی باشند و $|A|$ نمایش تعداد اعضای A باشد ، نشان دهید

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

یك دیاگرام ون رسم کنید.

۹ . درهریك ازاحکام زیر،اگربه‌جای S یکی‌از مجموعه‌های $\mathcal{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ را بگذاریم، گزاره‌ای درست به دست می‌آوریم. مجموعهٔ مناسب‌را درهرحالت پیداکنید.

(الف) $\{x \in S \mid x^۳ = ۵\} \neq \varnothing$،
(ب) $\{x \in S \mid -۱ \leqslant x \leqslant ۱\} = \{۱\}$،
(پ) $\{x \in S \mid ۲ < x^۲ < ۵\} - \{x \in S \mid x > ۰\} = \{-۲\}$.
(ت) $\{x \in S \mid ۱ < x \leqslant ۴\} = \{x \in S \mid x^۲ = ۴\} \cup \{۳, ۴\}$،
(ث)
$\{x \in S \mid ۴x^۲ = ۱\} - \{x \in S \mid x < ۰\} = \{x \in S \mid ۵x^۲ = ۳\} \cup \{x \in S \mid ۲x = ۱\} \neq \varnothing$.

۱۰. معادلهٔ $x+y=z$ به‌ازای $x, y, z \in \mathcal{N}$ جوابهای بسیاری دارد؛ معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ نیز جوابهایی دارد، ازجمله $x=3$ ، $y=4$ ، $z=5$.

فرض کنیم:

$$F=\{n \in \mathcal{N} \mid x, y, z \in \mathcal{N} \text{ دارای جوابی باشد } x^n+y^n=z^n\}.$$

برای اثبات $F=\{1, 2\}$ چه باید کرد؟ این موضوع دربارهٔ اثبات برابری مجموعه‌ها درحالت کلی بما چه می گوید؟

۴

رابطه

هدف این فصل معرفی یکی از مهمترین مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌هاست. مفهوم رابطه مفهومی است که در تمام ریاضیات یافت می‌شود وکاربردهای زیادی در خارج از ریاضیات نیز دارد. مثالهایی از روابط عبارتند از: در اعداد «بزرگتر است از»، «کوچکتر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر نیست با»؛ درنظریهٔ مجموعه‌ها، «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلق است به»؛ در حوزه‌های دیگر، «برادر ... است»، «پسر ... است». آنچه در همهٔ این مثالها مشترك است این‌است که همه به‌دو شیء اشاره می‌کنند و اینکه درهرحالت شیء اول یا در رابطه با شیء دوم هست یا نیست. مثلاً $a > b$. که a و b اعدادی صحیح باشند، یا درست است یا درست نیست ($۱ < ۲$ درست است، و $۲ < ۱$ نادرست).

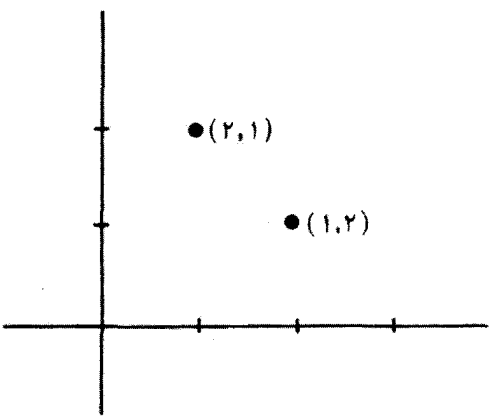
آن دوچیزی‌که در رابطه با یکدیگر هستند باید به‌ترتیب معینی درنظر گرفته شوند، مثلاً $a > b$ کاملاً متفاوت است با $b > a$. لذا نخستین‌کاری راکه در این فصل انجام می‌دهیم ساختن ابزاری است‌که بتواند با زوجهای مرتب‌کار کند. این مطلب نیزقابل‌تذکر است‌که رابطه‌ها می‌توانند بین‌اعضای مجموعه‌های متفاوت برقرار باشند، یعنی درمواردی می‌توان رابطه‌ای بین اعضای مجموعه‌ای چون A و اعضای مجموعه‌ای چون B داشت. اکثر مثالهایی‌که ذکر شدند مربوط به‌اعضای یك مجموعه هستند، ولی یك مثال از نوع دیگر را هم درفهرست مثالهای مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها گنجانیدیم و آن «متعلق است به» است. اگر A مجموعه‌ای باشد و B مجموعه‌ای‌که اعضایش‌خود مجموعه هستند، آنگاه به‌ازای هرعضو x از A و هرعضو Y از B، می‌توان دیدکه آیا $x \in Y$ یا نه. ازآنجاکه،

$x \in Y$، به‌ازای هر x از A و هر Y از B، یا درست است یا نادرست، پس، به‌معیاری که دراین فصل به‌توصیف آن خواهیم پرداخت، همین رابطه‌ای است بین A و B. زیبایی مطلبی که بیان شد در این است که آن را می‌توان تماماً با اصطلاحات مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها فرمول‌بندی کرد.

در پایان این فصل، جزئیات نظریهٔ دونوع رابطه راکه اهمیت ویژه‌ای دارند می‌پرورانیم: روابط هم‌ارزی و روابط ترتیبی.

زوج مرتب

گفتیم که برای مجموعه‌ها ترتیب نوشتن اعضا در یك فهرست اهمیتی ندارد، مثلاً برای مجموعه‌ای با دو عضو، $\{a, b\} = \{b, a\}$. این مطلب کاملاً به‌جای خود، ولی گاهی ضرور است که ترتیب را هم مشخص کنیم. مثلاً، درهندسهٔ تحلیلی هر نقطه از صفحه را با زوج (x, y) نمایش می‌دهیم. در اینجا ترتیب بسیار مهم است، مثلاً نقاط $(۲ ,۱)$ و $(۱ ,۲)$ متفاوت هستند:



به‌این‌نحو به‌مفهوم زوج مرتب (x, y) رهنمون می‌شویم، پرانتز را به‌این منظور به‌کار می‌بریم که آن را از $\{x, y\}$ متمایز کنیم. خاصیت مهمی که برای این مفهوم جدید لازم است این است که:

$$(x,y) = (u,v) \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad x = u \text{ و } y = v \qquad (*)$$

این مفهوم را می‌توان در تمام نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار برد. اگر مجموعه‌های A و B مفروض باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی $A \times B$، مجموعهٔ همهٔ این زوجهای مرتب است:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

تا اینجا خیلی‌خوب است؛ تنها مسئله این است که ما هنوز نگفته‌ایم معنی یك زوج مرتب

دقیقاً چیست. (x,y) چیست؟ اگر $A=B=\mathbb{R}$، آنگاه هرزوج مرتب (x,y) را می‌توانیم، با استفاده از مختصات دکارتی، نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات بدانیم. این مطلب در واقع منشاء مفهوم زوج مرتب است. با این تعبیر، صفحه را می‌توانیم به‌عنوان $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (یا، به‌صورت اختصاری معمولتر در ریاضیات، $\mathbb{R}^2$) درنظر بگیریم. ولی اگر A مجموعه‌ای مانند {ترنج , پرتقال ,سیب} و B مجموعهٔ {چنگال ,کارد} باشد، دراین صورت $A\times B$ چیست؟! این مجموعه یقیناً از زوجهای مرتب: (کارد ,سیب)،(چنگال ,سیب)،(کارد ,پرتقال)، (چنگال , پرتقال)، (کارد , ترنج)، (چنگال , ترنج) تشکیل می‌شود. لذا باز می‌گردیم به‌سؤال خودمان: زوج مرتب (کارد ,سیب) چیست؟ جواب‌در این نیست‌که بگوییم «این شیء چیست؟»، بلکه در این است‌که «چطور آن را به‌دست می‌آوریم؟». جواب این است که به‌طور کلی برای به‌دست‌آوردن (x,y)، ابتدا x را از A انتخاب می‌کنیم وسپس y را از B. ریاضیدان لهستانی کوراتوفسکی[1] دراین فرایندیك تعریف مجرد ممکن برای (x,y) مشاهده‌کردکه درآن صرفاً از مفاهیم مربوط به نظریهٔ مجموعه‌ها، آن هم مفاهیمی که قبلاً توصیف شده‌اند، استفاده می‌شود. با انتخاب x از A مجموعهٔ تك عضوی $\{x\}$ را داریم. سپس با انتخاب y از B مجموعهٔ $\{x,y\}$ را به‌دست می‌آوریم. کوراتوفسکی به‌طور ساده زوج مرتب (x,y) را باکمك این مجموعه‌ها تعریف می‌کند:

تعریف (کوراتوفسکی). زوج مرتب (x,y) از دوعضو x وy بنا به‌تعریف مجموعهٔ

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

است.

این‌تعریف ظاهراً عجیب دارای این مزیت است‌که خاصیت (*) راکه برای زوجهای مرتب حیاتی است ارضا می‌کند:

قضیهٔ ۱. با توجه به‌تعریف کوراتوفسکی داریم:

$$(x,y)=(u,v)\quad\text{اگر و فقط اگر}\quad x=u\ \text{و}\ y=v.$$

اثبات. یقیناً اگر $x=u$، $y=v$، آنگاه از تعریف نتیجه می‌شود که $(x,y)=(u,v)$. ازسوی دیگر، فرض کنیم $(x,y)=(u,v)$. اگر $x=y$، آنگاه $\{\{x\},\{x,y\}\}=(x,y)$ دارای دوعضومتمایز $\{x\}$ و $\{x,y\}$ است که هریك باید متعلق به $(u,v)=\{\{u\},\{u,v\}\}$ باشد. این مطلب به‌این معنی است‌که دو عضو $\{u\}$ و $\{u,v\}$ نیز باید متفاوت باشند، ولذا $u\neq v$. حال باید داشته باشیم $\{x\}=\{u\}$ یا $\{x\}=\{u,v\}$؛ دومی به‌وضوح غیرممکن است (زیرا دومی این معنی‌را خواهد داشت‌که u و v هردو متعلق به $\{x\}$ هستند، ودرنتیجه $u=x=v$ که مناقض $u\neq v$ است). لذا $\{x\}=\{u\}$ و $u=x$. به‌روشی مشابه، داریم $\{x,y\}=\{u,v\}$، وچون $u=x$، $x\neq y$، و $y\in\{u,v\}$، نتیجه می‌گیریم که $y=v$. لذا

1. Kuratowski

طبق انتظار $x=u$ و $y=v$.

اگر $x=y$، فرم مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها قدری دگرگون می‌شود و

$$(x, y)=\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{x\}, \{x, x\}\}=\{\{x\}, \{x\}\}=\{\{x\}\}$$

به‌دست می‌آید، ولذا (x, y) تنهایك عضودارد، که‌آن هم $\{x\}$ است. اگر $(u,y)=(u,v)$، آنگاه (u, v) نیز دارای یك عضو است، در نتیجه $\{u\}=\{u, v\}$ و لذا $u=v$ و $(u, v)=\{\{u\}\}$. حال برابری $(x, y)=(u, v)$ به‌صورت $\{\{x\}\}=\{\{u\}\}$ درمی‌آید، که متوالیاً به $\{u\}=\{x\}$ وسپس به $x=u$ تحویل‌می‌یابد. لذا این حالت به $x=y=u=v$ می‌انجامد واثبات کامل است.[1] □

این‌امرما را به‌کجا می‌رساند؟ ابتدا یك خبرخوب: تعریفی برای زوج مرتب (x,y) داریم که درآن صرفاً مفاهیم تثبیت شدهٔ مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کار می‌رود. حال یك خبربد: این‌تعریف با مفهوم شهودی زوج مرتب درهندسهٔ تحلیلی مطابقت ندارد. در واقع اگر از ریاضیدانی خواسته شودکه $(۲,۱)$ را مجسم کند، به‌احتمال زیاد اوآن را به‌عنوان نقطه‌ای از صفحه می‌پندارد؛ خیلی بعید است که ایدهٔ $\{\{۲,۱\}, \{۲\}\}$ به‌خاطرش‌خطورکند.

راه حل واقع‌بینانه این است که بگذاریم تعریف کوراتوفسکی درخاطرمحوشود، و درموقع لزوم برای‌ارائهٔ بنیانی‌دقیق‌به‌کار رود. ایدهٔ مهمی که باید به‌آن تکیه‌کنیم خاصیت (*) است:

$$(x,y)=(u,v) \text{ اگر و فقط اگر } x=u \text{ و } y=v.$$

با درنظرداشتن‌این‌مطلب، $A\times B$ رابه‌عنوان مجموعهٔ چنین‌زوجهای مرتبی‌درنظرمی‌گیریم،

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

تعبیر $\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ به‌عنوان نقاط صفحه همچنان به‌صورت یکی از مفیدترین تعبیرها باقی‌می‌ماند ومسلماً (*) راکه‌مفیدترین مشخصهٔ آن‌است ارضا می‌کند. این تعبیر $A\times B$ برای وقتی‌که A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{R}$ هستند نیز مفید است. مثلاً، اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۵,۷\}$، آنگاه $A\times B$ مجموعهٔ زیر است:

---

۱. باکمی‌مهارت بیشتر، می‌توان این‌قضیه را خیلی‌سریعتر اثبات‌کرد. با به‌کاربردن نمادهای بخش آخر فصل ۳، داریم

$$\bigcup\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{x, y\} \text{ و } \bigcap\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{x\}$$

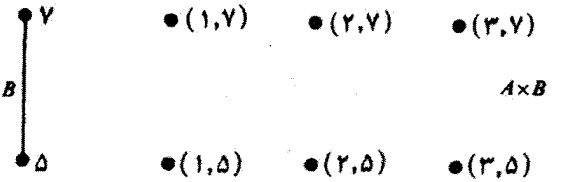
لذا $\bigcap(x, y)=\{x\}$ و $\bigcup(x, y)=\{x, y\}$. اگر $(x, y)=(u, v)$، با مقایسهٔ اشتراك و اجتماع، نتیجه می‌شودکه:

$$\{x\}=\{u\} \text{ و } \{x, y\}=\{u, v\}.$$

اولی $x=u$ را نتیجه می‌دهد و باکمك آن (خواه $x=y$ خواه چنین نباشد) دومی $y=v$ را.

$$\{(1,5), (1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}.$$

برحسب مختصات دکارتی، می‌توانیم تصویری از آن را هم رسم کنیم:

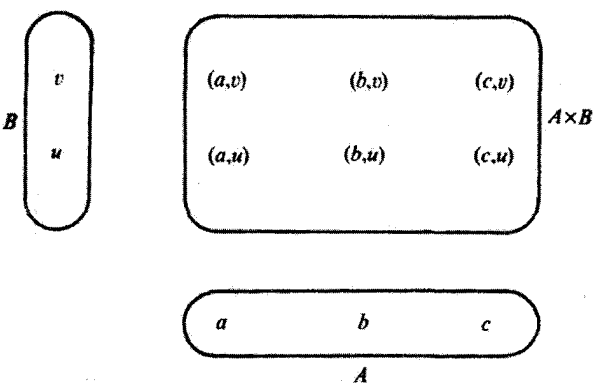




هرگاه A و B زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ نباشند، این نوع تصویر زیاد مناسب نیست، ولی بازهم می‌تواند مفید باشد. مثلاً، اگر $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{u, v\}$، آنگاه

$$A\times B=\{(a, u), (a, v), (b, u), (b, v), (c,u), (c,v)\},$$

و نتیجه توسط:



نمایش داده می‌شود.

توجه داشته باشید که در حالت عمومی $A\times B\neq B\times A$. مثلاً، با همان A و B فوق داریم

$$B\times A=\{(u, a), (u,b), (u, c), (v, a), (v, b), (v, c)\}$$

که همان $A\times B$ نیست. به‌هرحال، حاصلضرب دکارتی از قوانین معینی پیروی می‌کند:

قضیهٔ ۲. به‌ازای مجموعه‌های A، B، و C داریم:

(الف) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$،

(ب) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$،

(پ) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$،

(ت) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

اثبات. همه‌آسان هستند، وبرهان همهٔ موارد مشابه است، لذا فقط(الف) را اثبات می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

فرض‌کنیم $(u, v)\in(A\cup B)\times C$. آنگاه $u\in A\cup B$ و $v\in C$. لذا $u\in A$ یا $u\in B$. اگر $u\in A$، آنگاه $(u, v)\in A\times C$؛ اگر $u\in B$، آنگاه $(u, v)\in B\times C$. در هرحال، $(u, v)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. بنابراین

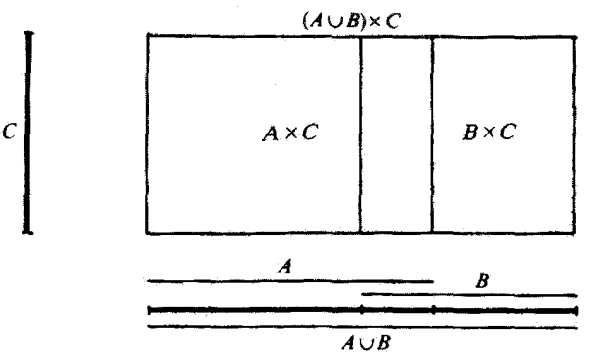
$$(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C).$$

حال فرض‌کنیم $x\in(A\times C)\cup(B\times C)$. آنگاه $x=(y,z)$. یا $x\in(A\times C)$ یا $x\in(B\times C)$. در حالت اول، $y\in A$ و $z\in C$. در حالت دوم، $y\in B$ و $z\in C$، لذا $x=(y, z)\in(A\cup B)\times C$. این امر نشان می‌دهد که

$$(A\times C)\cup(B\times C)\subseteq(A\cup B)\times C.$$

باکنارهم‌گذاردن این دوقسمت، اثبات تمام می‌شود. □

این قسمت را می‌توان با نمودار زیرمجسم کرد:



قضیهٔ ۳. به‌ازای مجموعه‌هایی چون A، B، C، و D داریم:

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

اثبات. فرض‌کنیم $x=(y,z)\in(A\times B)\cap(C\times D)$. آنگاه $y\in A$، $z\in B$،

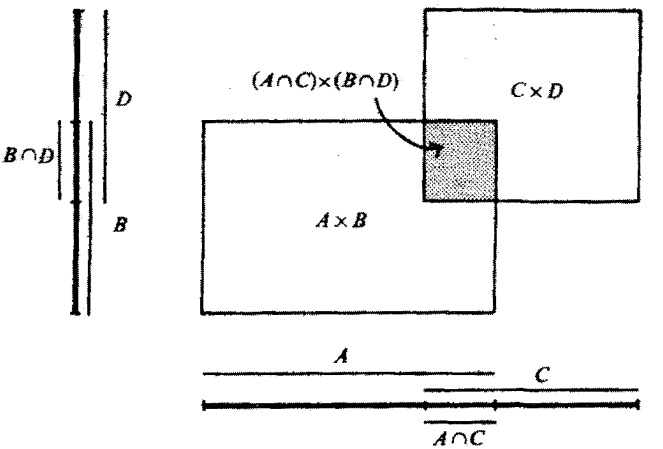
$y \in C$، و $z \in D$. لذا $y \in A \cap C$، و $z \in B \cap D$، پس $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. از این‌رو،

$$(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D).$$

برعکس، فرض کنیم $x = (y, z) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. آنگاه $y \in A$ و $y \in C$، $z \in B$، و $z \in D$؛ لذا $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$. بنابراین

$$(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D). \quad \square$$

نمودار اثبات چنین است:



همین نمودار روشن می‌سازد که چرا چنین قضیه‌ای برای اجتماع به‌جای اشتراک وجود ندارد.

اکنون که زوجهای مرتب را شناختیم، آسان است که به‌همان ترتیب، سه‌تایی‌های مرتب، چهارتایی‌های مرتب، والی‌آخر را هم تعریف کنیم؛ به‌این‌نحو که

$$(a, b, c) = ((a, b,), c)$$

$$(a, b, c, d) = ((c, b), c), d)$$

والی‌آخر. اینها اعضای حاصلضربهای مکرر دکارتی تعریف شده توسط

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

$$A \times B \times C \times D = ((A \times B) \times C) \times D$$

هستند. بعدها روش بهتری برای تعریف مفهوم کلی یك n تایی مرتب

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

به‌ازای هرعدد طبیعی n، هم پیدا خواهیم کرد. درحال حاضر برای هر n خاص می‌توانیم این‌کار را با تکرار فرایند به‌کارگرفته شده برای سه‌تایی‌ها و چهارتایی‌ها انجام دهیم. این تعمیمها خواصی مشابه با خاصیت اصلی زوجهای مرتب، یعنی خاصیت (*) ، دارند. مثلاً، $(a, b, c) = (u, v, w)$ اگروفقط اگر $a = u$، $b = v$، و $c = w$. اثبات این‌مطلب ازکاربرد مکرر (*) نتیجه می‌شود.

رابطه

به‌طورشهودی، یك رابطه بین‌دوشیء ریاضی a و b شرطی درمورد a و b است‌که به‌ازای مقادیر معینی از a و b یا درست‌است یا نادرست. مثلاً، «بزرگتراست از» رابطه‌ای است بین اعداد طبیعی. با به‌کاربردن نماد معمولی $>$ ، داریم:

۱ $>$ ۲ درست است،

۲ $>$ ۱ نادرست است،

۳ $>$ ۱۷ نادرست است،

والی‌آخر. این رابطـه نوعی خاصیت زوجهـای a و b است. در واقع باید زوج مرتب (a, b) را به‌کاربریم. زیرا مثلاً، ۱ $>$ ۲ ولی چنین نیست‌که ۲ $>$ ۱.

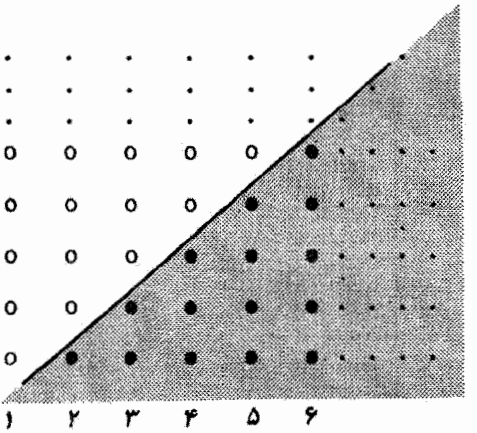
اگربدانیم به‌ازای کدام‌زوج مرتب (a, b) گزاره‌نمای $a > b$ درست‌است، آنگاه، برای هرمقصود ومنظوری، دقیقاً مشخص کرده‌ایم که منظورمان از رابطهٔ «بزرگتر است از» چیست. به‌عبارت دیگر، هر رابطه را می‌توانیم بـاکمك مجموعـه‌ای از زوجهای مرتب تعریف‌کنیم. پس با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها، چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف. فرض‌کنیم A و B دومجموعه باشند. یك رابطه بین A و B زیرمجموعه‌ای است از $A \times B$.

اگر $A = B$، آنگاه صحبت ازیك رابطه روی A است[۱] که زیرمجموعه‌ای است از $A \times A$. این تعریف نیازبه‌توضیـح دارد. مثلاً، رابطـهٔ «بزرگتر است از» روی $\mathcal{N}$ مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (a, b) است‌که درآن $a, b \in \mathcal{N}$ و(به‌معنی‌معمولی) $a > b$. این‌مجموعه را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد:

---

۱. در واقع از دیدگاهی نظری، نیـازی به‌این تمایز نیست، زیـرا هررابطه بین A و B را می‌توانیم رابطه‌ای روی $A \cup B$ بپنداریم. (دربارهٔ آن فکرکنید!)



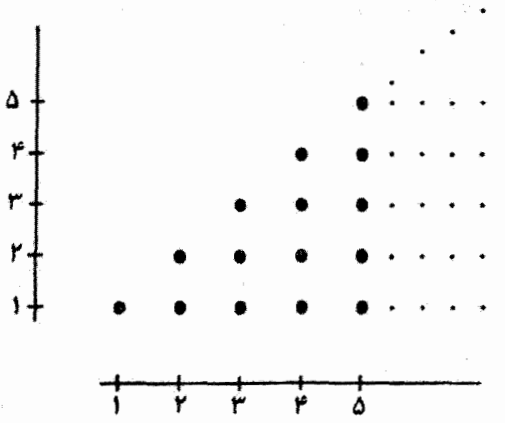
اگر R رابطه‌ای بین A و B باشد، آنگاه می‌گوییم که $a \in A$ و $b \in B$ توسط R در رابطه هستند هرگاه $(a, b) \in R$. متداولتر آن است که نماد

$$aRb \qquad (*)$$

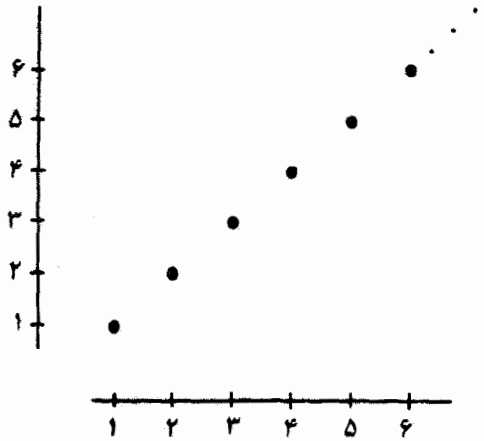
را به‌معنی $(a, b) \in R$ به‌کار ببریم. آنگاه $(a, b) \notin R$ را چنین می‌نویسیم: aRb . به‌این طریق امکان انواع تردستیها فراهم می‌شود. اگر رابطهٔ «بزرگتر است از» را با نماد معمولی $>$ نشان دهیم، آنگاه اگر R را رابطهٔ $>$ درنظر بگیریم، $a > b$ (به‌تعبیر $(*)$) به‌معنی $(a, b) \in >$ است، و این بنا به‌تعریف به‌همان معنی معمولی $a > b$ است. از سوی دیگر اگر $(a, b) \notin >$، می‌نویسیم $a \not> b$، که این نیز متناظر با کاربرد متعارف آن است. بنابراین نمادگذاری استانده را با یك دست‌کاری بدون وسواس در علامتها «بازمی‌یابیم». این ایدهٔ بسیار جالبی است ــ حداقل، ریاضیدانان از آن راضی به‌نظر می‌رسند ــ و ما نیز در آینده نماد aRb را به‌کارخواهیم برد.

حال چند مثال دیگر را درنظر می‌گیریم:

رابطهٔ $\geqslant$ روی $\mathcal{N}$



رابطهٔ = روی $\mathcal{N}$:

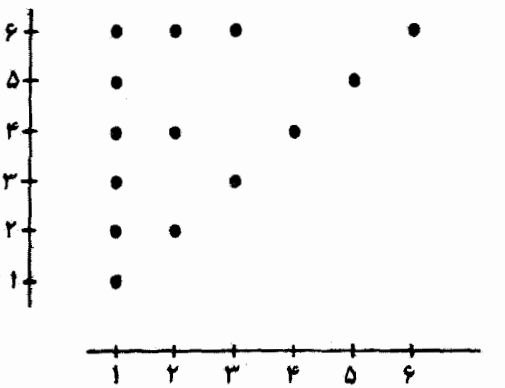


در واقع، رابطهٔ = روی $\mathcal{N}$ همان مجموعهٔ $\{(x,x)|x\in\mathcal{N}\}$ است.

به‌عنوان آخرین مثال، فرض کنیم $X=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و "|" رابطهٔ «مقسوم‌علیهی است از» باشد، لذا $a|b$ به‌این معنی است که «a مقسوم‌علیهی است از b». به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب،

$$|=\{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۱,۶), (۲,۲), (۲,۴), (۲,۶),$$
$$(۳,۳), (۳,۶), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)\}.$$

نمایش تصویری آن چنین است:



اگر رابطه‌ای چون R بین مجموعه‌های A و B مفروض باشد، و A' و B' به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی از A و B باشند، می‌توانیم رابطه‌ای چون R' بین A' و B' را به‌صورت

زیر تعریف کنیم:

$$R' = \{(a, b) \in R \mid a \in A', b \in B'\}.$$

در واقع، به‌زبان نظریهٔ مجموعه‌ها،

$$R' = R \cap (A' \times B').$$

R' را تحدید R به A' و B' می‌نامیم. تا جایی‌که مربوط به‌اعضای A' و B' باشد، روابط R و R' یك مطلب را می‌گویند. تنها تفاوت در این است‌که R' مطلبی دربارهٔ اعضایی‌که متعلق به A' و B' نیستند بیان نمی‌کند.

رابطهٔ هم‌ارزی

هم در ریاضیات مقدماتی و هم در ریاضیات پیشرفته، تمایز بین اعداد صحیح فرد و زوج مهم است. (برای تصریح‌کامل این مطلب: اعداد فرد اعداد به‌صورت $2n+1$ ، به‌ازای اعداد صحیح n، یعنی اعداد $\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$ هستند و اعداد زوج‌اعدادبه‌صورت $2n$ ، یعنی اعداد $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ هستند.)مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعداد صحیح به‌دو زیرمجموعهٔ مجزا تقسیم می‌شود

$$\mathbb{Z}_{\text{فرد}} = \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح فرد}$$

$$\mathbb{Z}_{\text{زوج}} = \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح زوج}$$

و لذا

$$\mathbb{Z}_{\text{فرد}} \cap \mathbb{Z}_{\text{زوج}} = \varnothing, \quad \mathbb{Z}_{\text{فرد}} \cup \mathbb{Z}_{\text{زوج}} = \mathbb{Z}.$$

روش دیگری هم برای تقسیم $\mathbb{Z}$ به‌این دو قطعه وجود دارد؛ و آن با استفاده از رابطه‌ای است‌که موقتاً به‌آن نام خنثای «$\sim$» را می‌دهیم. به‌ازای m و n از $\mathbb{Z}$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

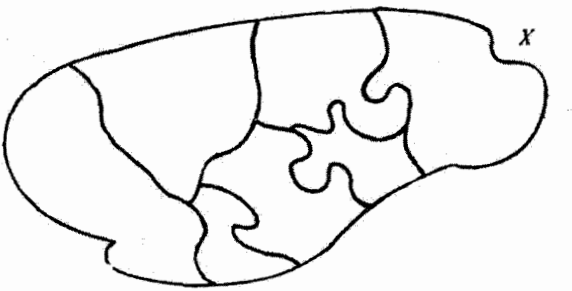
$m \sim n$ اگر و فقط اگر $m-n$ مضربی از ۲ باشد.

آنگاه:

همهٔ اعداد زوج توسط $\sim$ با هم رابطه دارند،
همهٔ اعداد فرد توسط $\sim$ با هم رابطه دارند،
هیچ عدد زوجی با هیچ عدد فردی رابطه ندارد،
هیچ عدد فردی با هیچ عدد زوجی رابطه ندارد.

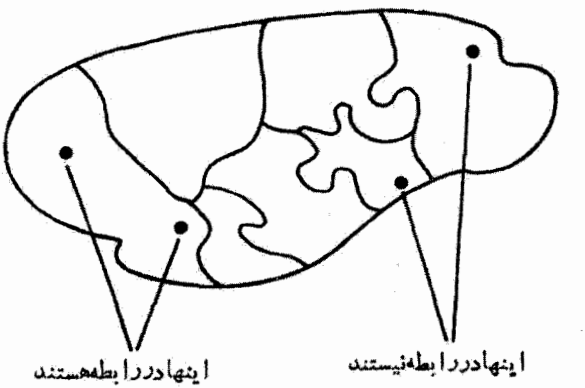
واقعیتی‌که این‌تجزیه را میسر می‌سازد پیامدی از برخی از خواص‌کلی $\sim$ است، و اینك

به‌تحلیل حالت کلی می‌پردازیم تا ببینیم چه خواصی مورد نیازند.
تصور کنید که مجموعه‌ای چون X به‌قطعات مجزا از همی تقسیم شده باشد.



می‌توانیم رابطه‌ای چون $\sim$ را تعریف کنیم:

$x \sim y$ اگر و فقط اگر x و y هردو دریک قطعه باشند.



برعکس، می‌توانیم قطعات را با رابطهٔ $\sim$ بازسازی کنیم: قطعه‌ای که x متعلق به‌آن است عبارت است از

$$E_x = \{y \in X | x \sim y\}.$$

اگراین مطلب را با رابطهٔ دیگری انجام دهیم خیلی‌چیزها ممکن است بهم بخورد. به‌خصوص ممکن است قطعات مجزا به‌دست نیایند. مثلاً، اگر $\sim$ رابطهٔ $|$ روی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد[۱]، آنگاه داریم:

$$E_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶\},$$

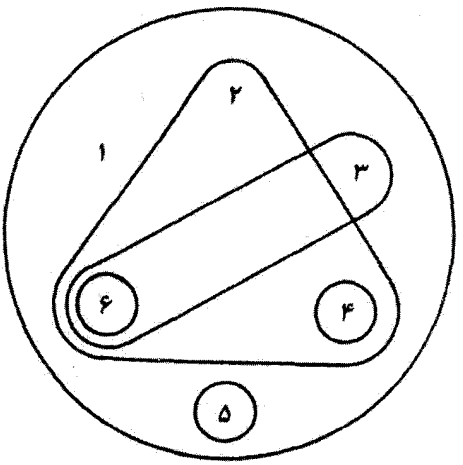
$$E_۲ = \{۲, ۴, ۶,\},$$

---

۱. $a | b$ یعنی a عدد b را عاد می‌کند.

$$E_۳=\{۳, ۶\},$$
$$E_۴=\{۴\},$$
$$E_۵=\{۵\},$$
$$E_۶=\{۶\}.$$

لذا مجموعه به‌صورت زیر تقسیم می‌شود:



اگر به‌جای این‌رابطه رابطهٔ $\succ$ روی $\mathcal{N}$ را درنظر بگیریم، حتی $x \in E_x$ نیز حاصل نمی‌شود، و لذا E_x به‌هیچ معنایی «قطعه‌ای که x متعلق به‌آن است» نیست.

چه خاصیتی است که باعث می‌شود $\sim$ اولیه درست‌کار کند، و سایرین غلط از آب درآیند؟ باید سه حکم بسیار بدیهی را درنظر بگیریم:

x متعلق به‌همان قطعهٔ x است،

اگر x متعلق به‌قطعهٔ y باشد، آنگاه y متعلق به‌قطعهٔ x است،

اگر x متعلق به‌قطعهٔ y باشد و y متعلق به‌قطعهٔ z، آنگاه x متعلق به‌قطعهٔ z است.

بدیهی است که هر رابطه‌ای چون $\sim$، با این خاصیت که $y \sim x$ اگر و فقط اگر x و y متعلق به‌یك قطعه باشند، باید دارای سه خاصیت فوق باشد، که ما آنها را در (۱)، (۲)، و (۳) تعریف زیر به‌صورت صوری می‌نویسیم.

تعریف. رابطه‌ای چون $\sim$ روی مجموعهٔ X رابطه‌ای هم‌ارزی است اگر به‌ازای هر $x, y, z \in X$:

(۱) $x \sim x$ ($\sim$ انعکاسی است)،

(۲) اگر $y \sim x$ آنگاه $x \sim y$ ($\sim$ تقارنی است)،

(۳۸) اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$ ($\sim$ متعدی است).

لذا هر گاه X را به‌قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطهٔ «متعلق به‌همان قطعه است که» رابطه‌ای هم‌ارزی است. اکنون نشان می‌دهیم هر رابطهٔ هم‌ارزی، به‌این طریق از قطعه‌بندی مناسبی حاصل می‌شود؛ در واقع ارتباط نزدیکی بین‌این دومفهوم وجود دارد. ابتدا به‌یك تعریف صوری «تقسیم به‌قطعات مجزا» نیازداریم.

تعریف. یك افراز مجموعه‌ای مانند X مجموعه‌ای است چون $\mathcal{P}$ که اعضایش زیر مجموعه‌هایی غیرتهی از X باشند و دارای شرایط زیر:

(ف ۱) هر $x \in X$ متعلق به Yیی از $\mathcal{P}$ باشد،

(ف ۲) اگر Y و Z در $\mathcal{P}$ باشند و $Y \neq Z$، آنگاه $Y \cap Z = \emptyset$.

اعضای $\mathcal{P}$ همان «قطعات» ما هستند. شرط (ف۱) بیان می‌کندکه X اجتماع این قطعات است، زیراکه هرعضو X در قطعه‌ای قراردارد؛ (ف۲) بیان می‌کندکه قطعات متمایزفصل مشترکی ندارند. نتیجه اینکه هیچ عضوی از X نمی‌تواند متعلق به‌دو قطعهٔ متمایز باشد.

هرگاه رابطه‌ای هم‌ارزی چون $\sim$ روی X مفروض‌باشد، ردهٔ هم‌ارزی عضو x از X (نسبت به $\sim$) را به‌عنوان مجموعهٔ زیرتعریف می‌کنیم:

$$E_x = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

قضیه۴. فرض‌کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی یك مجموعهٔ X باشد. آنگاه $\{E_x \mid x \in X\}$ افرازی از X است. رابطهٔ «متعلق به‌همان قطعه است که» همان رابطهٔ $\sim$ است.

برعکس، اگر $\mathcal{P}$ یك افراز X باشد، رابطهٔ $\sim$ را این‌طور تعریف می‌کنیم که $x \sim y$ اگر و فقط اگر x و y هردو دریك قطعه قرارداشته باشند. آنگاه $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی است، و افراز نظیرش به‌رده‌های هم‌ارزی، همان $\mathcal{P}$ است.

تذکر. این‌قضیه اجازه می‌دهدکه به‌دلخواه از هر رابطهٔ هم‌ارزی یك افراز به‌دست آوریم و یا برعکس؛ هرگاه این فرایند را دوباره‌به‌کار ببریم، به‌جایی‌که آغاز کردیم باز-می‌گردیم.

اثبات. ازآنجاکه $x \in E_x$ نتیجه می‌گیریم که شرط (ف۱) برای یك افراز برقرار است. برای‌اثبات(ف۲)، فرض‌کنیم $E_x \cap E_y \neq \emptyset$. آنگاه عضوی چون $z \in E_x \cap E_y$ وجود دارد. پس $z \sim x$ و $z \sim y$. بنابه‌تقارن داریم $y \sim z$، وآنگاه خاصیت تعدی منجر می‌شود به $x \sim y$.

نشان می‌دهیم این مطلب‌ایجاب می‌کندکه $E_x = E_y$. زیرا اگر $u \in E_x$ آنگاه داریم $x \sim u$ و $y \sim x$، لذا $y \sim u$؛ از این‌رو $E_x \subseteq E_y$. به‌همین‌نحو $E_y \subseteq E_x$. و این نشان

می‌دهد که $E_x = E_y$.

بنابراین ثابت کردیم که یا $E_x \cap E_y = \varnothing$ یا $E_x = E_y$. ولی این مطلب به‌طور منطقی هم‌ارز با (ف۲) است.

حال $x \approx y$ را به‌معنای «x و y هردودریک ردهٔ هم‌ارزی هستند» تعریف می‌کنیم. آنگاه

$x \approx y$ اگر و فقط اگر به‌ازای zی $x, y \in E_z$،

اگر و فقط اگر به‌ازای zی $z \sim x$ و $z \sim y$،

اگر و فقط اگر $x \sim y$.

از این‌رو $\approx$ همان $\sim$ است.

قسمت دوم قضیه به روشی مشابه ولی آسانتر اثبات می‌شود. اثبات آن را نمی‌نویسیم. □

یك مثال: حساب به‌پیمانهٔ n

با استفاده از مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی، تمایز بین اعداد فرد و زوج را تعمیم می‌دهیم و مطلبی را مطرح می‌کنیم که معمولاً (در دبیرستان) «حساب پیمانه‌ای» و یا (دردانشگاه) «اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n» نامیده می‌شود.

ابتدا حالت خاص $n = ۳$ را درنظرمی‌گیریم. رابطهٔ $\equiv_۳$، همنهشی به‌پیمانهٔ ۳، را روی $\mathcal{Z}$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

$m \equiv_۳ n$ اگر و فقط اگر $m - n$ مضربی از ۳ باشد.

قضیهٔ ۵. $\equiv_۳$ یك رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{Z}$ است.

اثبات.

(۱۸) $m - m = ۰ = ۳ \times ۰$.

(۲۸) اگر $m - n = ۳k$ آنگاه $n - m = ۳(-k)$.

(۳۸) اگر $m - n = ۳k$ و $n - p = ۳l$ آنگاه $m - p = ۳(k + l)$. □

می‌دانیم که رده‌های هم‌ارزی (موسوم به رده‌های همنهشی به‌پیمانهٔ n) مجموعهٔ $\mathcal{Z}$ را افراز می‌کنند. این رده‌ها کدامند؟ ملاحظهٔ این مطلب با کمك مثال آسانتر است.

$$E_۰ = \{y \mid ۰ \equiv_۳ y\}$$
$$= \{y \mid y - ۰ \text{ مضربی از ۳ باشد}\}$$
$$= \{y \mid y = ۳k, \text{ به‌ازای } k \text{ی از } \mathcal{Z}\}.$$

$$E_۱ = \{y \mid ۱ \equiv_۳ y\}$$

$$= \{y \mid y - ۱ = ۳k\}$$
$$= \{y \mid y = ۳k + ۱،\ k \text{ یی از } \mathbb{Z} \text{ به‌ازای}\}.$$

$$E_۲ = \{y \mid ۲ \equiv_۳ y\}$$
$$= \{y \mid y = ۳k + ۲،\ k \text{ یی از } \mathbb{Z} \text{ به‌ازای}\}.$$

$$E_۳ = \{y \mid y = ۳k + ۳،\ k \text{ یی از } \mathbb{Z} \text{ به‌ازای}\}.$$

ولی، $۳k + ۳ = ۳(k + ۱)$، لذا $E_۳ = E_۰$. به همین نحو $E_۴ = E_۱$، $E_۵ = E_۲$، $E_{-۱} = E_۲$، $E_{-۲} = E_۱$، والی آخر. هرعدد صحیح به‌یکی از صورتهای $۳k$، $۳k + ۱$، یا $۳k + ۲$ است (برحسب اینکه در تقسیم به ۳ باقیماندهٔ ۰، ۱، یا ۲ داشته باشد)، لذا دقیقاً سه ردهٔ هم‌ارزی به‌دست می‌آید:

$$E_۰ = \{\ldots, -۹, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, ۹, \ldots\}$$
$$E_۱ = \{\ldots, -۸, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ۱۰, \ldots\}$$
$$E_۲ = \{\ldots, -۷, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, ۱۱, \ldots\}.$$

به‌قدرکافی درمورد رابطهٔ هم‌ارزی سخن گفتیم. مطلب جالبتر، امکان محاسبه با این‌رده‌های هم‌ارزی است.

برای اینکه در حالت عمومی نمادگذاری روشنتر باشد، نماد E_n برای نمایش ردهٔ هم‌ارزی n را عوض می‌کنیم و به‌جای آن می‌نویسیم $n_۳$. لذا سه ردهٔ فوق را با $۰_۳$، $۱_۳$، $۲_۳$ نمایش می‌دهیم. می‌نویسیم $\mathbb{Z}_۳ = \{۰_۳، ۱_۳، ۲_۳\}$. عملهای جمع و ضرب روی $\mathbb{Z}_۳$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_۳ + n_۳ = (m+n)_۳$$
$$m_۳ n_۳ = (mn)_۳. \qquad (*)$$

مثلاً، $۰_۳ = ۳_۳ = ۲_۳ + ۱_۳$؛ $۱_۳ = ۴_۳ = ۲_۳ ۲_۳$.

ممکن است این‌کار بیهوده به‌نظر آید: به‌زودی روشن می‌شود که چنین تصوری نادرست است. ممکن است این کار بی‌ضرر هم به‌نظر آید: قبل از اینکه نگران نادرست بودن مطلبی باشیم باید چند نکتهٔ ظریف را مورد توجه قراردهیم؛ پس از کمی تفکرعمیق پی می‌بریم که این‌طورهم نیست.

نکتهٔ باریك در این است: هر رده دارای اسامی متفاوتی است؛ مثلاً،

$$۱_۳ = ۴_۳ = ۷_۳ = \cdots, \quad ۲_۳ = ۵_۳ = ۸_۳ = \cdots$$

تعاریف (*)، برمبنای اسمی که به‌کاربرده می‌شود، ممکن است برای یك سؤال جوابهای متفاوتی را به‌دست دهند. مثلاً (ه موذی ولجوج)، دیدیم که $۰_۳ = ۲_۳ + ۱_۳$. ولی ازآنجا

که $۷_۳ = ۱_۳$، $۸_۳ = ۲_۳$، همچنین داریم $۱۵_۳ = ۸_۳ + ۷_۳ = ۲_۳ + ۱_۳$. خوشبختانه $۵_۳ = ۱۵_۳$، و مجدداً می‌توانیم نفس راحتی بکشیم. در حالت کلی چه اتفاق می‌افتد؟ اگر $i_۳ = i'_۳$، آنگاه k یی وجود دارد که $i - i' = ۳k$: و اگر $j_۳ = j'_۳$ آنگاه l ای وجود دارد که $j - j' = ۳l$. حال قاعدهٔ (*) دوجواب ممکن به‌دست می‌دهد:

$$i_۳ + j_۳ = (i+j)_۳, \quad i'_۳ + j'_۳ = (i'+j')_۳.$$

ولی،

$$i + j = i' + ۳k + j' + ۳l = (i'+j') + ۳(k+l),$$

ولذا

$$(i+j)_۳ = (i'+j')_۳.$$

بنابراین، با هردو روش یك جواب به‌دست می‌آوریم، و (*) به‌عنوان تعریفی برای جمع با معنی است.

به‌همین‌نحو باید عدم وجود ابهام در ضرب را نیز بررسی کنیم. با فرض i، j، i'، j' به‌همان صورت فوق، داریم

$$i_۳ j_۳ = (ij)_۳, \quad i'_۳ j'_۳ = (i'j')_۳.$$

ولی

$$ij = (i'+۳k)(j'+۳l) = i'j' + ۳(i'l + j'k + ۳kl),$$

و لذا

$$(ij)_۳ = (i'j')_۳,$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است.

این‌مسئله، که بسیاری آن را درك نمی‌کنند، همیشه وقتی مطرح می‌شود که می‌خواهیم عملی روی مجموعه‌ها با قاعده‌ای از این نوع تعریف کنیم که «از مجموعه‌ها اعضایی را انتخاب کنید، عمل را روی آنها انجام دهید، و سپس مجموعه‌ای را بیابید که عضو حاصل متعلق به‌آن است». هرگاه، مانند فوق، نمادگذاری چنین فرایندی را پنهان کند، باید بسیار دقیق معنی نمادگذاری را بفهمیم، و نه‌اینکه نمادها را کورکورانه به‌کار ببریم. باید مطمئن شویم که انتخابهای متفاوت جواب متساوی به‌دست می‌دهند.

چنانچه خواننده تصور کند که این بررسی را می‌توان نادیده انگاشت، به‌این‌دلیل که هرچیز خوبی کارهم می‌کند، مسئلهٔ تعریف توان در $\mathbb{Z}_۳$ را درنظر می‌گیریم. روش طبیعی انجام این امر این است که از (*) تقلید و این‌طور تعریف کنیم که

$$m_۳{}^{n_۲} = (m^n)_۳.$$

مثلاً $۱_۳ = ۴_۳ = (۲^۲)_۳ = ۲_۳{}^{۲_۲}$. با استفاده ازاین «تعریف» می‌توانیم قضیه‌هایی درمورد

قوانین به‌توان رساندن هم به‌اثبات برسانیم، مثلاً:

$$(**) \qquad m_{۳}^{n\cdot۲+p\cdot۲}=(m^{n+p})_{۳}=(m^{n}m^{p})_{۳}=(m^{n})_{۳}(m^{p})_{۳}=m_{۳}^{n\cdot۲}m_{۳}^{p\cdot۲}.$$

ولی همهٔ اینها خوش‌خیالی زیادی است. زیرا، از آنجاکه $۵_{۳}=۲_{۳}$، قاعدهٔ (**) همچنین نتیجه می‌دهد که:

$$۲_{۳}^{۲\cdot۲}=۲_{۳}^{۵\cdot۲}=(۲^{۵})_{۳}=(۳۲)_{۳}=۲_{۳}.$$

از آنجاکه $۲_{۳}\neq ۱_{۳}$ این نشان می‌دهد که (**) بی‌معنی است؛ بی‌معنی با ظاهری حق به‌جانب وچابك از خطرناکترین نوع.

در اصطلاح معمول، آنچه راکه باید بررسی کنیم این است که این عملها «خوش‌تعریف» هستند. در واقع این عبارت خیلی مؤدبانه است: چیزی راکه بررسی می‌کنیم این است که اصلاً عملی «تعریف شده» است! یك تعریف ظاهرفریب به‌هیچ‌وجه یك تعریف درست نیست.

از موضوع اصلی بسیار منحرف شدیم، اجازه دهید بازگردیم به‌حساب در $\mathcal{Z}_{۳}$. جدولهای جمع وضرب را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$+$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۱_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$	$۰_{۳}$
$۲_{۳}$	$۲_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$

$\times$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۰_{۳}$	$۰_{۳}$
$۱_{۳}$	$۰_{۳}$	$۱_{۳}$	$۲_{۳}$
$۲_{۳}$	$۰_{۳}$	$۲_{۳}$	$۱_{۳}$

می‌توان نشان دادکه بسیاری از قوانین معمولی حساب (از جمله $x+y=y+x$، $x(y+z)=xy+xz$)، هرچند عبارات شگفت‌آوری مثل

$$((۱_{۳}+۱_{۳})+۱_{۳}+۱_{۳})=۱_{۳}$$

هم وجود دارند، برقرارند.

هر عدد صحیح n را می‌توانیم به‌جای ۳ به‌کاربریم و حساب به‌پیمانهٔ n را انجام دهیم. روی $\mathcal{Z}$ رابطهٔ $\equiv_{n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x\equiv_{n}y$ اگر و فقط اگر $x-y$ مضربی از n باشد.

n ردهٔ هم‌ارزی جدا از هم ۰_{n}، ۱_{n}، ۲_{n}، ...، $(n-۱)_{n}$ به‌دست می‌آیند؛ وداریم $n_{n}=۰_{n}$، $(n+۱)_{n}=۱_{n}$، والی‌آخر؛ و x_{n} متشکل است ازاعداد صحیحی که درتقسیم بر n باقیماندهٔ x دارند. درمجموعهٔ $\mathcal{Z}_{n}$ متشکل ازتمام رده‌های هم‌ارزی، عملهای حساب به‌همان صورتی که در (*) تعریف شد انجام می‌شوند.

این ایده‌ها را درفصل ۱۰ مورد بحث و بررسی بیشتر قرار خواهیم داد.

رابطهٔ ترتیبی

رابطه‌های ترتیبی گوناگونی راکه معمولاً در بحث با اعداد مطرح می‌شوند می‌توانیم با مثالهایی چون $۵ > ۴$، $۲\pi > ۷$، $x^۲ \geqslant ۰$، $۱ \leqslant x^۲ - ۱$، به‌ازای هرعدد حقیقی x، نشان دهیم. خوشبختانه رابطه‌های $<$، $>$، $\leqslant$، $\geqslant$ همه با هم در ارتباط هستند:

$x < y$ به‌معنی $y > x$ است،
$y \geqslant x$ " " $x \leqslant y$ است،
$x = y$ یا $x < y$ " " $x \leqslant y$ است،
$x \neq y$ و $x \leqslant y$ " " $x < y$ است.

منظور این است که کافی است تنها یکی از این رابطه‌ها را مطالعه و نتیجه را به‌دیگران منتقل کنیم. در عمل با اعداد واقعی، بهتر است که تنها یکی از رابطه‌های اکید $<$ یا $>$ را درنظر بگیریم. به‌طور کلی نمی‌نویسیم $۴ \geqslant ۲ + ۲$، صرفاً به‌این دلیل که مطلبی دقیقتر از آن را می‌دانیم، یعنی $۲ + ۲$ برابر است با ۴. همچنین معمولاً می‌نویسیم $۳ > ۲ + ۲$، زیرا این عبارت شامل اطلاع دقیقتری است از $۳ \geqslant ۲ + ۲$. دراحکام کلی، موضوع قدری عوض می‌شود. مثلاً، این درست است که اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ و $a_n \geqslant b_n$، آنگاه $a \geqslant b$، ولی $a_n > b_n$ ایجاب نمی‌کند که $a > b$. (مثال نقض با $a_n = ۱/n$ و $b_n = ۰$ به‌دست می‌آید.) در اینجا مختصر تمایلی به‌نامساویهای ضعیف $\leqslant$ و $\geqslant$ وجود دارد. با تعریف نامساویهای ضعیف مطلب را آغاز می‌کنیم.

تعریف. رابطه‌ای چون R روی یك مجموعهٔ A را یك رابطهٔ ترتیبی ضعیف می‌گویند هرگاه

(تض۱) $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$ ایجاب کند $a\,R\,c$،
(تض۲) یا aRb یا bRa (یا هر دو)،
(تض۳) $a\,R\,b$ و $b\,R\,a$ ایجاب کند که $a = b$.

این خواص به‌وضوح درمورد هردو رابطهٔ $\leqslant$ و $\geqslant$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی صادق هستند، که ممکن است قدری عجیب هم به‌نظر آید زیرا یکی به‌معنی «بزرگتر» است و دیگری «کوچکتر». ولی اگر اعداد حقیقی را به‌صورت نقاط روی یك خط در نظر بگیریم، می‌بینیم که می‌توانیم، با یك انعکاس، ترتیب را تغییر دهیم؛ چپ و راست را با هم عوض کنیم و در نتیجه $\leqslant$ و $\geqslant$ را. فقط هنگامی که آغاز به‌محاسبه می‌کنیم، و به‌این حقیقت نیاز داریم که $a \geqslant ۰$ و $b \geqslant ۰$ ایجاب کنند که $ab \geqslant ۰$، به‌خاصیتی از $\geqslant$ پی می‌بریم که در مورد $\leqslant$ صادق نیست. بررسی این مطلب را تا فصل ۹، که به مطالعهٔ حساب می‌پردازیم، به‌تعویق می‌اندازیم. تا آن زمان کافی است به‌این نکته توجه کنیم که رابطه‌های ترتیبی ضعیف به‌صورت زوج ظاهر می‌شوند. اگر رابطه‌ای از این نوع مانند R مفروض باشد می‌توانیم R'، وارونهٔ R، را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$a\,R'\,b$ یعنی $b\,R\,a$.

R'، رابطهٔ وارونه نیز یك رابطهٔ ترتیبی ضعیف است و با وارونه‌کردن مجدد آن به $R''=R$ بازمی‌گردیم.

مثال ۱. اگر $A=\{a, b, c\}$ که در آن a، b، c متمایز هستند، آنگاه با $a\,R\,b$، $a\,R\,c$، $a\,R\,a$، $b\,R\,c$، $b\,R\,b$، $c\,R\,c$، می‌توانیم یك ترتیب ضعیف روی A تعریف کنیم. با قراردادن a، b، و c در یك سطر و گرفتن $x\,R\,y$ به‌معنی x درطرف‌چپ y است یا $x=y$، این ترتیب ضعیف را می‌توان مجسم کرد.

$$a \quad b \quad c$$

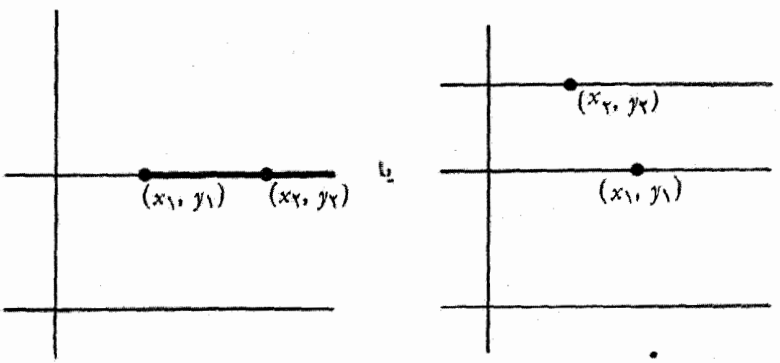
$$\circ \quad \circ \quad \circ$$

وارونهٔ R به‌طورساده اعضا را به‌ترتیب c، b، a قرار می‌دهد.

مثال ۲. رابطهٔ ترتیبی R روی صفحه را این‌طور تعریف می‌کنیم:
$(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2)$ معنی می‌دهد

$$y_1 = y_2 \text{ و } x_1 \leqslant x_2 \text{ (هردو با هم)},$$
$$\text{یا } y_1 < y_2.$$

این رابطه نخست غریب به‌نظر می‌آید، ولی در تصویر می‌بینیم که $(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2)$ صرفاً به‌این معنی است که یا (x_1, y_1) و (x_2, y_2) روی یك خط افقی قرار دارند و (x_1, y_1) در طرف چپ (یا برابر با) (x_2, y_2) است، یا اینکه (x_1, y_1) روی خطی افقی قراردارد که اکیداً پایین خطی افقی مار بر (x_2, y_2) است.



مثال ۳. $A=\{\{\circ\}, \{\circ,۱\}, \{\circ,۱,۲\}, \{\circ,۱,۲,۳\}\}$،

به‌ازای $x, y \in A$، $x\,R\,y$ معنی می‌دهد $x \subseteq y$.

در اینجا داریم $\{۰,۱,۲,۳\}\supseteq\{۰,۱,۲\}\supseteq\{۰,۱\}\supseteq\{۰\}$.

شمول مجموعه‌ها دارای خواص زیر است،

$$X\subseteq Y \text{ و } Y\subseteq Z \text{ ایجاب می‌کند که } X\subseteq Z،$$

$$X\subseteq Y \text{ و } Y\subseteq X \text{ ایجاب می‌کند که } X=Y،$$

ولی برای مجموعه‌های دلخواهی چون X و Y ممکن است داشته باشیم $X\not\subseteq Y$ و $Y\not\subseteq X$. درنتیجه شمول مجموعه‌ها به‌طور کلی در (تض۱) و (تض۳) صدق می‌کند ولی در (تض۲) صدق نمی‌کند. رابطه‌ای چون R روی یك مجموعهٔ A را که در (تض۱) و (تض۳) صدق کند یك ترتیب جزئی روی A را یك مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب[1] می‌نامیم، اگر A مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه شمول همیشه یك ترتیب جزئی ایجاد می‌کند.

فرض کنیم R یك ترتیب ضعیف روی مجموعه‌ای مثل A باشد، آنگاه S، ترتیب اکید متناظر به‌آن، این‌طور تعریف می‌شود:

$x\,S\,y$ دقیقاً به‌این معنی است که $x\,R\,y$ و $x\neq y$. مثلاً، اگر R رابطهٔ $\leqslant$ باشد آنگاه S همان رابطهٔ $<$ است.

قضیهٔ ۶. هر ترتیب اکید S روی یك مجموعهٔ A در احکام زیر صدق می‌کند:

(تا ۱) $a\,S\,b$ و $b\,S\,c$ ایجاب می‌کند $a\,S\,c$،

(تا ۲) اگر $a,b\in A$ مفروض باشند، آنگاه دقیقاً یکی از سه شرط زیر برقرار است (ونه دوتای دیگر):

$$a\,S\,b,\ b\,S\,a,\ a=b.$$

اثبات. فرض کنیم $a\,S\,b$ و $b\,S\,c$ برقرار باشند. آنگاه داریم $a\,R\,b$ و $b\,R\,c$، و بنا به (تض۱) نتیجه می‌گیریم که $a\,R\,c$. نمی‌توان داشت $a=c$، زیرا با جایگزینی در $b\,R\,c$، بنا به (تض۳) نتیجه می‌شود $b\,R\,a$. حال از این و $a\,R\,b$ حاصل می‌شود $a=b$ که درتناقض است با $a\,S\,b$. این مطلب (تا ۱) را ثابت می‌کند. از (تض۲) چنین به‌دست می‌آید که $a,b\in A$ ایجاب می‌کند $a\,R\,b$ یا $b\,R\,a$، و لذا $a\,S\,b$ یا $a=b$ یا $b\,S\,a$. ولی هیچ دوتایی از اینها نمی‌توانند به‌طور همزمان برقرار باشند، زیرا $a=b$ با تعریف هردو عبارت $a\,S\,b$ و $b\,S\,a$ تناقض‌دارد، و اگر $a\,S\,b$ و $b\,S\,a$ به‌طورهمزمان برقرار باشند، آنگاه $a\,R\,b$ و $b\,R\,a$ برقرارمی‌شوند، و لذا (تض۳) نتیجه می‌دهد که $a=b$، و این بازهم در تناقض با $a\,S\,b$ است. این مطلب (تا ۲) را ثابت می‌کند. □

حکم (تا ۲) معمولاً قانون سه‌گانگی نامیده می‌شود. (درست همان طور که هر دوگانگی دو امکان دو به‌دو ناسازگار است، هرسه‌گانگی نیزسه امکان دو به‌دوناسازگار

---

۱. به‌طور ساده در زبان انگلیسی Poset نامیده می‌شود.

$a\,S\,b$، $b\,S\,a$، و $a=b$ است.) برای ترتیب اکید $<$ روی اعداد حقیقی، سه امکان دو به‌دو ناسازگار عبارتند از $a<b$، $b<a$، و $a=b$.

قبلاً متذکر شدیم که از طریق ارتباط

$$a\leqslant b \text{ دقیقاً به‌این معنی که } a<b \text{ یا } a=b,$$

می‌توانیم از $<$ به‌ترتیب ضعیف $\leqslant$ بازگردیم.

همین مطلب برای ترتیب اکید نیز درست است. اگر رابطه‌ای چون S روی یك مجموعهٔ A مفروض باشد و در (تا ۱) و (تا ۲) صدق کند، R را این‌طور تعریف می‌کنیم که

$$a\,R\,b \text{ به‌معنی } a\,S\,b \text{ یا } a=b \text{ باشد.}$$

به‌سهولت بررسی می‌شود که R در (تض۱)ـ(تض۳) صدق می‌کند، و آزادانه می‌توان از یك ترتیب ضعیف به‌ترتیب اکید متناظرش رسید و بعد به محل اول بازگشت. به‌این ترتیب مفاهیم ترتیب ضعیف و اکید تعویض‌پذیرند. گرچه (تض۱) ـ (تض۳) را به‌عنوان اصول‌موضوع بنیادی پذیرفتیم وخواص (تا ۱) و (تا ۲) را ثابت‌کردیم، به‌همین سهولت می‌توانیم وضعشان را وارونه‌کنیم و (تا ۱) و (تا ۲) را به‌عنوان اصول موضوع بنیادی بپذیریم و (تض۱)ـ(تض۳) را از آنها نتیجه بگیریم.

تمرین

۱. اثبات قضیه‌های ۲(ب)، ۲(پ)، و ۲(ت) را بنویسید.

۲. ثابت‌کنیدکه برای مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها، مانند S و T داریم:

$$(\cup S)\times(\cup T)\subseteq \cup\{X\times Y \mid X\in S,\ Y\in T\},$$
$$(\cap S)\times(\cap T)=\cap\{X\times Y \mid X\in S,\ Y\in T\}.$$

نشان دهیدکه در فرمول اول «$=$» را نمی‌توان جانشین «$\subseteq$»کرد.

۳. اگر $A=\varnothing$، نشان دهیدکه به‌ازای هرمجموعهٔ B داریم $A\times B=\varnothing=B\times A$. اگر $A\neq\varnothing$، نشان دهیدکه $A\times B=A\times C$ ایجاب می‌کندکه $B=C$. با فرض $A\times B=B\times A$، در مورد A و B چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

۴. فرض کنید $A=\mathcal{N}\times\mathcal{N}$. رابطهٔ R روی A را این‌طور تعریف کنیدکه

$$(m,n)\,R\,(r,s) \text{ به‌معنی } m+s=r+n \text{ باشد.}$$

نشان دهیدکه R یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

اگر $B=\{(x,y)\in\mathcal{Z}\times\mathcal{Z} \mid y\neq 0\}$، و S رابطهٔ روی B با تعریف

$ad = bc$ اگر و فقط اگر $(a, b)\ S\ (c, d)$،

باشد، آیا S یك رابطهٔ هم‌ارزی است؟ ادعای خود را ثابت کنید؟

۵. چند رابطهٔ هم ارزی متمایز روی $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد؟

۶. خواص (ه ۱)، (ه ۲)، و (ه ۳) رابطهٔ هم‌ارزی را به‌خاطر بیاورید. کدام از این خواص برای رابطه‌های بین $x, y \in \mathcal{R}$ داده شده توسط

(الف) $x < y$،

(ب) $x \geqslant y$،

(پ) $|x - y| < ۱$،

(ت) $|x - y| \leqslant ۰$،

(ث) $y - x$ گویاست،

(ج) $x - y$ گنگ است،

(چ) $(x - y)^۲ < ۰$،

برقرارند؟

۷. آیا اشتباهی در اثبات زیر که (ه ۲) و (ه ۳) خاصیت (ه ۱) را نتیجه می‌دهند وجود دارد؟ اگر چنین است، اشتباه در کجاست؟

فرض کنیم $a \sim b$. بنا به (ه۲)، $b \sim a$. بنا به (ه۳) اگر $a \sim b$ و $b \sim a$ آنگاه $a \sim a$. این امر (ه۱) را ثابت می‌کند.

۸. به‌خاطر بیاورید که یك رابطهٔ هم‌ارزی چنان تعریف شد که در اصول (ه ۱)، (ه ۲)، و (ه۳) صدق کند. چند رابطه مثال بزنید (هرچه با ذوق‌تر بهتر) که خواص زیر را داشته باشند:

(الف) درهیچ یك از خواص (ه ۱)، و (ه ۳) صدق نکند،

(ب) در (ه ۱) صدق کند ولی در (ه ۲) یا (ه ۳) صدق نکند،

(پ) در (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۱) یا (ه ۲) صدق نکند،

(ت) در (ه ۲) و (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۱) صدق نکند،

(ث) در (ه ۱) و (ه ۳) صدق کند ولی در (ه ۲) صدق نکند،

(ج) در (ه ۱) و (ه ۲) صدق کند ولی در (ه ۳) صدق نکند.

۹. جدولهای جمع‌وضرب اعداد صحیح به‌پیمانهٔ ۴، به‌پیمانهٔ ۵، و به‌پیمانهٔ ۶ را بنویسید. همهٔ $a, b \in \mathcal{Z}_{۱۲}$ را که $ab = ۰_{۱۲}$ بیابید.

۱۰. رابطه‌ای چون R روی $\mathcal{N}$ را این‌طور تعریف کنید:

$a\ R\ b$ یعنی a، b را عاد می‌کند،

به‌عبارت دیگر xی در $\mathcal{N}$ وجود دارد که $b = ax$.
آیا R یك رابطهٔ ترتیبی است؟ اگر هست، آیا ترتیب ضعیف است یا ترتیب اکید؟

۱۱. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۶, ۳۰, ۲۱۰\}$ و یك رابطهٔ S روی X را این‌طور تعریف کنید:

$a\ S\ b$ یعنی a، b را عاد می‌کند.

آیا S یك رابطهٔ ترتیبی است؟ اگر هست، آیا ترتیب ضعیف است یا ترتیب اکید؟

۱۲. فرض کنید A مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی (اکید) S باشد و B مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی (اکید) T. ترتیب القابی L روی $A \times B$ را این‌طور تعریف می‌کنیم:

$(a, b)\ L\ (c, d)$ یعنی: یا $a\ S\ c$

یا $a = c$ و $b\ T\ d$.

آیا این یك رابطهٔ ترتیبی است؟ چه ارتباطی بین این رابطه و یك فرهنگ لغات وجود دارد؟

۵

تابع

مفهوم «تابع» درسراسر ریاضیات جدید، درتمام سطوح، از اهمیت بسزایی برخوردار است. مفهوم تابع نخست درحساب دیفرانسیل وانتگرال، که دربارهٔ توابع وچگونگی محاسبهٔ مشتق وانتگرال آنهاست، شکوفا شد.

تلاشهای اولیه برای‌پروراندن مفهوم کلی تابع تاحدی مغشوش وناموفق بود، عمدتاً به‌این دلیل که سعی‌می‌شد مطالب زیادی‌را یکجا بررسی‌کنند. مفهوم تابع، به‌صورت کنونیش، تدریجاً از این تلاشها حاصل شده است: این مفهوم ازکلیت وسادگی بسیاری برخورداراست. کلیت این مفهوم به‌قدری‌است‌که برای انجام حساب دیفرانسیل وانتگرال ابتدا باید شرایطی اضافی برآنها اعمال‌کرد تا ردهٔ توابع‌را به‌آنهایی که قابل مشتق‌گیری یاانتگرال‌گیری هستند محدود نمود. بنابراین، باعرضهٔ تعریفی بسیارکلی از «تابع» و سپس انتخاب انواع خاص آنها با اعمال شرایط بیشتر شیء مطلوب به دست می‌آید.

دراین فصل، مفهوم‌کلی تابع‌را مورد بررسی قرارمی‌دهیم ــ به‌هرحال، این‌کتاب که دربارهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست! مفهوم کلی‌را بابحث دربارهٔ مثالهای مأنوس به‌تدریج می‌پرورانیم وسپس نتایج حاصل‌را تحلیل می‌کنیم. برخی از خواص عمومی تابع را موردبحث قرار می‌دهیم. سپس نمودار یك تابع‌را معرفی و رابطه‌اش را هم با تعریف صوری وهم باتصاویرمتداول بررسی می‌کنیم.

چند تابع متداول

متداول چنین است که یك «متغیر» x را که معمولاً عددی حقیقی فرض می‌شود بگیرند و یك «تابع $f(x)$ از x» را تعریف کنند. نکتهٔ اصلی این است که مقدار $f(x)$ را می‌توان به‌ازای هر x مفروض (احتمالاً تحت محدودیتهایی چون $x \neq 0$، $x > 0$، باتوجه به تابع مورد بحث) محاسبه کرد. مثلاً، مقدار تابع نمایی به ازای هرعدد حقیقی x برابر e^x ($e = 2{,}71828\ldots$) است؛ مقادیر توابع سینوس، کسینوس، یا تانژانت به‌ازای هر عدد حقیقی x برابر $\sin(x)$، $\cos(x)$، $\tan(x)$ است (به‌استثنای اینکه برای تانژانت، x باید مضارب‌فردی‌از $\pi/2$ اختیارنشود تااینکه تعریف $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ بامعنی‌باشد)؛ مقدارتابع لگاریتمی‌برابر $\log(x)$ است هرگاه x عددی حقیقی و $x > 0$ باشد؛ مقدار تابع عکس به‌ازای هرعدد حقیقی $x \neq 0$ برابر $1/x$ است؛ مقدارتابع‌توان دوم به‌ازای هرعدد حقیقی x برابر x^2 است. توابع دیگری چون تابع فاکتوریل $x!$، تنها به‌ازای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌شوند.

همهٔ این مثالها چه وجه مشترکی‌دارند؟ اینکه اصولاً می‌توان مقدار تابع‌را به‌ازای مقادیرمناسب x محاسبه‌کرد. به‌عبارت دیگر، هرتابع به‌هرعدد حقیقی مناسب x یك مقدار $f(x)$ که خود نیزعددی حقیقی است وابسته می‌کند. در مثالهای فوق به‌ترتیب داریم $f(x) = e^x$، $\sin(x)$، $\cos(x)$، $\tan(x)$، $\log(x)$، $1/x$، x^2، یا $x!$.

نباید مقادیر تابع‌را باخود تابع اشتباه‌کرد. این عدد $\log(x)$ نیست که تابع است، بلکه قاعدهٔ «لگاریتم‌گیری» است که محاسبهٔ مقدار را مقدور می‌سازد. به عبارتی، نماد «log» تابع است. لذا هرتابع f «قاعده»‌ای است که به‌ازای هر عدد حقیقی x (احتمالاً تحت محدودیتهایی) یك عدد حقیقی $f(x)$ را معرفی می‌کند. اصرار ما بر این است که $f(x)$ به‌طوریکتا تعریف بشود: «قاعده»‌ای‌که به‌یك پرسش دوپاسخ متفاوت دهد فایده‌ای ندارد. ولذا باتوابعی نظیر «ریشهٔ دوم» باید دقیقتر باشیم، ومشخص‌کنیم که منظور ماریشهٔ دوم مثبت است یامنفی. فعلاً نگران این موضوع نباشید، بعداً که ایده‌ها جاافتاده‌ترشدند، به‌آن بازخواهیم گشت.

مفهوم‌کلی تابع

کلی‌ترین تعریف تابع ازتعریف متداول آن، باحذف شرط حقیقی بودن x و $f(x)$، حاصل می‌شود. (حتی در ریاضیات متداول هم قطعاً مایلیم که اعداد مختلط، ودر حقیقت اشیاء متعدد وگوناگون غیرعددی نیزمنظور بشوند: ساده‌ترین و رضایتبخش‌ترین کاراین است‌که هیچ نوع محدودیتی درماهیت x یا $f(x)$ قایل نشویم.) حال باید منظورمان از معنی «قاعده» را روشنتربیان‌کنیم.

ابتدا دو مجموعهٔ A و B را اختیار می‌کنیم. به‌عنوان تعریفی ابتدایی: یك تابع f از A به B قاعده‌ای است‌که به هر $a \in A$ عضو یکتای $f(a) \in B$ را نسبت دهد.

این تعریف بسیار گسترده‌است. همهٔ مثالهای فوق‌الذکر را شامل می‌شود: A را زیر-مجموعهٔ مناسبی از $\mathbb{R}$ و B را خود $\mathbb{R}$ اختیار می‌کنیم. مثلاً برای تابع نمایی داریم $A=\mathbb{R}$، $B=\mathbb{R}$، وقاعدهٔ مربوط $f(x)=e^x$ است. برای لگاریتم داریم $A=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$، $B=\mathbb{R}$، و $f(x)=\log(x)$. برای تابع عکس داریم $A=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0\}$، $B=\mathbb{R}$، و $f(x)=1/x$. برای تابع فاکتوریل داریم $A=\mathcal{N}$، $B=\mathcal{N}$، و $f(x)=x!$.

چند مثال از انواع نسبتاً متفاوتی از تابع که در این تعریف می‌گنجند عبارتنداز:

$A=$ {همهٔ دایره‌های درصفحه}، $B=\mathbb{R}$، و $f(x)=$ (شعاع x).

$A=$ {همهٔ دایره‌های درصفحه}، $B=\mathbb{R}$، و $f(x)=$ (مساحت x).

$A=$ {همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۰, ۲, ۴\}$}، $B=\mathcal{N}$، و $f(x)=$ (کوچکترین عضو x).

$A=$ {همهٔ زیر مجموعه‌های $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$}،

$B=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$، و $f(x)=$ (تعداد اعضای x).

$A=\mathbb{Z}$، $B=\{۰,۱,۲\}$، و $f(x)=$ (باقیماندهٔ تقسیم x بر ۳).

$A=$ {فیل، شیر، شتر}، $B=$ {مارس، ژانویه}، $f=$ (شتر)مارس، $f=$ (شیر)ژانویه، $f=$ (فیل)مارس.[۱]

اصطلاحات زیر برای توابع متداول هستند. A را دامنه و B را همدامنهٔ f می‌نامیم، و می‌نویسیم

$$f:A\longrightarrow B$$

به‌این معنی که «f تابعی است بادامنهٔ A وهمدامنهٔ B».

مطلب اصلی که هنوز باید مورد بحث قرار گیرد همان «قاعدهٔ» مزاحم است. دقیقاً به همان شیوه‌ای که «رابطه» را تعریف کردیم، با استفادهٔ عاقلانه‌ای از زوجهای مرتب، تعریفی صوری برای تابع هم به‌دست می‌آوریم. می‌خواهیم به‌هر $x\in A$ عضوی چون $f(x)\in B$ را نسبت دهیم. یك راه این است که آنهارا دریك زوج مرتب $(x, f(x))$ به‌هم بچسبانیم. آنگاه «قاعده» کل مجموعهٔ زوجهای مرتب $(x, f(x))$ است که در آن x درسراسر A تغییرمی‌کند، واین البته زیر مجموعه‌ای از $A\times B$ است. دراین روش، شرط اینکه $f(x)$ به‌ازای هر $x\in A$ معین باشد به‌این شرط تبدیل می‌شودکه به‌ازای هر $x\in A$ حداقل یك عضو (x, y) درمجموعه وجودداشته باشد: برگردان شرط یکتا بودن $f(x)$ این است کـه چنین yیی باید یکتا باشد. اکنون می‌توان دیدکـه چطور مجموعه‌ای از زوجهای مرتب جانشین قاعدهٔ تابع می‌شود: برای تعیین $f(x)$، زوجی‌چون (x, y) در

---

۱. البته این تابع کاملاً بیمورد است، وتابعی نیست‌که ازنظر ریاضیات مهم باشد. این مثال نشان می‌دهدکـه می‌توان تعاریف کاملاً دلخواهی برای $f(x)$ عرضه کـرد. البته، این یکی آن‌قدرهم‌که به‌نظرمی‌رسد دلخواه‌نیست. باغ‌وحشی سه‌قفس‌اصلی دارد: قفس‌شتر، قفس‌شیر، وقفس فیل. هرسال یکبار تزیینات قفسهارا تغییر می‌دهند: قفس شیر درژانویـه وقفسهای دیگر در مارس. حال داریم،

$f(x)=$ (ماهی‌که درآن تزیینات قفس x را تغییر می‌دهند)

این مجموعه بیابید: چنین زوجی وجود دارد ویکتاهم هست، لذا داریم $f(x)=y$.
پس تعریف صوری:

تعریف . فرض کنیم A و B دومجموعه باشند. یك تابع $f:A \longrightarrow B$ زیرمجموعه‌ای چون f از $A\times B$ است به‌طوری که
(ت ۱) اگر $x\in A$ آنگاه yیی در B هست که $(x\ ,\ y)\in f$،
(ت ۲) این عضو y یکتاست: به‌عبارت دیگر، اگر $x\in A$ و $y\ ,\ z\in B$ طوری باشند که $(x\ ,\ y)\in f$ ، $(x\ ,\ z)\in f$ آنگاه نتیجه می‌گیریم که $y=z$.
تابع را نگاشت[1] نیز می‌خوانند.

طبق این تعریف، تابع «توان دوم» که روی $\mathbb{R}$ تعریف شد زیرمجموعهٔ

$$\{(x\ ,\ x^2)|x\in\mathbb{R}\}$$

از $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ است. وتابع غیرعادی فوق مجموعهٔ

{(مارس ، فیل) ، (ژانویه ، شیر) ، (مارس ، شتر)}

است.

اگر $f(x)$ را آن عضو یکتای $y\in B$ بنامیم که $(x\ ,\ y)\in f$، **نماد معمولی تابع** به‌دست می‌آید.

تعریف تابع بااستفاده از زوجهای مرتب به‌این دلیل که همه چیزش با اصطلاحات مربوط به‌مجموعه‌ها بیان می‌شود، ازلحاظ صوری بسیارجالب است. ولی برای تعریف تابعی مشخص استفاده از زوجهای مرتب غیرعملی وبیمورد است. لذا ازعبارتی نظیر عبارت زیر استفاده خواهیم کرد :

«تابعی چون $f:A \longrightarrow B$ را با $f(x)=\ldots$ به‌ازای هر $x\in A$ تعریف کنید».

درهرمورد خاص، دستورمعینی برای یافتن $f(x)$ به‌ازای x مفروض، جانشین نقطه‌چین ... خواهد شد. تعبیرصوری این مطلب چنین است:

«f زیرمجموعهٔ $A\times B$ متشکل ازهمهٔ‌زوجهای $(x\ ,\ f(x))$ به‌ازای $x\in A$ است».

دراین صورت تنها مطلبی که باید حتماً بررسی شود این است که این دستور $f(x)$ را به‌طوریکتا تعیین می‌کند واینکه به‌ازای هر $x\in A$ ، $f(x)\in B$ است.
صرفاً برای روشنترشدن این نکته، مثالی ذکر می‌کنیم. تابع $f:\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$ را با

$f(n)=$ بسط اعشاری $\sqrt{n}$ تا n رقم

تعریف کنید. آنگاه

---

۱. map یا mapping.

$$f(۰)=۱$$

$$f(۱)=۱٫۴$$

$$f(۲)=۱٫۴۱$$

$$f(۳)=۱٫۴۱۴$$

والی آخر.

مجموعهٔ صوری زوجهای مرتب عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب

$$(\text{بسط اعشاری } \sqrt{n} \text{ تا } n \text{ رقم }, n)$$

یعنی مجموعهٔ

$$\{(۱,۱٫۴), (۲,۱٫۴۱), (۳,۱٫۴۱۴), \ldots\}.$$

برتری کاربرد تعریف غیر صوری روشن است. این حقیقت‌که می‌دانیم چگونه آن‌را به صورت صوری برگردانیم به‌این معنی است‌که غیر صوری بودن اشکالی ایجاد نمی‌کند.

درخاتمهٔ این بخش به‌ذکر چند قاعده می‌پردازیم‌که به‌ظاهرمعرف تابع هستند ولی دربررسی دقیقتر تابع بودن هریك به‌دلیلی رد می‌شود.

«$f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ را با $f(x)=\dfrac{x^۲+۱۷x+۹۳}{x+۱}$ تعریف کنید».

این عبارت یك تابع را تعریف نمی‌کند، زیرا وقتی $x=-۱$ آنگاه $۱/(x+۱)$ معین نیست، ولذا $f(-۱)$ به‌عنوان عددی حقیقی تعیین نمی‌شود. اگر تعریف را عوض و با «$f:\mathcal{R}-\{-۱\}\to\mathcal{R}$ ...» شروع کنیم، آنگاه یك تابع داریم.

«$f:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}$ را با $f(x)=\sqrt{x}$ (ریشهٔ دوم مثبت) تعریف کنید.» این عبارت یك تابع‌را تعریف نمی‌کند زیرا به‌ازای برخی‌ازمقادیر x، مثلاً $x=۲$، مقدار $f(x)=\sqrt{۲}$ متعلق به $\mathcal{Q}$ نیست. اگر دومین $\mathcal{Q}$ را به $\mathcal{R}$ تغییردهیم،واولین‌را به $\mathcal{Q}^+=\{x\in\mathcal{Q}\mid x\geqslant ۰\}$، آنگاه یك تابع داریم.

«$f:\mathcal{R}\to\mathcal{Q}$ را با ($f(x)=$ نزدیکترین عددگویا به x) تعریف کنید».

این عبارت یك تابع‌را تعریف نمی‌کند، زیرا $f(x)$ موردنظر وجود ندارد.

«$f:\mathcal{R}\to\mathcal{Z}$ را با ($f(x)=$ نزدیکترین عدد صحیح به x) تعریف کنید».

این یکی تقریباً یك تابع است: ایراد آن این‌است‌که، مثلاً، هردو عدد ۰ و ۱ از $\frac{۱}{۲}$ به

یك فاصله‌اند، ولذا $f(\frac{1}{2})$ به‌طوریکتا تعریف نمی‌شود.

خواص کلی توابع

اگر $f:A \to B$ یك تابع باشد، آنگاه یك زیرمجموعهٔ مهم B نگارهٔ f با تعریف

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$$

است. نگارهٔ f مجموعهٔ مقادیر به‌دست آمده ازمحاسبهٔ $f(x)$ به‌ازای همهٔ xهای متعلق به دامنه است. نگارهٔ تابع لزومی ندارد تمام همدامنه‌اش باشد؛ مثلاً، اگر $f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ با $f(x)=x^2$ تعریف بشود آنگاه نگاره‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است، و تمام همدامنه، یعنی $\mathcal{R}$، نیست.

عدم وجود تقارن درتعریف تابع ممکن است ناخوشایند به‌نظر آید: هرچند $f(x)$ باید برای هر $x\in A$ معین باشد، ولی لزومی نداردکه هر $b\in B$ به‌صورت $f(x)$ باشد. دلیل این امریك دلیل عملی‌است. وقتی تابعی‌را به‌کار می‌بریم، چون باید مطمئن باشیم‌که تابع معین است، آگاهی ازدامنهٔ دقیق ضرور است. دانستن اینکه مقادیر $f(x)$ دقیقاً در کجاقراردارند ازاهمیت کمتری برخورداراست، ولذا همدامنه را هرمجموعه‌ای‌که مناسب باشد انتخاب می‌کنیم. مثلاً، اگر

$$f:\mathcal{N} \to \mathcal{R}$$

را با

$$f(n)=\sqrt[3]{n!}$$

تعریف کنیم، آنگاه نگارهٔ f مجموعهٔ ریشه‌های سوم فاکتوریلها، یعنی

$$\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{120}, \ldots\},$$

است، که مجموعهٔ خیلی جالبی نیست. نگاره‌ها به‌طورکلی می‌توانند بسیار نامنظم باشند. لذا ترجیح می‌دهیم‌که تابع‌را برحسب یك همدامنه تعریف کنیم‌وازمحاسبهٔ دقیق‌آن قسمت ازهمدامنه‌که واقعاً مورد نیازاست صرفنظر نماییم، به‌این امید (امیدی‌که اغلب برآورده می‌شود) که نیازی به‌آن نداشته باشیم. البته اگرضرورت ایجاب‌کند می‌توانیم نگاره را هم به‌دست آوریم.

این امر نکتهٔ کوچك دیگری‌را مطرح می‌کند. اگر بخواهیم دقیق باشیم،نمی‌توانیم بگوییم همدامنهٔ یك تابع «یکتا»ست. توابع

$$f:\mathcal{R} \to \mathcal{R}, \quad f(x)=x^2,$$

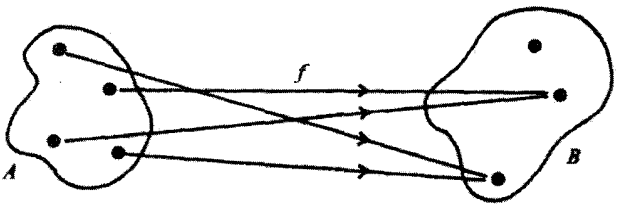
$$g:\mathcal{R} \to \mathcal{R}^+, \quad g(x)=x^2,$$

راکه درآن $\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} | x \geqslant 0\}$ درنظرمی گیریم. همدامنهٔ اولی $\mathcal{R}$ ودومی $\mathcal{R}^+$ است؛ ولی تعریف صوری تابع به‌عنوان مجموعه‌ای از زوجهای مرتب، در هردو حالت مارا به مجموعهٔ $\{(x, x^2) | x \in \mathcal{R}\}$ می‌کشاند. بنابراین، توابع f و g برابر هستند.

نکتهٔ اصلی این‌است که همدامنهٔ تابع مبهم است، و هر مجموعه‌ای که برد[1] تابع را شامل شود می‌تواند همدامنه‌اش باشد. ازسوی دیگر، دامنه به‌طوریکتا مشخص می‌شود.

می‌توانیم ملا لغطی‌تر باشیم‌ویك تابع‌را نه‌فقط بایك مجموعهٔ f از زوجهای مرتب، بلکه بایك سه‌تایی (f, A, B) تعریف کنیم واز این مشکل رهایی یابیم. ولی برای ما، این‌کار به‌زحمتش نمی‌ارزد: پذیرفتن ابهام در همدامنه ساده‌تراست. نماد $f: A \to B$ مشخص می‌کندکه درهرمورد خاص‌کدام یك ازهمدامنه‌های ممکن مورد نظر است.

اغلب مناسب است‌که تابعی چون $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ را بارسم نمودارش مجسم کنیم. برای مجموعه‌هایی به غیراز $\mathcal{R}$، غالباً بهتراست‌که یك تابع‌را به‌صورت تصویری مانند



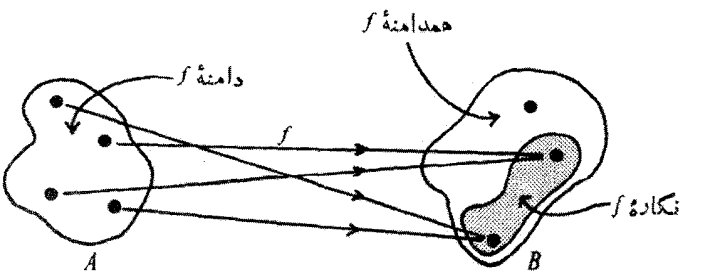
بپنداریم. به‌ازای هر $x \in A$، مقدار $f(x)$ را می‌توان در انتهای پیکان نظیرش یافت. آنگاه تعریف یك تابع به‌مصداق تصویر چنین است.

(ت۱′) هرعضو A درابتدای یك پیکان منحصربه‌فرد قرار دارد،

(ت۲′) همهٔ پیکانها به B ختم می‌شوند.

این تعریف صرفاً ابزاری تصویری، وهمترازدیاگرامهای ون است؛ ولی به‌عنوان منبعی الهام‌بخش ومنبعی برای مثالهایی ساده، مفیدهم هست.

دراین نوع تصاویر، برد f مجموعهٔ اعضایی از B است‌که روی پیکانها قراردارند:



---

۱. منظوراز برد، همان نگاره است. م.

بنابراین، برد f تمام همدامنه یعنی B است اگر هرعضو B درانتهای پیکانی باشد. این مطلب تعریف صوریتر زیررا موجب می‌شود:

تعریف . تابعی چون $f: A \to B$ پوشا (به B) یا برروی B است اگر هرعضو B به‌ازای حداقل یك $x \in A$ به‌صورت $f(x)$ باشد.

پوشا بودن یا نبودن یك تابع بستگی به‌انتخاب همدامنه‌اش دارد. گزارهٔ «f پوشاست» را تنها وقتی می‌توان بیان کرد که‌از فحوای کلام روشن باشد که کدام همدامنه مورد نظراست ــ نظیرعبارتی‌چون «$f: A \to B$ پوشاست» که مسلماً همدامنه‌اش B است. مثالهای زیرموضوع‌را روشنترمی کنند.

(۱) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، که درآن $f(x) = x^2$. این تابع پوشا به $\mathbb{R}$ نیست زیرا هیچ عدد حقیقی‌منفی مربع یك عدد حقیقی نمی‌تواند باشد؛ مثلاً $-1 \in \mathbb{R}$ ــ ولی -1 ــ به‌ازای هیچ xی در $\mathbb{R}$ به‌صورت x^2 نیست.

(۲) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$، که درآن $f(x) = x^2$. این تابع پوشا به $\mathbb{R}^+$ است، زیرا هر عدد حقیقی مثبت یك ریشهٔ دوم حقیقی دارد.

(۳) $f: A \to B$، که درآن $A =$ {همهٔ دایره‌های در صفحه}، $B = \mathbb{R}^+$، و $f(x) =$ (شعاع x). این تابع پوشا به $\mathbb{R}^+$ است، زیرا به‌ازای‌هرعدد حقیقی مثبت مفروض دایره‌ای به‌آن شعاع وجود دارد.

اگرهیچ عضوی از B درانتهای دوپیکان مختلف قرارنداشته باشد، نوع مهم‌دیگری ازتوابع به‌دست می‌آید:

تعریف . تابعی چون $f: A \to B$ تك گزین، یا یك به یك، است اگر به ازای هر $x, y \in A$، $f(x) = f(y)$ ایجاب کندکه $x = y$.

در اینجا انتخاب دقیق همدامنه مسئله‌ای ایجاد نمی‌کند: اگر f به‌ازای همدامنه‌ای یك به یك باشد، به ازای هر همدامنهٔ دیگر نیز یك به یك است. به‌ذکر چند مثال می‌پردازیم:

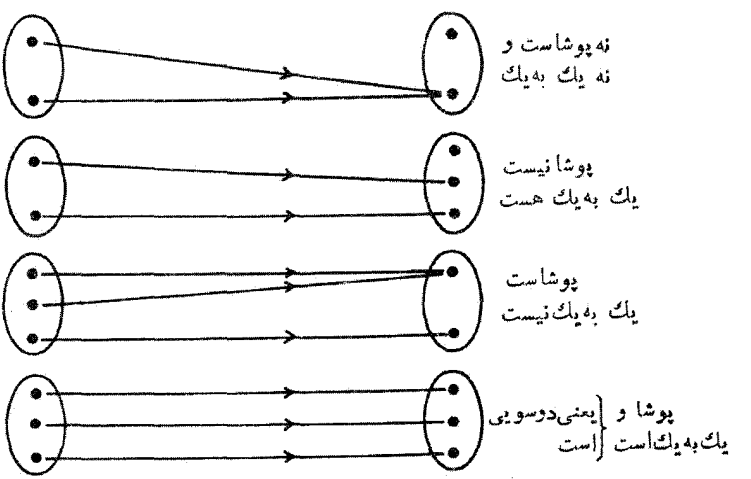
(۱) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، که در آن $f(x) = x^2$. این تابع یك به یك نیست، زیرا $f(-1) = 1 = f(1)$ ولی $-1 \neq 1$.

(۲) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$، که درآن $f(x) = x^2$. این تابع یك به‌یك است: اگر x و y اعدادی حقیقی ومثبت باشند و $x^2 = y^2$ آنگاه $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$، پس یا $x - y = 0$ که $x = y$، یا $x + y = 0$ که غیر ممکن است زیرا x و y هردو مثبت هستند، مگراینکه $x = y = 0$. درهرصورت، $x = y$.

(۳) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$، که در آن $f(x)=1/x$. این تابع یك بـه یك است، زیرا اگر $1/x=1/y$ آنگاه $x=y$.
جالبتر از همه توابعی با هردو خاصیت فوق هستند:

تعریف. تابعی چون $f:A\to B$ دوسویی یا تناظر یك به یك است، اگر هم یك به یك وهم پوشا (به B) باشد.

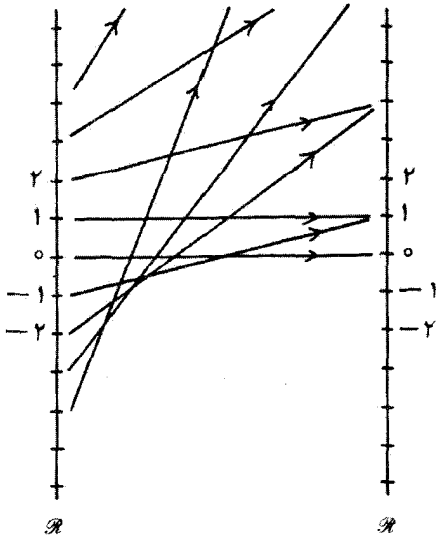
این مفهوم نیز بـه همدامنه بستگی دارد. عبارات «یك به‌یك» و «تناظر یك به‌یك» اغلب باهم اشتباه می‌شوند، وما به‌جای دومی عبارت «دوسویی» را به‌کار می‌بریم.
واضح است که $f:A\to B$ دوسویی است اگر وفقط اگر هر $b\in B$ به‌ازای عضو منحصر به‌فردی چون $x\in A$ به‌صورت $b=f(x)$ باشد.
همان طور که تصاویر زیر نشان می‌دهند، هرنوع تلفیقی از یك به‌یك بـودن وپوشا بودن می‌تواند رخ دهد:



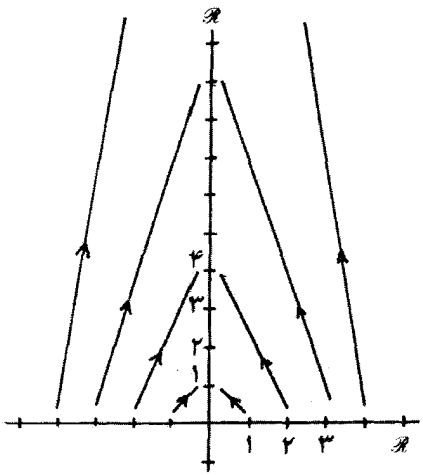
روی هـرمجموعهٔ A تابعی بسیار مهم وبسیار بدیهی می‌تـوان تعریف کـرد: تابع همانی $i_A:A\to A$ به‌ازای هر $a\in A$، توسط $i_A(a)=a$ تعریف می‌شود. بدیهی است که این تابع دوسویی است.

نمودار تابع

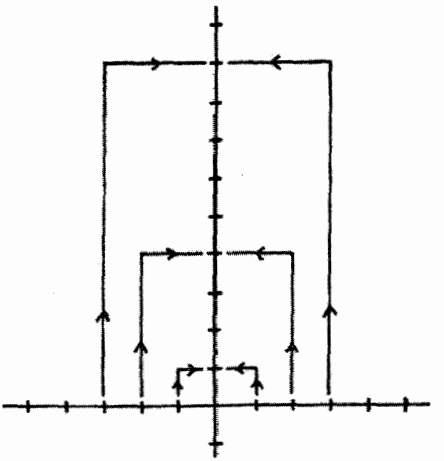
برای به‌تصویر درآوردن توابع دوشیوهٔ همتراز وجود دارد: یکی بانمودار (برای توابع $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) ودیگری بادیاگرام نقطه‌پیکان. ارتباط جالبی بین این دو وجود دارد. تصویر نقطه‌پیکان تابع $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ شکلی شبیه به‌شکل زیراست:



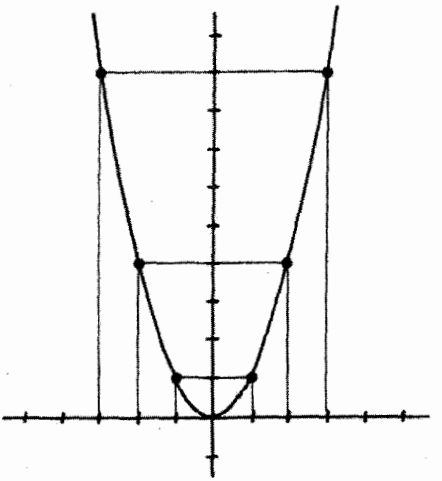
اگر A را به طور افقی چنان قرار دهیم که B را در ۰ قطع کند. دیگر پیکانها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



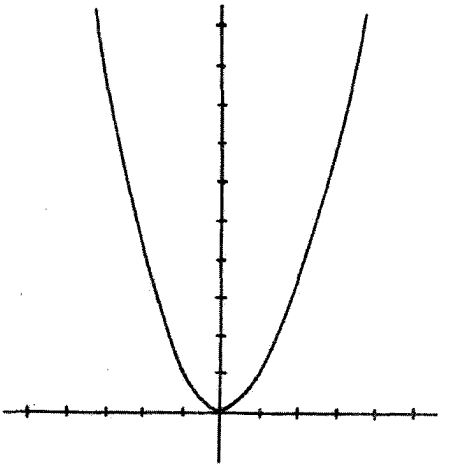
ولی جالبتر است پیکانهایی‌را به‌کار ببریم که فقط عمودی یا افقی باشند:



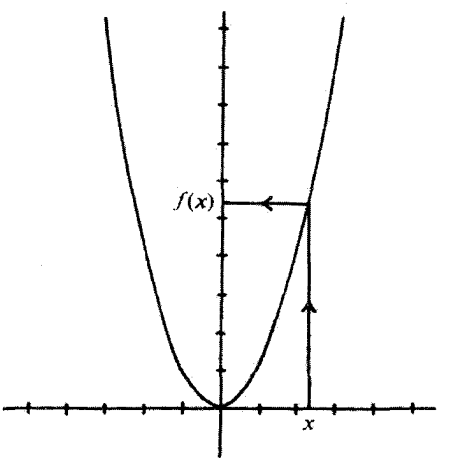
این تصویر روشن می‌سازدکه نقاط مهم، گوشه‌های پیکانها هستند. اگر x را تغییر دهیم، همهٔ گوشه‌ها روی یك منحنی قرار می‌گیرند:



حال می‌توانیم پیکانهارا حذف کنیم، وفقط نمودار متداول f را باقی‌گذاریم :



برعکس، اگراین نمودار داده شده باشد، می‌توانیم پیکانهارا مجدداً رسم کنیم: از $x \in A$ شروع وبه طورعمودی حرکت می‌کنیم تانمودار قطع شود، سپس افقی حرکت می‌کنیم تا B قطع شود. این نقطه همان $f(x)$ است.

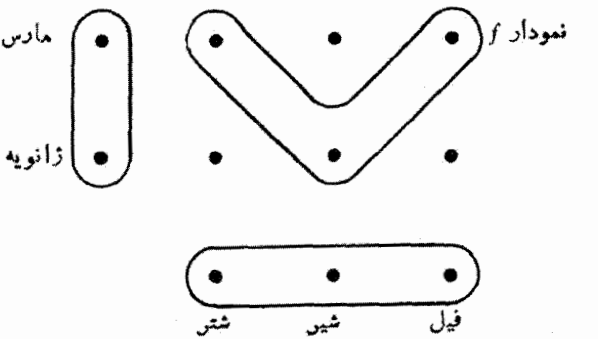


نمودار از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها چیست؟ صفحه همان $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است و گوشه، در فرم پیکانی از x به $f(x)$، همان $(x\ ,\ f(x))$ است. لذا نمودار f مجموعهٔ

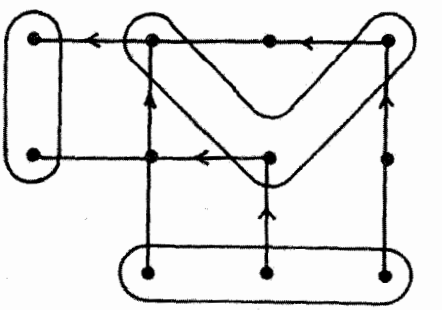
$$\{(x\ ,\ f(x))|x \in \mathbb{R}\}$$

است، ولی این مجموعه در تعریف صوری، همان f است. باقبول $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بـه‌عنوان یك صفحه، نمودار تابع همان تصویر طبیعی f است.

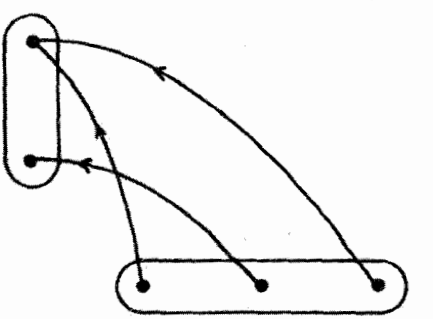
درمورد یك تابع کلی $f: A \to B$ هم به تصویر متناظری نیازمندیم. اکنون می‌توانیم $A \times B$ را رسم وازآن به جای صفحه استفاده کنیم. مثلاً «نمودار» تابع شتر-شیر-فیل، که در دو بخش پیش تعریف شد، به‌صورت زیر است:



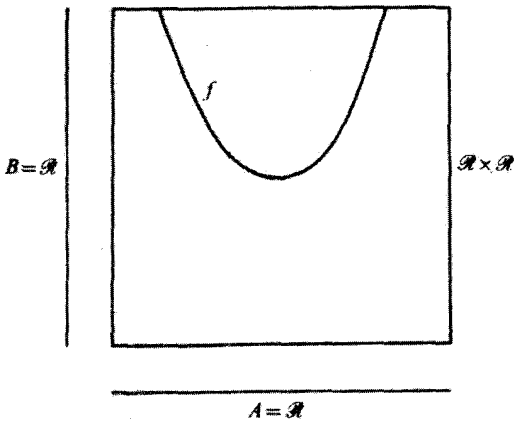
حال اگر ابتدا پیکانهایی ازاعضای A به‌طور عمودی رسم کنیم تانمودار را قطع کند، سپس به‌طور افقی تا B را، داریم



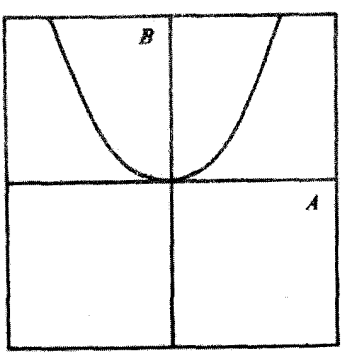
باکمی تغییر در شکل، تصویرنقطه-پیکان به‌دست می‌آید:



توجه کنید که، اگر بخواهیم دقیق باشیم، تصویر نمودار تابعی مانند $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باید چنین باشد:



ولی تصویر سنتی، که در آن A و B به‌عنوان «محور» روی صفحه رسم می‌شوند، مأنوستر ومناسبتر است:



اما باید به‌خاطر بسپاریم که این «محورها» جزئی از نمودار نیستند، بلکه برای نقاط (x, y) از صفحه نقش برچسب را دارند.

ترکیب توابع

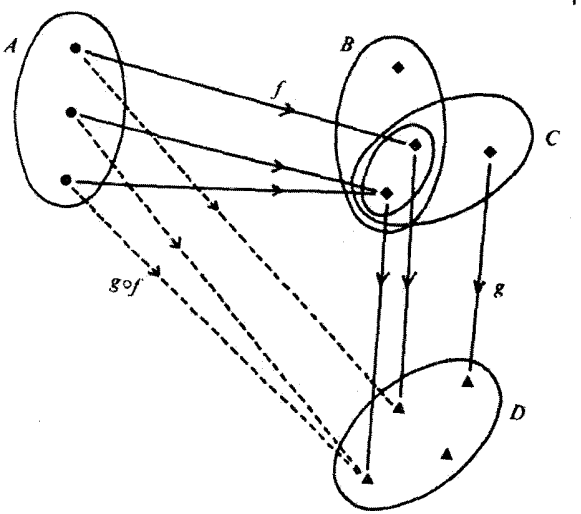
اگر $f: A \to B$ و $g: C \to D$ دو تابع باشند، و اگر نگارهٔ f زیرمجموعه‌ای از C باشد، آنگاه می‌توانیم f و g را ترکیب کنیم، به‌این‌نحو که «اول f را اعمال کنیم و سپس g را». به‌بیان صوری، تحت این فرضیات، تابعی چون

$$g\circ f:A\to D$$

را باقاعدهٔ [۱]

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

تعریف می‌کنیم.



البته باید بررسی کنیم که $g\circ f$ یك تابع از A به D است، ولی این آسان است.
یکی از خواص بسیار مفید ترکیب توابع شرکت پذیری است، به‌این معنا که:

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $f:A\to B$، $g:C\to D$، $h:E\to F$ سه تابع باشند به‌طوری که نگارهٔ f زیرمجموعه‌ای از C و نگارهٔ g زیرمجموعه‌ای از E باشد. آنگاه دو تابع

$$h\circ(g\circ f):A\to F$$

$$(h\circ g)\circ f:A\to F$$

برابرند.

اثبات. منظور از «برابری» برابری دو زیرمجموعه‌ای است از $A\times F$ که این توابع را تعریف می‌کنند؛ این خود به‌این معنی است که به‌ازای هر $x\in A$ مقادیر این دو تابع با هم مساویند. حال داریم

---

۱. متأسفانه با آنکه $f\circ g$ طبیعی‌تر جلوه می‌کند نماد $g\circ f$ باید به‌معنی «اول f، سپس g» باشد. ولی دومی تعریف ترکیب را به‌صورت $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ درمی‌آورد که نادرست است. یك راه‌حل این است که به‌جای $f(x)$ بنویسیم $(x)f$ و ترکیب را با $(x)f\,g=((x)f)g$ تعریف کنیم. ولی این نیز نامأنوس است!

$$h\circ(g\circ f)(x)=h(g\circ f(x))=h(g(f(x))),$$
$$(h\circ g)\circ f(x)=h\circ g(f(x))=h(g(f(x)))$$

که قضیه را ثابت می‌کنند. □

توابع همانی تحت ترکیب خواص جالبی دارند:

قضیهٔ ۲. اگر $f:A\longrightarrow B$ یك تابع باشد، آنگاه

$$f\circ i_A=f,\quad i_B\circ f=f.$$

اثبات. اثبات بررسی ساده ومستقیمی ازتعریف است. □

توابع وارون

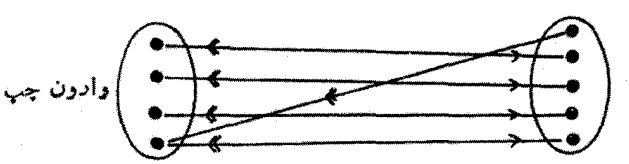
هر تابع $f:A\longrightarrow B$ را به‌صورت شیئی درنظرمی‌گیریم که $x\in A$ را اختیارمی‌کند وکاری روی آن انجام می‌دهد، یعنی $f(x)\in B$ را تولید می‌کند. گاهی می‌توانیم تابعی چون g بیابیم که آنچه‌را f «انجام داده‌است» «خنثی» می‌کند، وآن تابع وارون f نام دارد. در تحلیل دقیق این موضوع موانعی هم وجود دارد.

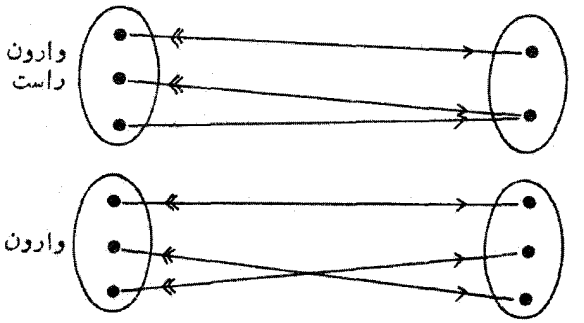
تعریف. فرض‌کنیم $f:A\longrightarrow B$ یك تابع باشد. آنگاه تابعی چون $g:B\longrightarrow A$ یك وارون چپ f نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x\in A$، داشته باشیم $g(f(x))=x$، وارون راست f نام دارد هرگاه به ازای هر $y\in B$، داشته باشیم $f(g(y))=y$، وارون f خوانده می‌شود هرگاه هم یك وارون چپ f باشد و هم یك وارون راست آن.

ملاحظه‌کنیدکه این سه شرط را می‌توانیم باعبارات معادل زیرهم بیان‌کنیم:

$$g\circ f=i_A,$$
$$f\circ g=i_B,$$
$$.f\circ g=i_B\ \text{و}\ g\circ f=i_A$$

حال به ذکرچند نمونه می‌پردازیم. دراینجا پیکان تنهای ⟶ را برای نمایش f به کارمی‌بریم وپیکان مضاعف ⟹ را برای g.





این تصاویر، الهام‌بخش محکی مفید هستند:

قضیهٔ ۳. تابعی چون $f:A\to B$ دارای یك:
(الف) وارون چپ‌است اگروفقط اگر یك به‌یك باشد،
(ب) وارون راست است اگروفقط اگر پوشا باشد،
(پ) وارون است اگر وفقط اگر دوسویی باشد.

اثبات (الف). فرض‌کنیم f دارای‌وارون چپی‌چون g باشد. برای اثبات یك‌به‌یك بودن f فرض می‌کنیم $f(x)=f(y)$. آنگاه $x=g(f(x))=g(f(y))=y$، لذا f مسلماً یك به‌یك است.

برعکس، فرض‌کنیم f یك به یك باشد. اگر $y\in B$ و $y=f(x)$، آنگاه چنین تعریف می‌کنیم: $g(y)=x$. این x، بنا به‌یك به‌یك بودن f، یکتاست. اگر y عضوی از برد f نباشد، چنین xی وجود ندارد؛ در آن صورت aی دلخواهی از A انتخاب و $g(y)$ را مساوی با a تعریف می‌کنیم. حال $g(y)$ به‌ازای هر $y\in B$ معین است و $g:B\to A$ یك تابع. ولی طبق تعریف g داریم، $g(f(x))=x$، ولذا g یك وارون چپ است.

(ب) فرض کنیم f وارون راستی چون g داشته باشد. اگر $y\in B$ آنگاه $y=f(g(y))$، لذا این y به ازای $x=g(y)$ به‌صورت $f(x)$ است. ازاین‌رو f یك تابع پوشا به B است.

برعکس، فرض‌کنیم f پوشا باشد. گیریم $y\in B$. آنگاه به‌ازای xی از A، که لزوماً یکتا نیست، داریم $y=f(x)$. به ازای هر $y\in B$، $g(y)$ را یك عضو مشخص دلخواهی از A می‌گیریم که $f(g(y))=y$. آنگاه g یك تابع است و یك وارون راست f.

(پ) تابع f یك وارون دارد اگر وفقط اگر وارون چپی چون g داشته باشدکه وارون راستی برای آن نیز باشد. این‌امرایجاب می‌کندکه f هم یك به‌یك باشد وهم‌پوشا، ولذا دوسویی. حال اگر f دوسویی باشد، وارون چپی چون g دارد، وبه‌آسانی بررسی می‌شودکه این g یك وارون راست نیزهست. بنابراین f یك وارون دارد. □

چند مثال

(۱) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $f(x)=x^3$. این تابع دو سویی است و دارای وارون $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، با تعریف $g(x)=\sqrt[3]{x}$ است.

(۲) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $f(x)=x^2$. این تابع در وضع کنونیش، نه یك به‌یك است و نه پوشا، لذا هیچ نوع وارونی ندارد. پس ریشه‌های دوم چه می‌شوند؟ می‌توانیم با انتخاب $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant 0\}$ به‌عنوان همدامنه، f را پوشا کنیم. حال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ پوشاست، و $g(x)=\sqrt{x}$ (ریشهٔ دوم مثبت) یك وارون راست است زیرا $f(g(x))=(\sqrt{x})^2=x$. ولی این یك وارون چپ نیست، زیرا

$$\sqrt{x^2}=x \quad ,\ x\geqslant 0 \text{ اگر}$$

$$\sqrt{x^2}=-x \ ,\ x<0 \text{ اگر}.$$

(۳) در این مثال، خواصی از توابع نمایی و لگاریتمی را فرض می‌گیریم که در این کتاب آنها را به طور دقیق اثبات نکرده‌ایم. فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توسط $f(x)=e^x$ تعریف شده باشد. این تابع یك به یك است زیرا اگر $e^x=e^y$ آنگاه $e^{x-y}=1$، لذا $x-y=0$ و بنابراین $x=y$. این تابع یك وارون راست دارد، که (مثلاً) با

$$g(y)=\log y \quad (y>0)$$

$$g(y)=۲۷۳ \quad (y\leqslant 0)$$

تعریف می‌شود. زیرا $g(f(x))$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود: $f(x)=e^x$ که مثبت است، ولذا $g(f(x))=g(e^x)=\log e^x=x$. عدد اختیاری ۲۷۳ در این محاسبه وارد نمی‌شود: فقط به‌این دلیل آورده شده است که g روی تمام $\mathbb{R}$ تعریف بشود. با توجه به فرایند محاسبات، هر تعریف دیگر g روی اعداد حقیقی منفی هم درست است.

(۴) بارزتر آن است که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ را در نظر بگیریم، که در آن $\mathbb{R}^*=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$، و $f(x)=e^x$. اکنون f دوسویی است، و $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$، با ضابطهٔ $g(y)=\log y$، یك وارون آن است زیرا:

$$e^{\log y}=y,$$

$$\log e^x=x.$$

(۵) در این مثال آشنایی با برخی از خواص توابع مثلثاتی فرض شده است: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\sin x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع نه‌یك به‌یك است و نه پوشا، لذا هیچ نوع وارونی ندارد، پس $\sin^{-1}x$ (یا $\arcsin x$) که در جدولهای مثلثاتی یافت می‌شود چیست؟ جواب این سؤال به‌این بستگی دارد که دقیقاً چه می‌خواهیم انجام بدهیم. اگر $\sin^{-1}(x)$ آن y یکتایی، $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$، تعریف بشود که

$\sin y = x$، آنگاه این تابع یك وارون راست (ولی نه چپ) برای تابع $f(x) = \sin x$ است، که در آن $f: \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. این تابع به طور قطع یك وارون چپ نیست: مثلاً،

$$\sin^{-1} \sin 6\pi = \sin^{-1} 0 = 0 \neq 6\pi .$$

گاهی می‌گوییم که $\sin^{-1}$ «چند مقداری» است. مطابق تعریف ما، این رابطه نمی‌تواند، به معنای دقیق کلمه، یك تابع باشد.

(۶) رضایتبخش‌ترین فرایند چنین است که فرض کنیم

$$f: \{x \in \mathbb{R} | -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2\} \to \{x \in \mathbb{R} | -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$

باضابطهٔ $f(x) = \sin x$ تعریف شده باشد. آنگاه f دوسویی است، و $\sin^{-1}$ یك وارون برای این f است.

وارونهای چپ و راست لزومی ندارد یکتا باشند ــ این یکی ازدلایلی است که در ساختن آنها ازانتخابهای اختیاری استفاده می‌شود. ولی وارونها یکتا هستند.

قضیهٔ ۴. اگر تابعی هم یك وارون چپ داشته باشد وهم یك وارون راست، آنگاه یك وارون دارد. این تابع وارون، یکتاست، وهر وارون چپ یاراستی با آن برابراست.

اثبات. اگر $f: A \to B$ هم یك وارون چپ داشته باشد و هم راست، آنگاه طبق قضیهٔ ۳، f دوسویی است، و وارونی چون F دارد. اگر g یکی از وارونهای چپ آن باشد، آنگاه

$$g = g \circ i_B = g \circ (f \circ F) = (g \circ f) \circ F = i_A \circ F = F .$$

به‌همین ترتیب اگر h یکی از وارونهای راست آن باشد آنگاه $h = F$. از آنجایی که هروارون، به‌خصوص یك وارون چپ نیز هست، این مطلب همچنین ثابت می‌کند که F یکتاست. □

نماد نمایش تابع وارون تابع $f: A \to B$، به‌شرطی که وجود داشته باشد، عبارت است از

$$f^{-1}: B \to A .$$

قضیهٔ ۵. اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دوسویی باشند، آنگاه $g \circ f: A \to C$ نیز دو سویی است، و

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

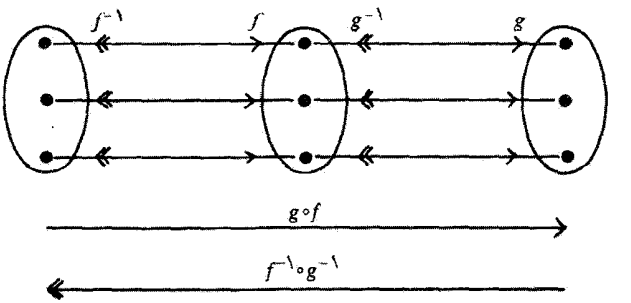
اثبات. واضح است که $g \circ f$ دو سویی است. با بررسی مستقیم به‌آسانی ثابت

می‌شود که $f^{-1}\circ g^{-1}$ یك وارون چپ آن‌هم هست، زیرا

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) &= f^{-1}\circ(g^{-1}\circ(g\circ f))\\ &= f^{-1}\circ((g^{-1}\circ g)\circ f)\\ &= f^{-1}\circ(i_B\circ f)\\ &= f^{-1}\circ f\\ &= i_A .\end{aligned}$$

لذا طبق قضیهٔ ۴ این تابع یك وارون است. □

این مطلب‌را می‌توانیم به صورت زیر تجسم کنیم: آنگاه روشن می‌شود که محاسبهٔ فوق بسیار کمتر از آنچه که به‌نظر می‌رسد مهیب است.



تحدید

اگر $f: A \to B$ یك تابع باشد و X زیرمجموعه‌ای از A، می‌توانیم تابعی مانند

$$f|_X : X \to B ,$$

به نام تحدید f به X، باضابطهٔ

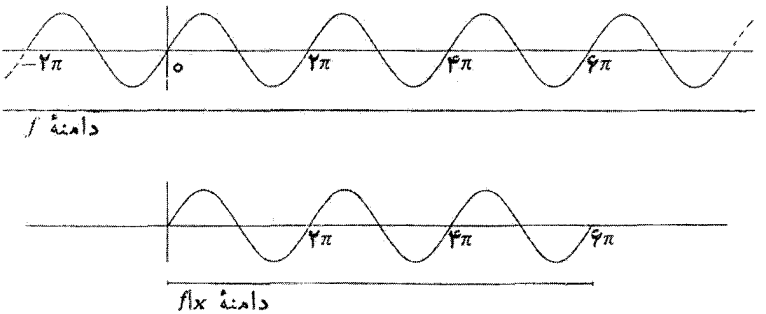
$$f|_X(x) = f(x), \qquad (x \in X)$$

تعریف کنیم. تفاوت این تابع با f تنها در این است که x هایی که در X نیستند در نظر گرفته نمی‌شوند.

مثلاً، اگر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باضابطهٔ $f(x) = \sin x$ باشد و

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 6\pi\} ,$$

آنگاه نمودارهای f و $f|_X$ به‌صورت زیرهستند:



عمل تحدید عملی نسبتاً بدیهی است. استفادهٔ اصلی آن در این است که توجه‌مان را به‌رفتار f روی زیرمجموعهٔ X معطوف می‌کند. گاهی این عمل مفیداست: درفوق ملاحظه کردیم که با فرض $I=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\leqslant x\leqslant ۱\}$، $\sin:\mathbb{R}\to I$ دوسویی نیست. ولی اگر $X=\{x\in\mathbb{R}\mid -\pi/۲\leqslant x\leqslant \pi/۲\}$ آنگاه $\sin|_X: X\to I$ دوسویی است.

اگر یک تابع همانی $i_A: A\to A$ به یک زیرمجموعهٔ $X\subseteq A$ محدود شود، تابع شمولی

$$i_A|_X: X\to A$$

به‌دست می‌آید که در آن $i_A|_X(x)=x$ $(x\in X)$. بنابراین، این همان تابع i_X است، ولی با همدامنه‌ای متفاوت که نتیجه‌اش تأکید روی چیزدیگری است.

دنباله و n تایی

اکنون با استفاده از توابع می‌توانیم به‌برخی از پرسشهایی که قبلاً مطرح شد پاسخ دهیم. به‌خصوص می‌توانیم تعاریف دقیقی از دنباله و n تایی ارائه دهیم. قبلاً زوج، سه‌تایی، چهارتایی، ... مرتب را تعریف کردیم، ولی یک دستور کلی عرضه نکردیم.

فرض کنیم X_n مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ \ldots,\ n\}=\{x\in\mathcal{N}\mid ۱\leqslant x\leqslant n\}$ باشد. اگر S یک مجموعه باشد، آنگاه هر n تایی از اعضای S را تابعی چون

$$f: X_n\to S.$$

تعریف می‌کنیم. کاری که این تابع انجام می‌دهد این است که $f(۱)$، $f(۲)$، ...، $f(n)$ را به‌عنوان اعضایی از S مشخص می‌کند. اگر نمادگذاری را به $(f_۱, f_۲, \ldots, f_n)$ تغییر دهیم ملاحظه می‌کنیم که دو n تایی $(f_۱, f_۲, \ldots, f_n)$ و $(g_۱, g_۲, \ldots, g_n)$ برابرند اگر وفقط اگر $f_۱=g_۱$، $f_۲=g_۲$، ...، $f_n=g_n$. واین همان صورتی است که یک n تایی باید داشته باشد.

به همین ترتیب می‌توانیم ایدهٔ یک دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots$ را که قبلاً به عنوان یک «فهرست بی پایان» توصیف کردیم به‌طور دقیقتر به‌صورت تابعی چون

$$f : \mathcal{N} \to S$$

تعریف کنیم، ولی حالا $f(n)$ را همان a_n می‌انگاریم.

درمورد زوجهای مرتب، تعریف جدید (f_1, f_2) باآنچه که کوراتوفسکی داده است مساوی نیست. ولی دارای همان خاصیت است که $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$ اگر و فقط اگر $f_1 = g_1$ و $f_2 = g_2$. از آنجایی که این خاصیت تنها خاصیتی است که مورد استفاده واقع می‌شود، تفاوت این دوتعریف بی‌اهمیت است.

تابع چند متغیره

درحساب دیفرانسیل وانتگرال «توابع بادومتغیر»ی مانند

$$f(x, y) = x^2 - 3y^3 + \cos xy, \quad (x, y \in \mathcal{R})$$

مطرح می‌شوند. برای دقیقتر مشخص کردن این توابع لزومی ندارد همهٔ مطالب قبلی‌را تکرار کنیم. نمادگذاری روشن می‌سازد که f صرفاً یك تابع معمولی‌است که روی مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) تعریف می‌شود، یعنی

$$f : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}.$$

به‌طور کلی اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه هرتابع با دومتغیر $a \in A$ و $b \in B$، یك تابع معمولی $f : A \times B \to C$ است. به همین ترتیب توابع با n متغیر، توابعی معمولی هستندکه روی مجموعه‌ای از n تایی‌ها تعریف می‌شوند. خواهیم دیدکه این مفاهیم بسیار مفید هستند.

عمل دوتایی

به بیان ساده، هر عمل دوتایی روی مجموعه‌ای چون A تابعی مانند $f : A \times A \to A$ است. مثالهای این مفهوم در ریاضیات بسیارند:

(۱) جمع روی $\mathcal{N}$، $\alpha : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$، $\alpha(x, y) = x + y$.

(۲) ضرب روی $\mathcal{N}$، $\mu : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$، $\mu(x, y) = xy$.

(۳) تفریق روی $\mathcal{Z}$، $\sigma : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$، $\sigma(x, y) = x - y$.

(۴) تقسیم روی عناصر غیرصفر $\mathcal{Q}$.

فرض کنیم $\mathcal{Q}^* = \{x \in \mathcal{Q} \mid x \neq 0\}$،

$\delta : \mathcal{Q}^* \times \mathcal{Q}^* \to \mathcal{Q}^*$، $\delta(x, y) = x / y$.

(۵) فرض کنیم $A = \mathbb{P}(X)$، مجموعهٔ همه زیر مجموعه‌های مجموعهٔ مفروضی چون X باشد، $u : A \times A \to A$ را با ضابطهٔ $u(Y_1, Y_2) = Y_1 \cup Y_2$ تعریف می‌کنیم.

(۶) برای مجموعهٔ مفروضی چون X، فرض کنیم M مجموعهٔ همهٔ توابع از X به X باشد، لذا $f \in M$ به‌این‌معناست که $f: X \to X$ است. $c: M \times M \to M$ را باضابطهٔ $c(g, f) = g \circ f$ تعریف می‌کنیم.

دراکثر اعمال دوتایی که در ریاضیات مطرح می‌شونـد، عضو $f(x, y)$، بااستفاده ازنمادهایی چون $\circ$، به‌صورت $x \circ y$ نمایش داده می‌شود. درمثالهای فوق داریم $x+y$، $x-y$، xy، x/y، $x \cup y$، $x \circ y$. بـه ایـن دلیـل، معمولاً یك عمـل دو تایـی را با $\circ: A \times A \to A$ نمایش می‌دهیم ونگارهٔ $\circ(x, y)$ را با $x \circ y$. باتوجه بـه مثالهای (۲) و (۶)، $x \circ y$ را حاصلضرب یا ترکیب x و y می‌نامیم. درمثال (۲) هیچ نمادی بین اعضا وجود ندارد. این نمادگذاری اختصاری اغلب در موضوعات دیگر ریاضی هـم‌که امکان اشتباه وجود نداشته باشد به کار می‌رود. مثلاً، ترکیب توابع در (۶) را معمولاً به جای $g \circ f$ به صورت gf می‌نویسیم. خواننده قبلاً هم وقتی کـه آموخت

۲π را ۲ ضرب در π،

$\frac{۱}{۲}$ ۲ را ۲ به اضافهٔ $\frac{۱}{۲}$، و

۲۱ را ۲ ضرب در ده به اضافهٔ ۱

بخواند درحقیقت باچنین قراردادهایی سروکار داشت.

باتوجه به نماد $x \circ y$، انتظار نداریم که $y \circ x$ و $x \circ y$ برابر باشند. مثلاً، در مورد تفریق داریم. $۲ - ۱ \neq ۱ - ۲$

اگر به‌ازای همهٔ اعضای $x, y \in A$ داشته باشیم $x \circ y = y \circ x$، آنگاه $\circ$ را جابه‌جایی می‌خوانیم.

مثالهای (۱)، (۲)، و (۵) جابه‌جایی هستند، ولی (۳) و (۴) چنین نیستند. مثال (۶) ناجابه‌جایی است هرگاه X بیش از یك عضو داشته باشد. (زیرا اگر $a \neq b$، $a, b \in X$، آنگاه چنین تعریف می‌کنیم کـه $f(a) = f(b) = a$، $g(a) = g(b) = b$، ودر غیر ایـن صورت $f(x) = g(x) = x$، آنگـاه داریـم $g \circ f(a) = b$ ولـی $f \circ g(a) = a$، لـذا $g \circ f \neq f \circ g$.)

جز درحالتی کـه برما معلوم باشد یك عمل دوتایی جابه‌جایی است، رعایت ترتیب اعضا درحاصلضرب ضرور است. این عمل ضرب‌را می‌توانیم برای سه عضو (یا بیشتر) هم تعمیم دهیم. فرض کنیم $x, y, z \in A$، آنگاه $x \circ y \in A$ ومی‌توان آن را در z ضرب کرد. دراینجا ازپرانتز استفاده می‌کنیم وبرای نمایش حاصلضرب می‌نویسیم $(x \circ y) \circ z$ تانشانگر تمایزش با $x \circ (y \circ z)$ نیز باشد. اگرچه درعبارت دوم، x، y، z به همان ترتیب قبلی‌نوشته شده‌اند، ولی این‌یکی حاصلضرب x در $y \circ z$ است وممکن‌است باحاصلضرب اولی‌متفاوت باشد. مثلاً، $(۱ - ۲) - (۲ - ۳) \neq ۱ - (۲ - ۳)$.

اگر برای همهٔ اعضای $x, y, z \in A$ داشته باشیم $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$، آنگاه

ه را شرکت پذیر می‌خوانیم. مثالهای (۱)، (۲)، (۵)، و (۶) شرکت‌پذیرهستند، ولی (۳) و (۴) چنین نیستند.

در بحث مربوط به مفهوم اعداد، اعمال دوتایی جابه جایی وشرکت‌پذیر (جمع و ضرب) به منزلهٔ سنگ زیربنا هستند.

به‌همان نحوی که اعمال دوتایی $f:A\times A\longrightarrow A$ را تعریف کردیم، می‌توانیم اعمال سه‌تایی $t:A\times A\times A\longrightarrow A$ راهم تعریف کنیم، وبه‌همین ترتیب تاآخر. حتی در آغاز این سلسله، می‌توانیم تابعی چون $g:A\longrightarrow A$ را نیز به‌عنوان یك «عمل یك‌تایی» در نظر بگیریم. این مفاهیم، درمقایسه با اهمیت اساسی اعمال دوتایی، در ریاضیات اهمیت چندانی ندارند.

خانوادهٔ اندیس‌دار ازمجموعه‌ها

درآخرفصل ۳ مفهوم مجموعه‌ای چون S راکه اعضایش خود مجموعه بودند بررسی کردیم. مثلاً، ممکن است داشته باشیم

$$S=\{S_1\ ,\ \cdots\ ,\ S_n\}$$

که درآن هر S_r خود یك مجموعه است. بااستفاده از مفهوم تابع می‌توانیم این ایده را تعمیم دهیم. اگر $\mathcal{N}_n=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$، آنگاه تابعی دو سویی چون $f:\mathcal{N}_n\longrightarrow S$ با ضابطهٔ $f(r)=S_r$ در دست است. هیچ دلیلی وجود ندارد که خودرا به $\mathcal{N}_n$ محدود کنیم. اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشد و $f:A\longrightarrow S$ یك دو سویی، که درآن هرعضو S خود یك مجموعه است، آنگاه S را یك خانوادهٔ اندیس‌دار ازمجموعه‌ها می‌خوانیم،

$$S=\{S_\alpha|\alpha\in A\}\ .$$

دراین بحث A مجموعهٔ اندیس نام دارد.

اجتماع یك چنین خانوادهٔ اندیس‌دار، یعنی

$$\bigcup S=\{x|x\in S_\alpha\text{ ،}A\text{ یی در }\alpha\text{ به‌ازای}\}\ ,$$

را به‌صورت

$$\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha$$

نیز نمایش می‌دهیم، واشتراك

$$\bigcap S=\{x|x\in S_\alpha\text{ ،}\alpha\in A\text{ هر به‌ازای}\}$$

را هم به‌صورت

$$\bigcap_{\alpha\in A}S_\alpha\ .$$

وقتی‌که $A=\mathcal{N}_n$، اغلب این مجموعه‌ها را با $\bigcup_{r=1}^{n} S_r$ و $\bigcap_{r=1}^{n} S_r$ نشان می‌دهیم؛ و وقتی‌که $A=\mathcal{N}$، نمادهای مربوط، $\bigcup_{r=1}^{\infty} S_r$ و $\bigcap_{r=1}^{\infty} S_r$ هستند. دراین عبارتها نگران نماد «∞» که جزئی از گسترش تاریخی موضوع است نباشید؛ امروزه آن‌را حذف واز نمادهای $\bigcup_{r\in\mathcal{N}} S_r$ و $\bigcap_{r\in\mathcal{N}} S_r$ استفاده می‌کنند.

تمرین

دراین تمرینها هرخاصیتی ازتوابع نمایی، لگاریتمی، ومثلثاتی‌راکه مورد لزوم باشدبدون اثبات می‌توان پذیرفت.

۱. نگارهٔ توابع $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ ذیل‌را بیابید:
(الف) $f(x)=x^3$،
(ب) $f(x)=x-4$،
(پ) $f(x)=x^2+2x+2$،
(ت) $f(x)=x^2+\cos x$،
(ث) $f(x)=1/x$ اگر $x\neq 0$ و $f(0)=1$،
(ج) $f(x)=|x|$،
(چ) $x^2+x-|x|^2$،
(ح) $f(x)=x^{16}+x$.

۲. برای هریك‌ازتوابع تعریف شده درفوق، تعیین‌کنیدآیا (به‌عنوان یك تابع $\mathcal{R}\to\mathcal{R}$) (الف) یك به یك، (ب) پوشا، (پ) دوسویی است.

۳. توابع‌زیرطوری بایدتعریف شوندکه همدامنهٔ‌آنها $\mathcal{R}$ باشد، ودامنهٔ‌آنها زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{R}$. درهرمورد بزرگترین دامنهٔ ممکن‌را تعیین‌کنید:
(الف) $f(x)=\log x$،
(ب) $f(x)=\log\log\cos x$،
(پ) $f(x)=-x$،
(ت) $f(x)=\log(1-x^2)$،
(ث) $f(x)=\log(\sin^2(x))$،
(ج) $f(x)=e^{x^2}$،
(چ) $f(x)=1/(x^2+1)$،

(ح) $f(x)=\sqrt{(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)(x-۵)(x-۶)}$ (ریشهٔ دوم مثبت). درهرمورد نگارهٔ f را پیداکنید.

۴. فرض کنید S مجموعهٔ دایره‌های درصفحه باشد و $f:S \to \mathbb{R}$ باضابطهٔ

$$f(s)=\text{مساحت } s$$

تعریف بشود. آیا f یك به یك است؟ پوشاست؟ دوسویی است؟
حال فرض کنید T مجموعهٔ دایره‌هایی در صفحه باشدکه مرکزشان درمبدأ است، و $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}|x\geqslant ۰\}$، آنگاه $g:T\to\mathbb{R}^+$ را باضابطهٔ

$$g(t)=\text{محیط } t$$

تعریف کنید. آیا g یك به یك است؟ پوشاست؟ دوسویی است؟

۵. اگر A دوعضو داشته باشد و B سه عضو، چند تابع متفاوت از A به B وجود دارد؟ از B به A؟ درهرمورد چندتا یك به یك هستند؟ چندتا پوشا هستند؟ چندتا دوسویی‌هستند؟

۶. اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد $(n, m\in\mathbb{N})$، تعداد توابع از A به B را بیابید.

۷. نشان دهید اگر $A=\varnothing$ و $B\neq\varnothing$، آنگاه، طبق تعریفی که باکمك نظریهٔ مجموعه‌ها عرضه شد، دقیقاً یك تابع از A به B وجود دارد. نشان دهید اگر $A\neq\varnothing$ و $B=\varnothing$، آنگاه هیچ تابعی وجود ندارد. چند تابع از $\varnothing$ به $\varnothing$ وجود دارد؟

۸. مثالهایی ازتوابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ بیاوریدکه:
(الف) نه یك به‌یك باشد ونه پوشا،
(ب) یك به‌یك باشد ولی پوشا نباشد،
(پ) پوشا باشد ولی یك به‌یك نباشد،
(ت) هم‌پوشا باشد وهم یك به‌یك.

۹. اگر $f:A\to B$، نشان دهیدکه، به‌ازای $X\subseteq A$ و $Y\subseteq B$، فرمولهای

$$\hat{f}(X)=\{f(x)|x\in X\}$$

$$\check{f}(Y)=\{x\in A|f(x)\in Y\}$$

دوتابع، $\hat{f}:\mathbb{P}(A)\to\mathbb{P}(B)$ و $\check{f}:\mathbb{P}(B)\to\mathbb{P}(A)$، تعریف می‌کنند.
ثابت کنیدکه به‌ازای هر $X_۱, X_۲\subseteq A$ و $Y_۱, Y_۲\subseteq B$، داریم:
(الف) $\hat{f}(X_۱\cup X_۲)=\hat{f}(X_۱)\cup\hat{f}(X_۲)$،

(ب) $\hat{f}(X_1 \cap X_2) \subseteq \hat{f}(X_1) \cap \hat{f}(X_2)$ ولی برابری الزاماً برقرار نیست،
(پ) $\check{f}(Y_1 \cup Y_2) = \check{f}(Y_1) \cup \check{f}(Y_2)$،
(ت) $\check{f}(Y_1 \cap Y_2) = \check{f}(Y_1) \cap \check{f}(Y_2)$.

درصورتی که بدانیم f پوشاهم هست آیا می‌توانیم (ب) را به‌برابری تبدیل کنیم؟ اگر یك به‌یك باشد چطور؟ اگردوسویی باشد چطور؟

(نمادگذاری متداول در کتابهای درسی این است که می‌نویسند $f(X) = f(X)$ و $\check{f}(Y) = f^{-1}(Y)$: ما نماد فوق‌را برای وضوح بیشتر به‌کار برده‌ایم.)

۱۰. عمل دوتایی $\circ$ را روی $\mathbb{Z}$ با:
(الف) $x \circ y = x - y$،
(ب) $x \circ y = |x - y|$،
(پ) $x \circ y = x + y + xy$،
(ت) $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y + \frac{1}{2}((-1)^{x+y} + 1) + 1)$،

تعریف کنید. نشان دهیدکه این اعمال در واقع اعمال دوتایی هستند. کدام یك جابه‌جایی است؟ کدام شرکت‌پذیر؟

٦

منطق ریاضی

کیفیت اساسی ریاضیات کـه آن را به‌طوریکپارچه به‌هم مربوط می‌سازد استفاده ازاثبات ریاضی جهت‌استنتاج قضایای جدیدازقضایای قبلی‌است‌که نظریه‌ای قوی وسازگاربه‌وجود می‌آورد. این روشها فنونی را دربرمی‌گیرندکه درزنـدگی روزمره معمول نیستند. اثبات به‌روش برهان خلف (که درکتابهای‌قدیمی «تعلیق محال» خوانده می‌شود) شاید جالبترین آنها باشد. برای اثبات درستی مطلبی بااین‌روش، فرض می‌کنیم‌که مطلب موردنظردرست نباشد وسپس نشان می‌دهیم که این‌فرض به‌تناقض منجرمی‌شود. به‌عنوان مثال:

قضیه. کوچکترین‌کران بالای $S=\{x\in\mathbb{R}|x<1\}$ عدد ۱ است.

اثبات. بی‌شك ۱ یکی از کرانهای بالای S هست. گیریم K کران بـالای دیگری باشد. فرض‌کنیم $K<1$؛ آنگاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهدکه $K<\frac{1}{2}(K+1)<1$. این مطلب به‌این معنی است‌که $K<\frac{1}{2}(K+1)\in S$، کـه متناقض بااین امر است‌که K یك‌کران بالاست. بنابراین، فرض $K<1$ باید غلط باشد ولذا $K\geqslant 1$ و ۱ همان‌طورکه مطلوب است‌کوچکترین‌کران بالاست. □

اثبات فوق نمونه‌ای ازاین‌نوع استدلال است. به‌منظورتحلیل دقیقترآن، فرض‌کنیم

P نمایش گزارهٔ «اگر K یک کران بالای S باشد، آنگاه $K \geqslant 1$» باشد. قسمت اصلی برهان فوق مربوط به اثبات درستی P است. P را غلط فرض کردیم (یعنی فرض کردیم کران بالایی چون K برای S وجود دارد که $K < 1$) و با برهانی ساده به تناقض رسیدیم. اگر استدلال درست باشد، آنگاه P نمی‌تواند غلط باشد؛ لذا P باید درست باشد.

برای اینکه بتوانیم استدلالهایی با این ماهیت را به پیش ببریم و از درستیشان نیز مطمئن باشیم، باید از دو عامل اساسی مطمئن باشیم. اولاً گزارهٔ P (و همچنین همهٔ گزاره‌های دیگری که در استدلال مورد نظر مطرح می‌شوند) باید به‌روشنی درست یا به‌روشنی نادرست باشد (گرچه گاهی ممکن است صدق یا کذب آن برما معلوم نباشد). درمحاورهٔ روزمره به گفته‌هایی نظیر «تقریباً همهٔ رانندگان گاهی سرعت بیش از حد مجاز دارند» برمی‌خوریم. گفته‌هایی این چنین به‌کار برهان خلف نمی‌آیند. آیا به‌منظور رد این گفته کافی است تنها یک نفر پیدا شود که همیشه سرعت مجاز را رعایت می‌کند؟ آیا لازم است «تعداد قابل توجه‌ای» (معنای دقیقش هرچه باشد)، یا حتی اکثریتی، را بیابیم؟ زبان روزمرهٔ ما پر است از این نوع کلی گوییها که در اکثر موارد، ولی شاید نه همیشه، به‌طور مبهم درست هستند. اثبات ریاضی از مصالح غیرقابل نفوذتری درست می‌شود، و چنین کلی گوییهایی در آن مجاز نیست: کلیهٔ گزاره‌های مطرح شده باید به‌روشنی درست یا نادرست باشند.

دومین عامل اساسی در یک اثبات با برهان خلف این است که استدلالهایی که در آن به‌کار می‌روند باید بی‌نقص باشند. تنها اگر چنین باشد، می‌توانیم مطمئن باشیم که در اثبات با برهان خلف حلقهٔ نادرست در زنجیرهٔ برهان همان فرض اولیه است: P نادرست است.

یک لطیفهٔ قدیمی مربوط به سالن تأتر مضمونش چیزی شبیه این است:

هنرپیشهٔ کمدی: تو اینجا نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: چرند نگو، می‌بینی که هستم.

هنرپیشهٔ کمدی: تو اینجا نیستی، بهت ثابت می‌کنم... ببین در ابرقو که نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: نه نیستم.

هنرپیشهٔ کمدی: در قطب جنوب هم که نیستی.

هنرپیشهٔ جدی: البته که نیستم.

هنرپیشهٔ کمدی: اگر در ابرقو یا در قطب جنوب نیستی، پس باید جای دیگه‌ای باشی.

هنرپیشهٔ جدی: البته که جای دیگه‌ای هستم!

هنرپیشهٔ کمدی: خوب، اگر جای دیگه‌ای هستی، پس نمی‌تونی اینجا باشی!

با چنین استدلالی سرگرم می‌شویم و همه می‌توانیم عیب منطقی آن را ببینیم. ولی این امر برای مبتدیان در برهان ریاضی، بی‌اعتمادی عمیقی نسبت به استفاده از برهان خلف به‌وجود می‌آورد. شاید چیزی نظیر این، به‌تصادف یا تردستی، درمیان اثبات رخ دهد. آیا وقتی برای اولین‌بار با اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ مواجه شدید، بلافاصله و بدون هیچ شکی قانع شدید؟ این بی‌اعتمادی کاملاً بجاست: تنها راه برطرف کردن این بی‌اعتمادی اطمینان از بی‌عیب بودن منطق ریاضی است. بقیهٔ این فصل را به کاربرد دقیق زبان ریاضی و

اصطلاحات بنیادی درمنطق اختصاص می‌دهیم. و درفصل بعد به فنون اثبات ریاضی بازمی‌گردیم.

گزاره

به‌طوری‌که هم‌اکنون دیدیم، ضروراست هر گزاره‌ای‌که دریك‌اثبات ریاضی ارائه می‌شود به‌روشنی درست یا نادرست باشد.

چند نمونه عبارتند از:

(۱) $۲+۳=۵$.

(۲) کوچکترین کران بالای هرزیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{R}$ یکتاست.

(۳) کران بالایی چون K برای $S=\{x\in\mathbb{R}|x<۱\}$ وجود دارد که $K<۱$

(۴) $\sqrt{۲}$ گنگ است.

در اینجا (۱)، (۲)، و (۴) درست هستند، ولی (۳) نادرست است. در ریاضیات، طبعاً، بیشترمایلیم گزاره‌هایی راموردبحث قراردهیم که درست هستند، نه‌آنهایی را که نادرستند، ولی به‌دلیل وجود برهانهای خلف وامثال‌آن، فعلاً بهتراست‌که آمدن هردوطرف سکه را مجازبدانیم.

برای تمایز بین گزاره‌های درست ونادرست، به‌هرگزاره یك ارزش درستی (یا به‌طور ساده، ارزش) قایل می‌شویم وآن‌را با t یا f که حروف اول معادلهای انگلیسی «درست» و «نادرست» هستند، نمایش می‌دهیم:

$t=\text{true}$ ، $f=\text{false}$. این گفته که گزاره‌ای دارای ارزش t است، صرفاً بیان فانتزی این مطلب است که گزاره درست است.

اگر P گزاره‌ای مفروض باشد، جملهٔ «P نادرست است» نیز یك گزاره است‌که ارزش آن مخالف ارزش درستی P است. مثلاً، اگر P گزارهٔ نادرست «$۵=۲+۲$» باشد، آنگاه «$۵=۲+۲$ نادرست است» گزاره‌ای درست‌است. دراصطلاح منطق، گزارهٔ «P نادرست است» رامعمولاً به‌صورت

$$\neg P$$

می‌نویسند ومی‌خوانند «چنین نیست که P». گرچه ممکن‌است وقتی گزاره‌ای واقعی جانشین P می‌شود، جملهٔ حاصل ازنظردستوری درست نباشد، ولی این مناسبترین نماد مختصربرای بیان این مطلب است. درمثال فوق، «چنین نیست که P» را این‌طورمی‌خوانیم «چنین‌نیست که $۵=۲+۲$». البته گزاره‌هایی معادل مانند «$۵=۲+۲$ نادرست است» یا «$۵\neq۲+۲$»، خوش‌آهنگ‌تر هستند. مرسوم است وقتی گزارهٔ «چنین نیست که p» را با کلمات بیان می‌کنیم، عبارت رابه‌نحومناسبی چنان تغییردهیم که روانترخوانده شود.

گزاره نما

در ریاضی یک نوع خیلی مهم حکم گزاره نماست که در فصل ۳ معرفی شد. یادآوری می‌کنیم که گزاره نما جمله‌ای است شامل یک نماد، مانند x، به‌طوری که وقتی عضوی از مجموعه‌ای چون X را جانشین x می‌کنیم، آن جمله یا به‌روشنی درست است یا به‌روشنی نادرست. «عدد حقیقی x از ۱ کوچکتر نیست» نمونه‌ای از یک گزاره نمای ریاضی است. اگر این گزاره نما را با $P(x)$ نمایش دهیم، آنگاه $P(۲)$ درست است، $P(۰)$ نادرست است، $P(\pi/۴)$ نادرست است، و الی آخر؛ اگر ارزش $p(a)$ را به‌ازای هر $a\in\mathcal{R}$ بیابیم یک تابع ارزش $T_P:\mathcal{R}\to\{t,f\}$ به‌دست می‌آوریم که در آن $T_P(a)=t$ اگر $P(a)$ درست باشد، و $T_P(a)=f$ اگر $P(a)$ نادرست باشد.

این امر به‌نحو جالبی با ایده‌های مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها هماهنگی دارد. گزاره نمای $P(a)$، $\mathcal{R}$ را به‌دو زیرمجموعهٔ جدا ازهم افراز می‌کند، یکی شامل اعضایی است که به‌ازای آنها $P(x)$ درست‌است، و دیگری شامل اعضایی که به‌ازای آنها $P(x)$ نادرست است. مجموعهٔ اول را در نمادگذاری متداول با $\{x\in\mathcal{R}\mid P(x)\}$ نمایش می‌دهیم. مثلاً، $\{x\in\mathcal{R}\mid x\geqslant ۱\}$ مربوط به‌حالتی است که هم‌اکنون توصیف شد. مجموعهٔ دیگر به‌صورت $\{x\in\mathcal{R}\mid \neg P(x)\}$ نوشته می‌شود و در مورد مثال فوق مجموعهٔ $\{x\in\mathcal{R}\mid x<۱\}$ است.

این مثال آنچه را که در حالت کلی اتفاق می‌افتد نشان می‌دهد. به‌ازای هر گزاره‌نمای $P(x)$، یک تابع ارزش مانند فوق به‌دست می‌آید. آنگاه، به‌ازای $a\in S$، داریم

$a\in\{x\in S\mid P(x)\}$ اگر و فقط اگر $P(a)$ درست باشد،

$a\in\{x\in S\mid \neg P(x)\}$ اگر و فقط اگر $P(a)$ نادرست باشد.

به‌جای استفاده از عبارات مبهمی چون «گزاره‌نما نوعی گزاره است که...» می‌توانیم از ایدهٔ «تابع ارزش» استفاده کنیم و با کمک نظریهٔ مجموعه‌ها هم تعریفی ارائه نماییم. ابتدا می‌توانیم با این تعریف شروع کنیم که «هر تابع ارزش T_P روی مجموعه‌ای چون S تابعی است مثل $T_P:S\to\{t,f\}$». سپس چنین تعریف کنیم که «گزاره‌نمای $p(x)$ متناظر با T_P جمله‌ای است معادل با '$T_P(x)=t$'». تنها اشکال این روش این است که گزاره نماهای به‌ظاهر متفاوت توابع ارزش مساوی دارند:

$P_۱(x)$: «x یک کران بالای $\{s\in\mathcal{R}\mid s<۱\}$ است»،

$P_۲(x)$: «$x\geqslant ۱$».

اثبات اینکه چنین گزاره نماهایی معادل هستند (یا، کلی‌تر بگوییم، درستی هر یک درستی دیگری را ایجاب می‌کند)، کار اصلی ریاضیدانان را تشکیل می‌دهد. بنابراین گزاره‌نماهایی که ریاضیدانان در کار خود مورد استفاده قرار می‌دهند ساختی دارند که هم‌اکنون شرح آن گذشت. (برای توضیح این مطلب به‌خواننده، مؤلفین تقریباً در موقعیتی هستند که رنگ را تنها با اشاره کردن به‌چیزی و گفتن اینکه «این آبی است» توضیح بدهند. خوانندگان در موقعیت بهتری هستند: آنها تجربهٔ ریاضی نسبتاً زیادی دارند و لذا قادرند وقتی گزاره‌ای را می‌بینند آن را تشخیص بدهند!)

اگر درجمله‌ای بیش از یک متغیر وجود داشته باشد، می‌توانیم بحث «گزاره‌نمای با دومتغیر»، یا با «سه متغیر»، وغیره را مطرح کنیم. مثلاً، جملهٔ «$x>y$» یک گزاره نمای با دومتغیراست (که آن را با $Q(x,y)$ نمایش می‌دهیم). اگر اعدادی حقیقی را جانشین x و y کنیم، یک گزاره به‌دست می‌آوریم. $Q(۳,۲)$ درست‌است، و $Q(۷\frac{۱}{۴}, ۱۰+\sqrt{۲})$ نادرست است. در اینجا تابع ارزش را می‌توانیم به صورت $T_Q:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\{t,f\}$ درنظر بگیریم که در آن $T_Q(x,y)=t$ اگر $Q(x,y)$ درست باشد، و $T_Q(x,y)=f$ اگر $Q(x,y)$ نادرست باشد.

به‌همین نحو می‌توانیم «$x^۲+y^۲=z$» را یک گزاره‌نمای باسه متغیر $x,y,z\in\mathbb{R}$ در نظر بگیریم که آن را با $R(x,y,z)$ نمایش می‌دهیم. تابع ارزش آن $T_R:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\{t,f\}$ است، که در آن

$$T_R(x,y,z)=\begin{cases} t & \text{اگر } x^۲+y^۲=z \\ f & \text{اگر } x^۲+y^۲\neq z \end{cases}$$

درعمل، برخی از ریاضیدانان مجموعه‌ای راکه گزاره به آن اشاره دارد همیشه به‌طور صریح ذکر نمی‌کنند وفرض می‌کنند که ازفحوای کلام مشخص است. مثلاً، بدیهی است که گزارهٔ «$x>۳$» درمورد اعداد حقیقی است. فرض براین است که کسی تصور هم نمی‌کند چیزی راجانشین x کند که معنی نداشته باشد. به‌همین نحو، برای صرفه جویی در وقت، قراردادی است که همواره برای نمایش اعضایی ازمجموعه‌های مشخصی ازحروف معینی استفاده شود. مثلاً، n معمولاً برای نمایش عددی طبیعی به‌کارمی‌رود. از این‌رو، گزاره نمای «$n>۳$» را درمورد اعداد طبیعی درنظرمی‌گیرند. قبلاً هم مواردی از این قرارداد را دراین کتاب دیده‌ایم، مثلاً درتعریف همگرایی درصفحهٔ ۳۵ نوشتیم که:

دنباله‌ای چون (a_n) از اعداد حقیقی به‌حدی مانند l میل می‌کند اگر به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ عددی طبیعی چون N وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $n>N$، $|a_n-l|<\varepsilon$.

درهیچ کجای این‌تعریف به‌طورصریح ذکر نشده است که n عددی طبیعی است، ولی این به‌وضوح ازفحوای کلام پیداست. گرچه درابتدا ممکن است استفاده ازاین‌قرارداد مبین اندکی شلختگی درشیوه باشد، ولی دلیل خوبی برای‌آن وجود دارد. درریاضیات، هرچه صریحترصحبت شود به‌همان اندازه به‌نمادهای بیشتری نیازاست. طولانی‌کردن نوشته، آن چنان صفحه را ازنمادها وعلایم انباشته می‌کندکه درک معنی اصلی مطلب، به دلیل حجم زیاد جزئیات، مشکل می‌شود. بنابراین‌انتخاب نمادگذاری مناسب که مفاهیم را تاحدامکان واضح ومختصر بیان کند، به‌سلیقه وشیوهٔ ریاضی‌نویسی نویسنده مربوط می‌شود.

هر و بعضی

اگر گزاره نمای مفروض $P(x)$ به‌ازای‌اعضای مجموعه‌ای چون S بامعنی باشد، می‌توانیم

جویا شویم که آیا به‌ازای همهٔ اعضای S درست، یا آنکه به‌ازای حداقل بعضی از اعضای S درست است. دراین صورت می‌توانیم گزاره‌های «به ازای همهٔ اعضای $x \in S$، $P(x)$ درست است» و یا «به‌ازای بعضی از اعضای $x \in S$، $P(x)$ درست است» را بسازیم. این گزاره‌ها می‌توانند گزاره‌هایی درست یا نادرست باشند. این گزاره‌ها را می‌توانیم با استفاده از علامتهایی موسوم به «سورعمومی» $\forall$ و «سوروجودی» $\exists$ به‌صورت نمادهای ریاضی هم بنویسیم.

$\forall x \in S : P(x)$، را می‌خوانیم «به‌ازای همهٔ اعضای $x \in S$، $P(x)$».

$\exists x \in S : P(x)$، را می‌خوانیم «(دست‌کم) یک $x \in S$ وجود دارد که $P(x)$».

اگر گزاره نمای $P(x)$ به ازای همهٔ اعضای $x \in S$ درست باشد، آنگاه گزارهٔ $\forall x \in S : P(x)$ درست است، ودرغیراین صورت نادرست. ازسوی دیگر، هرگاه $P(x)$ به‌ازای دست‌کم یک $x \in S$ درست باشد، آنگاه گزارهٔ $\exists x \in S : P(x)$ درست است، و درغیراین صورت نادرست. نماد $\forall x \in S : P(x)$ را می‌توانیم به صورت «به ازای همهٔ $x \in S$، $P(x)$» یا «به‌ازای هر $x \in S$، $P(x)$» یا با هرجمله‌ای که از لحاظ دستوری معادل آنها باشد، بخوانیم. به‌همین نحو گزارهٔ $\exists x \in S : P(x)$ را می‌توانیم به صورتهای گوناگونی چون «xی در S هست که $P(x)$»، «به ازای بعضی از $x \in S$، $P(x)$» وغیره بخوانیم.

قابل تذکر است که گزارهٔ «به ازای بعضی از $x \in S$، $P(x)$» دارای این معنای ضمنی نیست که عضوی مانند $x \in S$ هست که به‌ازای آن $P(x)$ نادرست است. در زبان محاوره‌ای، در گفته‌ای نظیر

«بعضی از سیاستمداران صالح هستند»

این معنا مستتر است که سیاستمدارانی هم هستند که صالح نیستند. گزاره‌های ریاضی دارای چنین تعبیرهایی نیستند. گزارهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم:

«بعضی‌ازاعداد ۳۶۷۷، ۶۰۱، ۱۹، ۲۵۷، ۱۱۱۱۹، ۷۵۵۹، ۱۲۶۵۳ اول هستند»

به‌سهولت دیده می‌شود که ۱۹ اول است، ولذا این گزاره درست است. بااین حقیقت که همهٔ اعداد دیگرهم اول هستند این حکم بی‌اعتبارنمی‌شود. ازطرف دیگر، «بعضی» ممکن است معنی تنها یکی را داشته باشد؛ مثلاً گزارهٔ

«بعضی ازاعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ زوج هستند»

راگزاره‌ای درست تلقی می‌کنیم. این امر بررسی درستی $\exists x \in S : P(x)$ را بسیارساده می‌کند: تنها کافی است یک مقدار برای x پیدا کنیم که به‌ازای آن $P(x)$ درست باشد.

چند مثال. (۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ به‌این‌معنی‌است که «به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x^2 \geqslant 0$» یا «مربع هرعدد حقیقی، نامنفی است» یا جملات دیگری که ازلحاظ دستوری معادل اینها باشند. این گزاره صادق است.

(۲) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \geqslant 0$ را می‌خوانیم «xی در $\mathbb{R}$ هست که $x^2 \geqslant 0$» یا «عددی حقیقی وجود دارد که مربع آن نامنفی است». این نیز درست است.

(۳) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$ نادرست است (زیرا $0^2 \not> 0$).

(۴) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$ درست‌است (زیرا $1^2 > 0$. دراین موردعلاوه بر اعضای بسیار دیگری هم در $\mathbb{R}$ وجود دارند که این مطلب را نشان می‌دهند.)

(۵) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$ نادرست است.

اگر نماد x درسراسر یك گزاره سوردار را با نماد دیگری عوض کنیم، آنگاه گزارهٔ جدید را معادل گزارهٔ قبلی تلقی می کنیم.

$\exists x \in S: P(x)$ همان معنی $\exists y \in S: P(y)$ را دارد.

$\forall x \in S: P(x)$ همان معنی $\forall y \in S: P(y)$ را دارد.

مثلاً، $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 > 0$ معادل $\exists y \in \mathbb{R}: y^2 > 0$ است. هردو گزاره بیان می کنند که «عددی حقیقی وجود دارد که مربع آن مثبت است».

بیش ازیك سور

اگر گزاره نمایی باداویا بیشترمتغیر دردست باشد، آنگاه می‌توانیم برای هرمتغیریك سور به کار ببریم. مثلاً، اگر $P(x, y)$ گزاره نمای «$x+y=0$» باشد، آنگاه گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: P(x, y)$ را می‌خوانیم «به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، یك y در $\mathbb{R}$ هست که $x+y=0$». درمنطق، متداول است که همهٔ سورها را درجلوی گزاره نما بگذاریم وآنها را به‌همان ترتیب نوشته شده بخوانیم؛ مثلاً، $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: P(x, y)$ را می‌خوانیم «یك y در $\mathbb{R}$ هست که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x+y=0$». رعایت ترتیب مهم‌است. از دو گزارهٔ فوق، $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: P(x, y)$ درست است (زیرا به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، می‌توانیم $y=-x$ اختیارکنیم که $x+y=0$ به دست آید)، ولی $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: P(x, y)$ نادرست است، زیرا این گزاره ازوجود یك y در $\mathbb{R}$ خبر می‌دهد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، در $x+y=0$ صدق می کند. هیچ مقداری از y چنین خاصیتی ندارد. تشخیص صحیح ترتیب سورها دراین نوع گزاره‌ها، یك بخش اساسی از تفکر ریاضی صحیح است. نادرست تشخیص دادن ترتیب یك اشتباه معمول است (ومختص مبتدیان هم نیست). یکی ازموارد بروز این مسئله وقتی است که بخواهیم گزاره‌ای راکه احتمالاً ازلحاظ منطقی روشن است با زبان خشك ریاضی بیان کنیم. ترتیب کلمات را، گاهی به‌قیمت‌ازدست دادن وضوح منطقی، طوری تغییرمی‌دهیم که جمله‌ای خوش آهنگ‌تر به‌دست‌آید. به‌خصوص به‌جای اینکه همهٔ سورها را دراول جمله بیاوریم، آنها را درمیان جمله درج می کنیم. (ما قبلاً، درچند سطر بالاتر، وقتی که نوشتیم «... این گزاره از وجود یك y در $\mathbb{R}$ خبرمی‌دهد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، در $x+y=0$ صدق می کند» خود نیزاین کاررا کردیم!) گزارهٔ زیررا درنظرمی گیریم:

«هرعددگویای ناصفریك وارون‌گویا دارد».

منظوراز این گزاره این‌است که «اگر $x \in \mathbb{Q}$، و $x \neq 0$، مفروض باشد، عضوی مانند $y \in \mathbb{Q}$ وجود دارد که $xy = 1$». این گزاره البته درست است: اگر $x = p/q$ که در آن p و q اعداد صحیح هستند و $p \neq 0$، $q \neq 0$، آنگاه $y = q/p$. این گزاره را به زبان منطق چنین می‌نویسیم:

$$\text{«}\forall x \in \mathbb{Q}\,(x \neq 0)\ \exists\, y \in \mathbb{Q} : xy = 1\text{»}.$$

یك ریاضیدان ممکن است برای نقل همان ایده ترتیب کلمات را عوض کند و بگوید «یك وارون گویا به‌ازای هرعددگویای ناصفروجود دارد» البته بیان این گونه گزاره‌ها می‌تواند باعث سوء تعبیرهم بشود. اگر دقت شودکه معنای ریاضی مکتوب تا حد امکان روشن و صریح باشد، به‌حل مشکل کمك می‌شود.

تنها هنگامی درنوشتن گزاره‌ها ابهام رخ می‌دهدکه سورهای به‌کار رفته متفاوت باشند. اگرسورها ازیك نوع باشند، چنین مسئله‌ای وجود ندارد. مثلاً، اگر گزاره نمای $P(x,y)$: «$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» مفروض باشد، آنگاه هردو گزارهٔ

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : P(x, y)$$

و

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : P(x, y)$$

به‌معنی «به ازای هر x و y در $\mathbb{R}$، $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» خواهند بود، ومسلماً درست. اگرمتغیرهای مورد بحث نظیرمورد فوق ازیك مجموعه باشند معمولاً نمادگذاری راساده می‌کنیم ومی‌نویسیم $\forall x, y \in \mathbb{R} : P(x, y)$. همین مطالب برای سوروجودی نیز برقرارند. مثلاً، اگر $Q(x, y)$ عبارت «x وy گنگ هستندو $x+y$ گویا» باشد،آنگاه

$$\exists y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : Q(x,y) \quad \text{و} \quad \exists x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : Q(x, y)$$

هردو بیان می‌کنندکه «دوعدد حقیقی x و y وجود دارندکه گنگ هستند ولی مجموع آنها گویاست». (این گزاره درست است، زیرا $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ گنگ هستند، ولی ۰ گویاست). این گزاره را می‌توان چنین نیز نوشت $\exists x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : Q(x, y)$.

یك خطر جزئی‌دیگرهم درریاضی مکتوب وجود دارد وآن‌این‌است‌که سورعمومی همیشه به‌طورصریح نوشته نمی‌شود؛ وغالباً باید ازفحوای کلام استنباط شود. نگاهی‌دیگر به‌تعریف همگرایی دنباله درصفحهٔ ۳۵ بیفکنیم:

یك دنباله از اعداد حقیقی به حدی مانند l میل می‌کند اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی طبیعی چون N وجود داشته باشد به طوری‌که به‌ازای هر $n > N$، $|a_n - l| < \varepsilon$.

این جمله بیش ازحد لازم طولانی است و ریاضیدانان سعی می‌کنند به‌طریقی این

گزافه‌گویی را تـا حد امکان کوتاه کنند. یکی از کلمات کوچکی که حـذف می‌شود «هر» است. یك بیان متداول برای تعریف $a_n \to l$ این‌است که:

بافرض $\varepsilon > 0$، Nی هست که $n > N$ ایجاب می‌کند $|a_n - l| < \varepsilon$.

بااندکی تفاوت، بیانهای دیگری هم برای این تعریف وجود دارند، ولی دراصل همهٔ آنها به یك معنا هستند. اگراین مطلب را درك کنید، دردرك ماهیت مسئلهٔ تفاهم مطالب ریاضی با دقتی مناسب، قدم بزرگی برداشته‌اید.

نقیض یك گزاره

درصفحهٔ ۱۲۳ نقیض گزارهٔ P را، که با $\neg P$ نمایش داده می‌شود، معرفی کردیم. ارزش $\neg P$ را می‌توان درجدول زیر (به‌نام جدول ارزش) نشان داد:

P	$\neg P$
t	f
f	t

بامطالعهٔ هرسطر، این‌جدول صرفاً بیان می‌کندکه وقتی P درست باشد، $\neg P$ نادرست است، وبرعکس. نماد $\neg$ ناقض نامیده می‌شود زیرا باتغییرمعنی وارزش، گزاره راعوض می‌کند.

به همین نحو بااستفاده از $\neg$ می‌توان نقیض یـك گزاره‌نما را به‌دست آورد. اگر $P(x)$ گزاره نمای «$x > ۵$» باشد، آنگاه $\neg P(x)$ گزاره نمای «$x > ۵$ نادرست است»، یا به‌طورمعادل «$x \not> ۵$»، است.

نقیض یك گزارهٔ شامل سور مارا به مورد جالبی رهنمون می‌کند. به‌آسانی دیـده می‌شودکـه «$\forall x \in S : P(x)$ نـادرست است» چیزی نیست جز «$\exists x \in S : \neg P(x)$». (اگراین مطلب نادرست باشدکه $P(x)$ به ازای هر $x \in S$ درست است، آنگاه باید xی در S وجود داشته باشدکـه به ازای‌آن $P(x)$ نادرست، ودرآن صورت $\neg P(x)$ درست باشد.) این‌مطلب را می‌توان با استفاده ازنمادها چنین نوشت:

$$\neg \forall x \in S : P(x) \quad \text{هم معنی} \quad \exists x \in S : \neg P(x) \quad \text{است.} \qquad (۱)$$

همچنین

$$\neg \exists x \in S : P(x) \quad \text{هم معنی} \quad \forall x \in S : \neg P(x) \quad \text{است.} \qquad (۲)$$

جملهٔ دوم بیان می‌کندکـه وقتی می‌گوییم «هیچ xی وجود نداردکـه به‌ازای آن $P(x)$ درست باشد» مثل این‌است که بگوییم «به‌ازای هر $x \in S$، $P(x)$ نادرست‌است».

به‌عنوان مثالی ازمورد (۲)، داریم:

$$\neg\exists x\in\mathbb{R}: x^2<0 \quad \text{. . . هیچ } x\text{ی در } \mathbb{R} \text{ نیست که } x^2<0.$$

$$\neg(x^2<0) \quad \text{. . . هر } x\in\mathbb{R}\text{، در } x^2\not<0 \text{ صدق می‌کند.}$$

این دواصل‌ساده دراستدلال ریاضی ازاهمیتی اساسی برخوردارند. روشنتر بگوییم، اولی بیان می‌کند «برای اینکه نشان دهیم گزاره نمای $P(x)$ به ازای هـر $x\in S$ درست نیست، کافی است xی بیابیم کـه به ازای آن $P(x)$ نادرست باشد». دومی حکم می‌کند «برای‌اینکه نشان دهیم هیچ xی در S نیست‌که به‌ازای‌آن $p(x)$ درست باشد، لازم است ثابت‌کنیم‌که به‌ازای هر $x\in S$، $P(x)$ نادرست‌است».

قاعدهٔ عملی فوق برای به‌دست‌آوردن نقیض جمله‌های سوردارهنگامی ارزش‌واقعی خود را نشان می‌دهدکـه چندین سور درکار باشند. مثالی از این نوع، تعریف همگرایی دنباله‌هاست‌که درنمادگذاری منطقی چنین است:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathcal{N}\ \forall n>N(|a_n-l|<\varepsilon).$$

برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ (a_n) به حد l میل نمی‌کند، بـاید درستی نقیض این‌گزاره، یعنی

$$\neg[\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathcal{N}\ \forall n>N(|a_n-l|<\varepsilon)],$$

را ثابت‌کنیم. بااستفاده ازاصول (۱) و (۲)، این‌گزاره متوالیاً چنین می‌شود؛

$$\exists\varepsilon>0\ \neg[\exists N\in\mathcal{N}\ \forall n>N(|a_n-l|<\varepsilon)]$$

وسپس

$$\exists\varepsilon>0\forall N\in\mathcal{N}\ \neg[\forall n>N(|a_n-l|<\varepsilon)],$$

وآنگاه

$$\exists\varepsilon>0\forall N\in\mathcal{N}\ \exists n>N\ \neg(|a_n-l|<\varepsilon)$$

که سرانجام به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\exists\varepsilon>0\forall N\in\mathcal{N}\ \exists n>N(|a_n-l|\not<\varepsilon).$$

برای‌اینکه ثابت‌کنیم (a_n) به l میل نمی‌کند، باید ثابت‌کنیم‌که گزارهٔ آخر درست است، یعنی باید نشان دهیم εی مثبت هست‌کـه به ازای هرعـدد طبیعی N همیشه عـدد طبیعی بزرگتری از آن چون n وجود داردکه $|a_n-l|\not<\varepsilon$. بیشتر دشواری درموضوعی چون آنالیز ریاضی سروکار داشتن باگزاره‌هایی ازاین قبیل است. باکمی تجربه وتمرین وبـا همواره به‌خاطرسپردن سورها می‌توان بردشواری فایق آمد.

دستورمنطقی: رابطها

درریاضیات ازحروف ربط استانده مانند «و»، «یا»، وغیره بامعانی کاملاً خاصی استفاده می‌کنیم. مثلاً، «یا» را به‌معنی «شمولی» آن به‌کار می‌بریم. منظوراین است که اگر P و Q دو گزارهٔ مشخصی باشند، آنگاه P یا Q گزاره‌ای است که آن را درست می‌دانیم هرگاه یکی یا هردوگزارهٔ P و Q درست باشند. این مطلب را می‌توان باجدول ارزش‌زیر نشان داد:

P	Q	$P \vee Q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

جدول را درسطرهای افقی‌آن می‌خوانیم. مثلاً، سطردوم بیان می‌کندکه اگر P درست و Q نادرست باشد، آنگاه P یا Q درست است.

حروف ربط دیگری‌که در ریاضیات دائماً به‌کار می‌روند عبارتند از «و»، «دلالت دارد بر»، و «اگروفقط اگر». به‌این حروف ربط نمادهای مناسبی هم نسبت داده می‌شود: $\&$ (و)، $\Rightarrow$ (دلالت دارد بر)، $\Longleftrightarrow$ (اگروفقط اگر). جداول ارزش آنها به صورت زیراست:

P	Q	$P \& Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

P	Q	$P \Rightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

این جداول نیزبه‌همان صورت فوق خوانده می‌شوند. اولی وآخری نسبتاً واضح هستند. $P \& Q$ را تنها وقتی درست می‌دانیم که P و Q هردو درست باشند، $P \Longleftrightarrow Q$ را تنها وقتی درست می‌دانیم که ارزش P و Q مساوی باشند. جالب توجه جدول $P \Rightarrow Q$ است. اگر P درست باشد، آنگاه سطرهای اول و دوم بیان می‌کنندکه استلزام $P \Rightarrow Q$ درست

است درصورتی که Q نیزدرست باشد، ونادرست‌است درصورتی که Q نادرست باشد. این امرنشان می‌دهدکه درستی $P \Rightarrow Q$ به‌این معنی است‌که اگر P درست باشد، آنگاه Q نیزباید درست باشد. این همان تعبیرعادی علامت استلزام $\Rightarrow$ است، وبه‌این‌دلیل $P \Rightarrow Q$ اغلب به‌صورت «اگر P، آنگاه Q» تعبیرمی‌شود.[۱] ولی درحالتی‌که P نادرست باشد چی؟ سطرهای سوم وچهارم بیان می‌کنندکه چه Q درست باشد و چه نادرست، $P \Rightarrow Q$ را درست می‌دانیم. فلسفه بافیهای بسیاری درمورد این مطلب وجود دارد. «چطورنادرستی P می‌تواند دلالت بردرستی Q باشد؟» دلیل این امررا می‌توان دراستفادهٔ متعارف ریاضیات از رابطها، در ارتباط با گزاره نماها به جای گزاره‌ها، دید. اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دوگزاره نمای هردو درست به‌ازای $x \in S$ باشند، آنگاه بااستفاده ازرابطها به‌شیوهٔ فوق، می‌توان گزاره‌نماهایی چون $P(x) \vee Q(x)$ ، $P(x) \,\&\, Q(x)$، و غیره را به دست آورد. به خصوص گزاره نمای $P(x) \Rightarrow Q(x)$ با همان جدول ارزش فوق را هم داریم. گاهی گزاره نمای $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به ازای همهٔ $x \in S$ درست است. دراین حالت است‌که این جدول، ارزش خودرا نشان می‌دهد. مثلاً، هرگاه $P(x)$ گزاره نمای «$x > ۵$» و $Q(x)$ گزاره نمای «$x > ۲$» باشد، آنگاه همهٔ ریاضیدانان دراین نکته اتفاق نظردارند که $P(x) \Rightarrow Q(x)$ درست است، البته بعضی این گزاره‌نما را چنین می‌خوانند «اگر $x > ۵$، آنگاه $x > ۲$»، وعلاقه‌ای‌هم به‌آنچه‌که درحالت $x \not> ۵$ رخ می‌دهد ندارند. حال مقادیر مختلفی به‌جای x می‌گذاریم ونتیجه را بررسی می‌کنیم:

اگر $x = ۴$، آنگاه $P(۴)$ نادرست‌است و $Q(۴)$ درست.

اگر $x = ۱$، آنگاه $P(۱)$ نادرست‌است و $Q(۱)$ هم نادرست.

اینها، دقیقاً سطرهای سه وچهار جدول ارزش «$\Rightarrow$» هستند، ونشان می‌دهندکه این جدول ارزش چگونه به‌دست می‌آید. با این تعبیر، این جدول ارزش را می‌توان به‌صورت زیر به‌وجه بهتری توصیف کرد:

«$P \Rightarrow Q$ درست است»

به‌این معنی‌که

(الف) «اگر P درست باشد، آنگاه Q نیزباید درست باشد»،

ولی

(ب) «اگر P نادرست باشد، آنگاه Q ممکن است درست یا نادرست باشد، ودر

---

۱. جدولی‌که مؤلف برای گزارهٔ $P \Rightarrow Q$ درنظرگرفته‌است برای گزارهٔ شرطی «اگر P آنگاه Q» به‌کار می‌رودکه P مقدم نام دارد و Q تالی آن. حال آنکه از نماد $P \Rightarrow Q$ تنها موقعی استفاده می‌شودکه گزارهٔ شرطی $P \Rightarrow Q$ همواره درست (یعنی بنا به تعریف صفحهٔ ۱۳۹ یك توتولوژی) باشد، که در این صورت درستی P باید درستی Q را ایجاب کند. نماد $\Rightarrow$ با این معنا «استلزام» نامیده می‌شود. همین تذکر در مورد گزارهٔ دوشرطی $P \Leftrightarrow Q$ نیز صادق است و رابطهٔ آن با $P \Leftrightarrow Q$.—م.

این حالت هیچ حکمی نمی‌توان کرد».

رابطهای دیگری نیز وجود دارند مثلاً «یای مانع جمع» (که در اینجا با $\underline{\vee}$ نمایش داده می‌شود) با جدول ارزش:

P	Q	$P \underline{\vee} Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	f

$P \underline{\vee} Q$ درست است درصورتی که یکی از دو گزارهٔ P یا Q، ولی نه هردو باهم، درست باشند.

اصولاً می‌توان جدولهای ارزش رابطهای دیگر را نیز نوشت، ولی این جدولها را می‌توان از ترکیب جدولهای ارزش قبلی به‌دست آورد. مثلاً، یای مانع جمع موجود در گزارهٔ $P \underline{\vee} Q$ را می‌توان با استفاده از گزارهٔ $(P \vee Q) \& \neg (P \& Q)$ نیز توصیف کرد. این مطلب را با تفصیل بیشتر در بخش «فرمولهای گزاره‌های مرکب» مورد بحث قرار خواهیم داد.

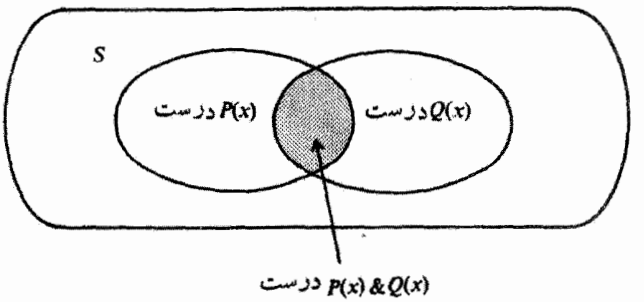
ریاضیدانان برای نوشتن مطالب ریاضی، از نظر شیوهٔ نگارش خود را به‌استفاده از رابطهایی که هم اینک توصیف شد محدود نمی‌کنند. آنها بنا به‌سلیقه از رابطهای دستوری نظیر «ولی»، «چون»، «زیرا» و غیره هم استفاده می‌کنند. این رابطها را باید به همان معانی دستوری کلمات داده شده تعبیر کرد. مثلاً، جدول ارزش «P ولی Q» همان جدول ارزش «$P \& Q$» است. گزارهٔ «$\sqrt{۲}$ گنگ است ولی $(\sqrt{۲})^{۲}$ گویاست» همان معنی را دارد که «$\sqrt{۲}$ گنگ است و $(\sqrt{۲})^{۲}$ گویاست». به همین ترتیب «P زیرا Q» و «P چون Q» همان جدول ارزش «$Q \Rightarrow P$» را دارند. خوانندگان می‌توانند با بررسی چند مثال خود را با این مترادفها مأنوس سازند. (تمرینهای آخر فصل را ملاحظه کنید.)

ارتباط با نظریهٔ مجموعه‌ها

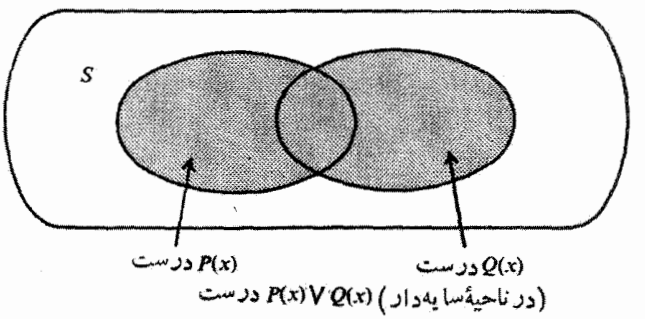
اگر رابطها و ناقض $\neg$ را بر گزاره نماهای یک متغیری اعمال کنیم، آنگاه در ارتباط با نمادگذاری نظریهٔ مجموعه‌ها رابطهٔ ساده‌ای به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو گزاره نمای معتبر روی مجموعه‌ای چون S باشند و به زیرمجموعه‌هایی توجه کنیم که

درمورد آنها ترکیبهای گوناگونی ازاین گزاره‌ها درست هستند. به‌ازای «&» داریم:

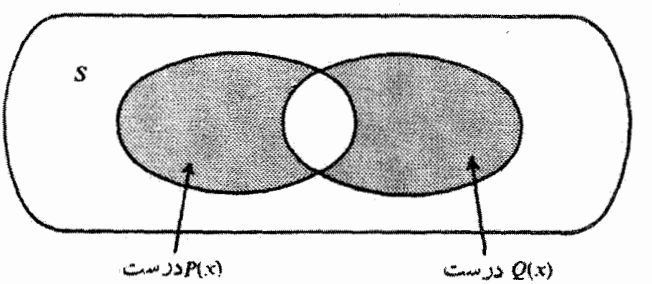
$$\{x \in S | P(x) \,\&\, Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cap \{x \in S | Q(x)\}$$



همچنین $\{x \in S | P(x) \vee Q(x)\} = \{x \in S | P(x)\} \cup \{x \in S | Q(x)\}$

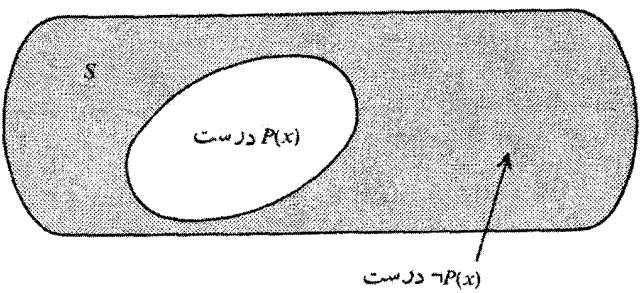


این یکی از دلایلی است که «$\vee$ یای شمولی» را در تناظر با اجتماع مجموعه‌ها به‌کار می‌بریم و نه «$\underline{\vee}$ یای مانع جمع» را که در تناظر با چیزی است که در نظریهٔ مجموعه‌ها «تفاضل متقارن» نامیده و با ناحیهٔ سایه‌دار نمودار زیر نمایش داده می‌شود:



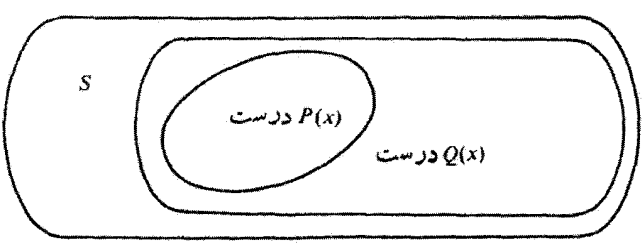
اعمال ناقض ¬ بر تنها گزاره نمای $P(x)$ متناظر است با عمل متمم‌گیری در نظریهٔ مجموعه‌ها:

$$\{x \in S | \neg P(x)\} = S - \{x \in S | P(x)\}.$$



هنگام بررسی استلزام $P(x) \Rightarrow Q(x)$ با اندك تفاوتی به‌وضعیت نگاه می‌کنیم. ما درواقع تنها به موردی علاقه‌مندیم که $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به‌ازای همهٔ xها درست باشد. در این مورد، اگر $P(x)$ درست باشد، $Q(x)$ نیز باید درست باشد، یعنی اگر $a \in \{x \in S \mid P(x)\}$ آنگاه $a \in \{x \in S \mid Q(x)\}$ که به این معنی است که $\{x \in S | P(x)\} \subseteq \{x \in S | Q(x)\}$. درستی گزارهٔ $P(x) \Rightarrow Q(x)$ متناظر است با شمول مجموعه‌ها[1]:

درستی $P(x) \Rightarrow Q(x)$ به‌ازای همهٔ $x \in S$:



به‌همین ترتیب $P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$ به‌ازای هر $x \in S$ درست است اگروفقط اگر

$$\{x \in S | P(x)\} = \{x \in S | Q(x)\}.$$

---

۱. یکبار دیگر پانوشت صفحهٔ ۱۳۲ مطرح می‌شود. $P(x) \Rightarrow Q(x)$ تنها وقتی نظیر شمول مجموعه‌هاست که سطر اول جدول مذکور درصفحهٔ ۱۳۱ برای $\Rightarrow$ مورد نظر باشد. ــ م.

فرمول گزاره‌های مرکب

با استفاده از رابطها و ناقض‌ها می‌توان از گزاره‌ها و گزاره نماهای مفروضی گزاره‌ها و گزاره‌نماهای پیچیده‌تری به‌دست آورد، مثلاً، $(P \,\&\, Q) \vee R$. این گزاره شامل سه گزاره است وجدول ارزشش $۸ = ۲^۳$ سطر دارد:

محاسبهٔ میانی

P	Q	R	$P \,\&\, Q$	$(P \,\&\, Q) \vee R$
t	t	t	t	t
t	t	f	t	t
t	f	t	f	t
t	f	f	f	f
f	t	t	f	t
f	t	f	f	f
f	f	t	f	t
f	f	f	f	f

توجه دارید که نماد «$(P \,\&\, Q) \vee R$» درواقع دستورالعملی برای تشکیل گزاره یا گزاره نمای جدیدی است از سه گزاره یا گزاره نمای مفروض. برای تأکید براین مطلب، وقتی که P، Q، و R گزاره یا گزاره نماهای نامشخصی باشند آن را یك فرمول گزاره‌ای مرکب می‌نامیم. هرگاه گزاره‌های مشخصی به‌جای P، Q، و R قرار گیرند، مثلاً

$$(۲ > ۳ \,\&\, ۲ > ۶) \vee (۲ > ۱),$$

به آن نام گزارهٔ مرکب می‌نهیم. وهمچنین هرگاه از گزاره نماهای مشخصی استفاده کنیم، آن‌را یك گزاره نمای مرکب می‌نامیم. مثلاً

$$(x > ۳ \,\&\, x > ۶) \vee (x > ۱)$$

یك گزاره نمای مرکب است.

قسمت قابل ملاحظه‌ای ازهر اثبات ریاضی متضمن کلنجار رفتن با گزاره‌ها و گزاره‌نماهای مرکب است. هنگام تشکیل این فرمولها، غالباً برای نمایش چگونگی ساخت آنها، استفاده از پرانتز الزامی است. مثلاً، $P \,\&\, (Q \vee R)$ با $(P \,\&\, Q) \vee R$ فرق دارد. درواقع، باتوجه به‌سطرهفتم جدول ارزش فوق داریم: اگر P نادرست، Q نادرست، و R درست باشد، آنگاه $(P \,\&\, Q) \vee R$ درست است؛ ولی محاسبه نشان می‌دهدکه دراین‌حالت $P \,\&\, (Q \vee R)$ نادرست است. این مطلب درمورد گزاره نماها نیزصادق است. لذا هرگاه

امکان اشتباه وجود داشته باشد، باید دقت شود که پرانتزها در جای مناسب قرار گیرند. (گاهی حذف پرانتز مجاز است. مثلاً، $(P \& Q) \& R$ همان جدول ارزش $P \& (Q \& R)$ را دارد، ولذا اگر بنویسیم $P \& Q \& R$ مسئله‌ای ایجاد نمی‌شود).

در تشکیل فرمولهای گزاره‌ای مرکب با استفاده از چند رابط و نقاض، اغلب به فرمولهایی دست می‌یابیم که ظاهراً باهم فرق دارند، ولی جدول ارزششان یکسان است. مثلاً، $P \Rightarrow Q$ و $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

محاسبات میانی

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
t	t	f	f	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	t
f	f	t	t	t

یا صرف‌نظر از محاسبات میانی،

P	Q	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

در این مورد، این فرمولهای گزاره‌ای مرکب را منطقاً معادل می‌خوانیم.

اگردوفرمول گزاره‌ای مرکب را با S_1 و S_2 نمایش دهیم، برای تعادل منطقی آنها می‌نویسیم

$$S_1 \equiv S_2 .$$

مثلاً، نتیجهٔ فوق‌را می‌توان به‌صورت

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

هم بیان کرد.

نکتهٔ جالب توجه درمورد فرمولهای گزاره‌ای مرکب این است که گاهی می‌توان دوتا ازآنها راکه ازنمادهای متفاوتی هم تشکیل می‌شوند معادل دانست. این امر هنگامی اتفاق می‌افتدکه تغییر ارزش یکی ازنمادها اثری در نتیجهٔ نهایی نداشته باشد. مثلاً، $P \,\&\, (\neg P)$ همیشه نادرست است. با محاسبهٔ جدول ارزش $(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$، داریم :

P	Q	$(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$
t	t	f
t	f	t
f	t	f
f	f	t

لذا ارزش «$(P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q)$» همواره مساوی‌ارزش $\neg Q$ است وبستگی به‌ارزش P ندارد. یك راه مشاهدهٔ این مطلب،که نمونه‌ای واقعی ازاخوت ریاضی است، این‌است که $\neg Q$ را تابعی ازهردوگزارهٔ P و Q بدانیم، ولذا جدول ارزشش می‌شود:

P	Q	$\neg Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	f
f	f	t

باتوجه به‌این ابزارصوری، مجازیم بنویسیم

$$\neg Q \equiv (P \,\&\, (\neg P)) \vee (\neg Q) \,.$$

یك فرمول گزاره‌ای مرکب را توتولوژی می‌نامند درصورتی‌که همواره، وبدون توجه به‌ارزش نمادهای گزاره‌ای مربوط، درست باشد. مثالهایی ازآن عبارتند از:

(یك) $P \vee (\neg P)$ ،

(دو) $P \Rightarrow (P \vee Q)$ ،

(سه) $(P \,\&\, Q) \Rightarrow P$ ،

(چهار) $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

خواننده باید بررسی کندکه ستون آخرجدول ارزش اینها تنها شامل ارزش t است.

هرگاه یك فرمول گزاره‌ای مرکب، به‌ازای هرارزشی که نمادهای گزاره‌ای مربوط داشته باشند، همواره ارزش f را بپذیرد، آنگاه آن را یك تناقض می‌نامند. مثلاً، $P \,\&\, (\neg P)$ یك تناقض است.

هردو توتولوژی منطقاً معادل هستند، وهمچنین هردو تناقض منطقاً معادل هستند. علاوه براین، یك فرمول گزاره‌ای مرکب چون S توتولوژی است اگر وفقط اگر $\neg S$ تناقض باشد.

استفاده از نماد T برای یك توتولوژی و C برای یك تناقض مناسب است. حال چند نتیجهٔ جالب به‌دست می‌آوریم. مثلاً، $C \Rightarrow (\neg P)$ منطقاً معادل P است. جدول ارزش آنها ازاین قراراست

P	$(\neg P) \Rightarrow C$
t	t
f	f

P	P
t	t
f	f

(برای محاسبهٔ جدول سمت چپ، به خاطرداشته باشیدکه ارزش C همیشه f است.)

اگر یك تناقض مشخصی، مثلاً $Q \,\&\, (\neg Q)$ ، را به‌جای C بگذاریم بازهمان نتیجه حاصل می‌شود:

P	Q	$(\neg P) \Rightarrow (Q \,\&\, (\neg Q))$
t	t	t
t	f	t
f	t	f
f	f	f

P	Q	P
t	t	t
t	f	t
f	t	f
f	f	f

خواننده باید تمام محاسبات میانی در جدول سمت چپ را انجام دهد تا بصیرتی درمورد آنچه که می گذرد بدست آورد.

برای بررسی تعادل منطقی دوفرمول گزاره‌ای مرکب S_1 و S_2 ، به جای مقایسهٔ دوجدول ارزش مربوط ، می‌توان فقط جدول $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ را بررسی کرد. اگر S_1 منطقاً معادل S_2 باشد، آنگاه $S_1 \Longleftrightarrow S_2$ یك توتولوژی است، و برعکس. مثلاً ، تعادل منطقی $[P \Rightarrow Q] \Longleftrightarrow [(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)]$ و $P \Rightarrow Q$ متناظر با این امر است که $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ یك توتولوژی است.

استنتاج منطقی

شیوهٔ کلی در اثبات غالباً این نیست که صدق گزارهٔ مفروضی را اثبات کنیم، بلکه این است که درستی گزاره‌ای را که منطقاً معادل آن است ثابت کنیم. نمونه‌هایی مهم به شرح زیرند:

(۱) عکس نقیض $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P) \equiv P \Rightarrow Q$. برای اثبات درستی $P \Rightarrow Q$ ، صدق $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ را نشان می‌دهیم.

(۲) اثبات با برهان خلف $P \equiv (\neg P) \Rightarrow C$، که در آن C یك تناقض است. برای اثبات P، درستی $(\neg P) \Rightarrow C$ را نشان می‌دهیم.

(۳) اثبات اگر وفقط اگر $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \,\&\, (Q \Rightarrow P)$.

(۴) صورت دوم اگر وفقط اگر $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \,\&\, ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))$.

برای اثبات درستی $P \Longleftrightarrow Q$ ، صدق هردو گزارهٔ $P \Rightarrow Q$ و $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ را نشان می‌دهیم.

درستی گزاره‌ای را که از گزاره‌های معلومی ساخته می‌شود، با کمك جدولهای ارزش و با توجه به نحوهٔ تشکیل آن گزاره، مشخص می کنیم. مثلاً، فرض کنیم می‌دانیم که P و همچنین $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ درست‌اند. با توجه به این حقایق، می‌توان استنتاج کرد که Q نیز باید درست باشد. ممکن است گزاره‌های مورد بحث مرکب باشند، مانند $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$، و اگرچه می‌دانیم که کل گزاره درست است، ممکن است هیچ اطلاعی در مورد سازه‌هایش نداشته باشیم. یعنی ممکن است بدانیم که $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ درست است، ولی از ارزشهای P یا Q هیچ اطلاعی نداشته باشیم. با این وجود هنوز هم می‌توانیم از آن نتایجی استنتاج کنیم؛ مثلاً، اگر $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ صادق باشد، آنگاه می‌دانیم که گزارهٔ معادلش، $P \Rightarrow Q$، نیز درست است. در زیر چند مورد را نام می بریم که درهرمورد صدق گزارهٔ ستون سمت چپ را می‌توان ازصدق گزارهٔ ستون سمت راست استنتاج کرد.

اگر این گزاره‌ها درست باشند...	... آنگاه این گزاره‌ها نیزباید درست باشند
$P, (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	Q
$(\neg P) \Rightarrow C$ (تناقض)	P
$P, P \Rightarrow Q$	Q
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
$P \vee Q, \neg P$	Q
$P \& Q$	$P \vee Q$
$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
$P_1, \ldots, P_n$	$P_1 \& \& \ldots \& P_n$
$P_1, \ldots, P_n, (P_1 \& \ldots \& P_n) \Rightarrow Q$	Q

این فهرست را می‌توان تا بینهایت ادامه داد. برای به دست آوردن یك سطرجدید، چند فرمول گزاره‌ای مرکب S_1 ، ... ، S_n را درستون سمت راست بنویسید و درمقابل آن ، در ستون سمت چپ، فرمول گزاره‌ای مرکبی چون D بنویسید که هرگاه S_1، ... ، S_n صادق باشند، D نیز قطعاً درست باشد. این امر مستلزم بررسی جدولهای ارزش S_1، ... ، S_n، و D است؛ ولی باتوجه به فرمول $(S_1 \& \ldots \& S_n) \Rightarrow D$، می‌توان این شرایط را دریك جدول مرکب فرمول‌بندی کرد. اگراین یك توتولوژی باشد، آنگاه درستی S_1، ... ، S_n درستی D راکه موردنظراست، تضمین می‌کند.

هرتوتولوژی راکه به صورت $(S_1 \& \ldots \& S_n) \Rightarrow D$ باشد یك قاعدهٔ استنباط می‌خوانیم. اگر یك قاعدهٔ استنباط مفروض باشد، ودرفرمول گزاره‌ای مرکب مربوط گزاره‌هایی واقعی جایگزین شوند، آنگاه اگر S_1، ... ، S_n درست باشند، می‌توان نتیجه گرفت که D نیزصادق است.

هرگاه گزاره‌های مورد بحث شامل گزاره نماهای سوردار هم باشند، آنگاه برای بررسی اینکه صدق یك گزاره نتیجه‌ای طبیعی ازصدق گزاره‌های مفروض است، باید به چگونگی ترکیب آنها توجه کرد. به عنوان یك مورد ساده، ممکن است بدانیم که $\forall x \in S : P(x)$ درست است،واز این مطلب نتیجه بگیریم که $\exists x \in S : P(x)$ نیز صادق است.[۱] اگردرستی $\forall x \in S : P(x)$ و $\forall x \in S : Q(x)$ مفروض باشند،می‌توان گزاره‌های بسیاری از جمله $\forall x \in S : P(x) \& Q(x)$، $[\forall x \in S : P(x)] \vee [\forall x \in S : Q(x)]$، و $P(a) \& Q(b)$ راکه درآن $a, b \in S$، وغیره را نتیجه گرفت. بازهم می‌توانیم فهرستی ازاحکام حاصل از گزاره‌های شامل گزاره‌نماهای سوردار را تشکیل دهیم.

---

۱. این مطلب درصورتی درست است که مجموعهٔ S ناتهی باشد.ـــم.

اگراین گزاره‌ها درست باشند ...	... آنگاه این گزاره‌ها نیزباید درست باشند
$\forall x \in S : P(x),\ \forall x \in S : Q(x)$	$\forall x \in S : [P(x)\ \&\ Q(x)]$
$\forall x \in S \neq \varnothing : P(x)$	$\exists x \in S : P(x)$
$\forall x \in S : P(x)$	$P(a)\ (a \in S)$
$P(a)\ (a \in S \neq \varnothing)$	$\exists x \in S : P(x)$
$\neg [\forall x \in S \neq \varnothing : P(x)]$	$\exists x \in S : [\neg P(x)]$
$\neg [\exists x \in S : P(x)]$	$\forall x \in S : [\neg P(x)]$
$\exists x \in S\, \forall y \in S\, \forall z \in M : \neg [P(x,y,z)]$	$\neg [\forall x \in S\, \exists y \in S\, \exists z \in M : P(x, y, z)]$

والی آخر.

استنتاجهای متعدد دیگری راهم می‌توان به‌این فهرست افزود. درستون سمت راست گزاره‌های S_1، ...، S_n راکه ممکن است متشکل از گزاره نماهای سوردار باشند نوشته می‌شوند، ودرستون سمت چپ گزاره‌ای چون D که درستیش مشروط به‌درستی همهٔ S_1، ...، S_n هاست. این را هم می‌توان به صورت شرط درستی تنها گزارهٔ $(S_1\ \&\ \ldots\ \&\ S_n) \Rightarrow D$ فرمول بندی کرد. گزاره نماها بسیارپیچیده‌تر از گزاره‌های ساده هستند، وما آزمونی کلی برای بررسی صدق آنها عرضه نخواهیم کرد.

اثبات

درعمل، نقطهٔ شروع کارمان چند گزارهٔ H_1، ...، H_r است و می‌خواهیم صدق گزاره‌ای مانند D را استنتاج کنیم. این فرایند ممکن‌است باداخل شدن گزاره‌های فرعی دیگری بسیارپیچیده شود. به‌این‌خاطر، فرایند رادرچند مرحله انجام می‌دهیم؛ به‌این‌ترتیب که دنباله‌ای از گزاره‌هایی چون L_1، ...، L_n راکه در آن $L_n = D$ می‌نویسیم؛ هرسطر L_m، به ازای هر $m = 1, 2, \ldots, n$، یا یکی ازفرضهای H_1، ...، H_r است یا درستیش را می‌توان از صدق L_1، ...، L_{m-1} استنباط کرد. به خصوص، L_1 باید یکی از فرضها باشد وهرسطر L_2، ...، L_n یا باید استنتاجی درست ازسطرهای قبل باشد، یا یکی ازفرضها. بدیهی است‌که این فرایند صدق سطرآخریعنی D را ایجاب می‌کند. در اینجا نیز مثل قبل صدق استنتاج L_m از سطرهای پیشین با بررسی درستی $(L_1\ \&\ \ldots\ \&\ L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ حاصل می‌شود. چنانچه L_m یکی ازفرضها باشد، ازجدول ارزش $\Rightarrow$ بلافاصله نتیجه می‌شودکه $(L_1\ \&\ \ldots\ \&\ L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ درست است؛ ولی هرگاه L_m یکی ازفرضها نباشد، به‌بررسی بیشتری نیازاست.

هرگاه نتیجهٔ نهایی D به صورت $P \Rightarrow Q$ باشد، آنگاه ریاضیدانان غالباً این

دستورالعمل را تغییر می‌دهند و در فهرست L_1، . . . ، L_n، گزارهٔ P را در سطر اول به‌عنوان L_1، و Q را در سطر آخر به عنوان L_n، می‌نویسند. در این مورد، هر سطر میانی یا باید یک فرض باشد، یا، مانند فوق، درستیش باید از سطرهای پیشین نتیجه بشود. ممکن است برخی از سطرها گزاره نما باشند: در اینجا نیز مهم این است یقین حاصل کنیم که $(L_1 \& \ldots \& L_{m-1}) \Rightarrow L_m$ همواره درست است.

مثال. هر گاه

$H_1 : 5 > 2$

$H_2 : \forall x, y, z \in \mathbb{R} : [(x > y) \& (y > z)] \Rightarrow (x > z)$

مفروض باشند، اثبات $(x > 5) \Rightarrow (x > 2)$ را می‌توان چنین نوشت:

$L_1 : x > 5$

$L_2 : 5 > 2$

$L_3 : \forall x, y, z \in \mathbb{R} : [(x > y) \& (y > z)] \Rightarrow (x > z)$

$L_4 : x > 20$

گرچه اثبات این استنتاج خاص کار فکری چندانی نمی‌برد، ولی دستورالعمل کلی، یک شیوهٔ اثبات را که به‌صورت زیر فرمول بندی می‌کنیم نشان می‌دهد:

تعریف. اگر گزاره‌های H_1، . . . ، H_r مفروض باشند، یک اثبات حکم $P \Rightarrow Q$ (که در آن P و Q ممکن است گزاره یا گزاره نما باشند) از تعدادی متناهی از سطرهایی مانند

$$L_1 = P$$

$$L_2$$

$$\vdots$$

$$L_n = Q$$

تشکیل می‌شود که هر سطر L_m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ یا یک فرض H_s $(1 \leqslant s \leqslant r)$ است یا گزاره یا گزاره نمایی که

$$(L_1 \& \ldots \& L_{m-1}) \Rightarrow L_m$$

گزاره‌ای است درست.

تحت این شرایط، اگر P صادق باشد، آنگاه هر سطر پس از آن نیز باید صادق باشد و از این امر بخصوص درستی Q هم نتیجه می‌شود. با توجه به جدول ارزش $\Rightarrow$، ملاحظه می‌کنیم که این مطلب صدق $P \Rightarrow Q$ را ثابت می‌کند.

بد نیست حالتی را هم بررسی کنیم که P نادرست باشد. اگر P یك گزاره نما باشد چنین چیزی به‌سادگی می‌تواند اتفاق بیفتد، به‌این ترتیب که ممکن است مقادیری جانشین متغیر آن بشود که گزاره نما به‌گزاره‌ای نادرست تبدیل شود. به عنوان نمونه در مثال فوق، $x>۵$ نادرست است هرگاه (مثلاً) $x=۱$، که در آن صورت سطر $L_۴$ به‌صورت $۱>۲$ درمی‌آید که آن هم نادرست‌است. ازسوی دیگر، اگر x برابر۳ باشد، آنگاه $L_۱$ نادرست است ولی $L_۴$ به‌صورت $۳>۲$ درمی‌آید که صادق‌است. خلاصه بگوییم، اگر P نادرست باشد هیچ نتیجه‌ای درمورد صدق یا کذب سطرهای پس از آن حاصل نمی‌شود: تنها مطلبی که به‌آن یقین داریم این‌است که گزارهٔ مرکب $P \Rightarrow Q$ صادق‌است. واین به‌این خاطراست که، گرچه می‌دانیم استنتاجهای $(L_۱ \,\&\, \ldots \,\&\, L_{m-۱}) \Rightarrow L_m$ همه درست هستند، کذب $L_۱$ می‌تواند به‌کذب L_m منجر بشود.

این مطلب مهمترین عامل در اثبات بـا برهان خلف است. این برهان دقیقاً دارای همان قالبی است که درفوق آمد. برای اثبات P، گزاره‌ای معادل با آن چون $(\neg P) \Rightarrow C$ را که در آن C یك تناقض است، ثـابت می‌کنیم. دراین صورت سطراول $L_۱$ را به صورت $(\neg P)$ شروع و به‌سطر آخر L_n که C باشد ختم می‌کنیم. با فرض صدق $(\neg P)$، هرسطر پس از آن نیز باید درست باشد. ولی L_n به‌خاطر تناقض بودن مسلماً نادرست‌است. ازاین‌رو $(\neg P)$ نمی‌تواند صادق باشد، پس P باید صادق باشد. به‌این ترتیب صدق P «با برهان خلف» اثبات می‌شود.

همچنین اثبات درستی $P \Rightarrow Q$ بااستفاده از اثبات درستی $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$ کـه منطقاً معادل آن‌است، اساساً دارای همین ساخت‌است؛ باسطر $(\neg Q)$ آغازمی‌کنیم و به‌سطر $(\neg P)$ خاتمه می‌دهیم.

آنچه که گفتیم تعریف صوری مراحل منطقی یك اثبات‌است. اما به‌هنگام اثبات عملاً چه باید بنویسیم؟ فصل بعد یکی ازپاسخهای ممکن را بـه‌ما می‌دهد.

تمرین

۱. جداول ارزش گزاره‌های مرکب زیررا بنویسید:

(الف) $P \Rightarrow (\neg P)$،

(ب) $((P \Rightarrow R) \,\&\, (Q \Rightarrow R)) \Longleftrightarrow ((P \,\&\, Q) \Rightarrow R)$،

(پ) $(P \,\&\, Q) \Rightarrow (P \vee Q)$،

(ت) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P) \vee (\neg Q)$.

کدام، یك توتولوژی است؟

۲. گزاره‌های زیررا بااستفاده ازسورهای $\forall$ و $\exists$ بنویسید، وبگویید کدام صادق است.

(الف) به‌ازای هرعدد حقیقی x، عددی حقیقی مانند y وجود داردکه $y^۳ = x$.

(ب) عددی حقیقی مانند y وجود داردکـه به‌ازای هرعدد حقیقی x، مجموع $y + x$

مثبت است.

(پ) به‌ازای هرعدد گنگ x، عددی صحیح مانند n وجود دارد که در $x<n<x+1$ صدق می‌کند.

(ت) باقیماندهٔ مربع هرعدد صحیح تقسیم بر۴ یا برابر۰ است یا برابر۱.

(ث) مجموع مربعات دوعدد اول مخالف با ۲، عددی است زوج.

۳. گزاره‌های زیررا به‌نثرفارسی برگردانید:

(الف) $\forall x\in\mathcal{R}\,\exists y\in\mathcal{R}: x^2-3xy+2y^2=0$،

(ب) $\exists y\in\mathcal{R}\,\forall x\in\mathcal{R}: x^2-3xy+2y^2=0$،

(پ) $\exists N\in\mathcal{N}\,\forall\varepsilon\in\mathcal{R}: [(\varepsilon>0)\ \&\ (n>N)]\Rightarrow(1/n<\varepsilon)$،

(ت) $\forall x\in\mathcal{N}\,\forall y\in\mathcal{N}\,\exists z\in\mathcal{N}: x+z=y$.

(ث) $\forall x\in\mathcal{Z}\,\forall y\in\mathcal{Z}\,\exists z\in\mathcal{Z}: x+z=y$.

برگردانهای خود را به دقت بخوانید، واگرفکرمی‌کنیدکه خشك ورسمی هستند، آنها را روانتربنویسید (ولی معنی آنها را تغییرندهید!) تعیین کنیدکدام یك ازگزاره‌های (الف)ـ(ث) صادق است وکدام کاذب. برای هرمورد دلیلی ذکرکنید.

۴. درهریك ازموارد زیر، جداول ارزش رابنویسید وبگوییدآیا دوگزارهٔ موردنظرمعادل هستند یا نه.

(الف) $P\vee(\neg P)$ و $\neg[P\ \&\ (\neg P)]$،

(ب) $P\Rightarrow Q$ و $(\neg P)\ \&\ Q$،

(پ) $P\Rightarrow Q$ و $(\neg Q)\ \&\ P$،

(ت) $(P\Rightarrow Q)\ \&\ R$ و $P\Rightarrow(Q\ \&\ R)$،

(ث) $[P\ \&\ (\neg Q)]\Rightarrow[R\ \&\ (\neg R)]$ و $P\Rightarrow Q$.

۵. قوانین استنباط مذکور دربخش «استنتاج منطقی» رابااستفاده ازجداول ارزش (هرکجا که امکان پذیرباشد) ثابت کنید.

۶. کدام یك ازاستنتاجهای زیرمنطقاً درست است؟

(الف) «اگرتوافقنامهٔ محدودیت سلاحهای‌استراتژیك امضا شود، یاسازمان ملل‌متحد طرح خلع سلاح را تصویب‌کند، قیمت سهام صنایع اسلحه‌سازی تنزل می‌کند. ولی‌قیمت سهام صنایع جنگی تنزل نمی‌کند، و لذا توافقنامهٔ محدودیت سلاحهای استراتژیك امضا نمی‌شود.»

(ب) «اگرانگلستان ازبازار مشترك خارج شود یااگرکسری بازرگانی تقلیل یابد، قیمت‌کره پایین می‌آید. اگرانگلستان در بازار مشترك باقی بماند، صادرات افزایش نمی‌یابد. کسری بازرگانی افزایش می‌یابد مگراینکه صادرات افزایش یابد. بنابراین قیمت‌کره پایین نمی‌آید.»

(پ) «برخی ازسیاستمداران صالح هستند. برخی از زنان سیاستمدارند. بنابراین برخی اززنان سیاستمدار، صالح هستند.»
(ت) «اگرسخت کارنکنم خوابم می‌برد. اگر نگران باشم خوابم نمی‌برد. بنابراین اگرنگران باشم سخت‌کارمی‌کنم.»

۷. درحالتهای زیرگزارهٔ

$$y > z \text{ ولی } x \leqslant y$$

را درنظربگیرید:
(الف) $x=۱$، $y=۲$، $z=۰$،
(ب) $x=۱$، $y=۲$، $z=۳$،
(پ) $x=۲$، $y=۱$، $z=۰$،
(ت) $x=۲$، $y=۱$، $z=۳$.
درکدام موردگزاره صادق است؟ بااستفاده ازاین اطلاعات یك جدول‌ارزش برای «ولی» تنظیم وتحقیق‌کنیدکه

$$(Q \text{ ولی } P) \Longleftrightarrow (P \,\&\, Q)$$

یك توتولوژی است.
همین عمل را درمورد «ازآنجاکه» و «بنابراین» انجام دهید وآنها را با «دلالت دارد بر» مقایسه‌کنید. درمورد «مگر» چه می‌توان گفت؟

۸. نقیض گزاره‌های زیرچیست؟
(الف) $\forall x : (P(x) \,\&\, Q(x))$،
(ب) $\exists x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$،
(پ) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x \geqslant y$،
(ت) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{Q} : x+y \geqslant z$.
آیا (پ) و (ت) درست هستند یا نادرست؟

۹. قضیه‌های زیررا بابرهان خلف ثابت‌کنید.
(الف) اگرx و y در $\mathbb{R}$ باشند وبه‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ داشته باشیم $y \leqslant x+\varepsilon$، آنگاه $y \leqslant x$.
(ب) به ازای هرعدد حقیقی x، یا $x+\sqrt{۳}$ گنگ است یا $x-\sqrt{۳}$ گنگ‌است.
(پ) کوچکترین عدد گویایی که از $\sqrt{۲}$ بزرگتر باشد وجود ندارد.

۱۰. رابطهای $\neg$، &، ∨، و $\Rightarrow$ را درنظربگیرید. نشان دهید

$$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \,\&\, Q$$

$$P \vee Q \equiv \neg[(\neg P) \,\&\, (\neg Q)]$$

و نتیجه بگیرید که هر گزارهٔ مرکب را می‌توان برحسب تنها رابطهای ¬ و & نوشت. آیا می‌توان هر گزارهٔ مرکب را برحسب تنها یکی ازرابطهای ¬ ، & ، ∨ ، ⇒ نوشت؟

رابط خط راکه با | نمایش داده می‌شود طبق جدول

P	Q	$P\|Q$
t	t	f
t	f	t
f	t	t
f	f	t

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$P|Q \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

همچنین نشان دهید که

(الف) $(\neg P) \equiv P|P$ ،

(ب) $(P \,\&\, Q) \equiv (P|Q)|(Q|P)$ ،

(پ) $(P \vee Q) \equiv (P|P)|(Q|Q)$ ،

(ت) $(P \Rightarrow Q) \equiv P|(Q|Q)$.

سپس نتیجه بگیرید که هر گزارهٔ مرکب را می‌توان با استفاده ازتنها رابط خط نوشت.

(تـذکر: استفاده از این رابط ممکن است از نظر تعـداد رابطهای متفاوت با صرفه باشد، ولی آیا خواندن گزارهٔ

$$(((P|P)|Q)|((P|P)|Q))|(Q|Q)$$

ساده‌تر ازخواندن گزارهٔ

$$((\neg P) \,\&\, Q) \Rightarrow Q$$

است؟ با این حال این دو گزاره معادلند. . .)

۷

اثبات ریاضی

در فصل قبل، دربارهٔ کاربرد منطقی زبان در ریاضیات و روش اثبات صدق یك گزاره با استفاده از گزاره‌های مفروض بحث کردیم، و نشان دادیم که چگونه می‌توان یك اثبات را به صورت دنباله‌ای از استنتاجهای منطقی نوشت. ولی در عمل این شیوه، راه رضایتبخشی برای نگارش اثبات نیست: نوشتن همهٔ جزئیات اثبات، متن را کلیشه‌ای می‌کند وطول آن را ازحدمعقول فراتر می‌برد. دراین فصل، تصویرکلی اثباتهای ریاضی را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که ریاضیدانان در عمل چگونه این اثباتها را می‌نویسند. نگارش یك اثبات ریاضی علاوه براستخوان‌بندی منطقی به‌حس تشخیص هم نیاز داردکه در هر موردحقیقتاً تا چه اندازه جزئیات لازم است: چه مطالبی باید نوشته شود و چه مطالبی بدون اینکه لطمه‌ای به‌اثبات واردشود می‌تواند حذف گردد. شرح خیلی مختصر، ممکن است قسمتهای حساس اثبات را نادیده بگیرد؛ وشرح مفصل، ممکن است شکل کلی اثبات را مبهم سازد.

این بحث را با بررسی یك اثبات واقعی که به‌شیوهٔ متداول ریاضی نوشته شده‌است آغاز، وآن را با ساختمان صوری فصل قبل مقایسه می‌کنیم.

قضیه. اگر (a_n) و (b_n) دو دنباله از اعداد حقیقی باشندکه $a_n \to a$ و $b_n \to b$ (هرگاه $n \to \infty$)، آنگاه $a_n + b_n \to a + b$.

اثبات. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. چون $a_n \to a$، N_1ی وجود داردکه

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

چون $b_n \to b$، N_2ی وجود دارد که

$$n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$. هرگاه $n > N$، آنگاه $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ و $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$، و لذا بنابر نامساوی مثلثی

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a+b)| &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

پس، همان طور که مطلوب بود، $a_n + b_n \to a + b$. □

برای تحلیل ساخت این اثبات، آن را سطربندی می‌کنیم و با افزودن کلماتی مناسب، ساخت آن را واضحتر می‌نامیم.

فرضها

H_1. (a_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، و $a_n \to a$.
H_2. (b_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی است، و $b_n \to b$.

اثبات

۱. فرض کنیم $\varepsilon > 0$.
۲. چون $a_n \to a$، N_1ی وجود دارد که $n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۳. چون $b_n \to b$، N_2ی وجود دارد که $n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۴. فرض کنیم $N = \max(N_1, N_2)$.
۵. اگر $n > N$ آنگاه $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ و $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.
۶. لذا، بنابر نامساوی مثلثی، $|(a_n + b_n) - (a+b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$.
۷. $|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$.
۸. $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

۹. (Nی چون $N=\max(N_۱, N_۲)$ وجود دارد که)

$$n>N \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$$

۱۰. طبق انتظار، $a_n+b_n \to a+b$.

سطر ۱ گزاره نمای «$\varepsilon>۰$» است، و اگر به‌پایین توجه کنیم می‌بینیم سرانجام، در سطر ۹، وجود Nی را ثابت می‌کنیم که $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon \Rightarrow n>N$. فرض کنیم

$P(\varepsilon)$ گزاره نمای $\varepsilon>۰$ باشد،

و

$Q(\varepsilon)$ گزاره نمای $\exists N\varepsilon\mathcal{N}: n>N \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$.

آنگاه سطرهای ۱ـ۹ اثباتی برای درستی

$$P(\varepsilon) \Rightarrow Q(\varepsilon).$$

است. در سطر ۱۰، این گزاره به گزاره‌ای معادل، $a_n+b_n \to a+b$، برگردانده شده است.

حال سطرهای ۱ـ۹ را که مراحل اصلی اثبات هستند دقیقتر بررسی می‌کنیم. سطرهای ۲ و ۳ برگردان فرضهای $H_۱$ و $H_۲$ هستند، و در آن این نکته تلویحاً بیان‌شده است که اگر $\varepsilon>۰$ آنگاه $\frac{۱}{۲}\varepsilon>۰$ و لذا $\frac{۱}{۲}\varepsilon$ را هم می‌توان در تعریف حد به‌کار برد. علی‌الاصول، باید این استنتاجهای منطقی کوچك را نیز به‌طور صریح نوشت، ولی در عمل مراحلی را که اجزای معلوم تکنیك هستند حذف می‌کنیم.

سطر ۴ مطلب تازه‌ای است: تعریف نماد N برحسب $N_۱$ و $N_۲$. این تعریف را در صورت تمایل می‌توانیم حذف کنیم و بدون هیچ تغییر واقعی در اثبات همه جا به‌جای N، $\max(N_۱, N_۲)$ را بنویسیم. ولی در عمل، برای ساده‌کردن نمادها، متداول است که برای نمایش مفاهیم پیچیده‌ای که از مفاهیم معلوم قبلی ساخته می‌شوند، از نمادهای جدیدی استفاده کنند.

سطر ۵ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ نتیجه می‌شود (البته صدق گزارهٔ $n>N$ ایجاب می‌کند که $n>N_۱$ و $n>N_۲$، مسلم فرض شده است).

سطر ۶ چیزی نیست جز محاسبه. در این سطر، قبل از استفاده از نامساوی مثلثی برای نوشتن نتیجهٔ نهایی، عملیات نسبتاً سادهٔ حساب برای تبدیل $|(a_n+b_n)-(a+b)|$ به $|(a_n-a)+(a_n-b)|$ نیز به‌کار گرفته شده است. توجه کنید که این سطر گزاره‌نمایی از n به‌نظر می‌رسد، ولی به طور ضمنی آن را در حیطهٔ سور $\forall n>N$ از سطر ۵، می‌دانیم.

سطر ۷ از سطرهای۵ و ۶ نتیجه می‌شود؛ دراین سطر نیز به‌طور ضمنی از یك قضیهٔ معلوم حساب، این بار جمع نامساویها، استفاده شده است.
سطر ۸ صرفاً محاسبه است.
سطر ۹ از سطرهای ۲–۸ نتیجه می‌شود.

این تحلیل از یك اثبات نسبتاً ساده نشان می‌دهدکه ریاضیدانان اثباتها را دقیقاً به‌صورتی‌که در فصل قبل شرح داده شد نمی‌نویسند. شماره‌گذاری مراحل، هم در معرفی فرضیات وهم دراستنباطها، حذف می‌شوند؛ تعریفهای جدیدی معرفی می‌شوند؛ وکل‌مطلب، کاملاً برخلاف نوشتن دنباله‌ای صوری ازگزاره‌ها، به‌نثر سلیس نوشته می‌شود.
علت چیست؟ نخست اینکه ریاضیدانان سالها قبل از اینکه تحلیل منطقی باب شود به‌نوشتن اثبات می‌پرداختند، از این‌رو از ابتدا مرسوم بوده است‌که اثباتها را به‌نثر بنویسند واین سبك همچنان ادامه دارد. علت اصلی این است‌که حذف جزئیات بدیهی و به‌کار بردن نمادهای جدید برای ساختهای پیچیده، جزئی از فرایند قابل درك‌ترکردن استنتاجهاست. برای‌ساختن نظریه،مغز بشر الگوهای مأنوس‌را تشخیص می‌دهد وازجزئیاتی که قابل فهمند صرفنظر می‌کند تا بتواند روی موضوع جدید تمرکز کند. درواقع گنجایش مغز بشر برای‌نگهداری اطلاعات جدید محدود است، واغلب برای درك تصویرکلی‌مطلب، حذف جزئیات مأنوس ضرور است. بنابراین در یك اثبات مکتوب، استنتاجهای منطقی مرحله به‌مرحله راکه قبلا جزئی‌از معلومات اولیهٔ خواننده درآمده‌اند مختصرجلوه‌می‌دهند تا بتوانندکل ساخت اثبات را دریابند.
ریاضیدانان هنگام پرداختن نظریه‌ای جدید تمایل دارند بین احکام‌کاملاجاافتاده‌ای که جزئی از تکنیك کارشان است و مطالب جدیدی‌که می‌پرورانند فرق قایل شوند. لذا، ایده‌های‌تثبیت شده را به‌راحتی می‌پذیرند وچندین مطلب راکه خوب با آنها آشنا هستند، اغلب بدون ذکر صریح مراجع مربوط به اثبات، دریك سطر می‌نویسند. این‌کار را چنان با اطمینان انجام می‌دهندکه‌گویی اگر موضوع به‌سؤال‌گذاشته شود، می‌توانند جزئیات‌را ارائه دهند (گرچه ممکن است به‌یادآوردن این جزئیات‌کار آسانی نباشد!).
نتایج تازه به‌دست آمده به‌منزلهٔ قلب نظریهٔ مورد بحث هستند، و بنابراین با دقت زیادی بررسی می‌شوند. هرگاه نیازی به‌آنها باشد آنها را به‌عنوان فرض صریحاً بیان می‌کنند ومراجع مربوط به‌اثباتشان را هم ذکر می‌نمایند.
اینکه چه‌وقت می‌توان مراحل منطقی یك اثبات یا مراجع مربوط به‌آن را حذف کرد، و چه‌وقت باید آنها را به‌طورکامل ارائه داد، جزئی است ازکیفیت اغفال‌کننده و سبك ریاضی. ریاضیدانان مختلف عقاید متفاوتی دارند. نکته این است‌که به مفاد اثبات توجه‌کنیم و ببینیم چه‌کسانی مورد خطاب هستند. مثلاً، خواننده این‌کتاب به‌احتمال زیاد دانشجویی است‌که تجربه‌اش عمدتاً ازکتابها و درسهای توصیفی حاصل شده است.دراین مورد به‌نظر می‌رسدکه مطالب باید با توضیح‌کاملتری ارائه شوند. از سوی دیگر،مکاتبات بین دو متخصص ممکن است از شرح خیلی مختصر رئوس مطالب تشکیل بشود و بر روی

جزئیات تازه و مهم تمرکز یابد. با این وجود، هردو مورد استثنایی فوق در این خاصیت مشترك هستند که بیان جزئیات در صورتی که در قالب مورد نظر جزئی از معلومات اولیه باشند، حذف می‌شوند.

به‌عنوان مثالی مشخص، در درس آنالیز ممکن است قوانین حساب جزئی از ابزار اولیه فرض‌شوند؛ ولی مفاهیم جدیدی چون حد، پیوستگی، وغیره به‌تفصیل بررسی گردند. قضایای مربوط به‌این مفاهیم جدید به دقت اثبات می‌شوند، و درصورت لزوم در قضایای بعد هم به‌طور صریح به‌آنها ارجاع می‌گردد. دراثباتی که درفوق تحلیل کردیم، قضایای مربوط به‌حساب را بدون هیچ اشاره‌ای به‌کار بردیم، والبته نامساوی مثلثی را ذکر کردیم، زیرا احساس می‌شد که نسبتاً جدید است وارزش یادآوری را دارد. درمباحث پیشرفته‌تر، این مطلب هم جزئی از ابزار اولیه می‌شود وبدون اشارهٔ ویژه‌ای به‌کار می‌رود.

اصولاً، هراثباتی که توسط ریاضیدانان به‌کار می‌رود همان ساختی را داردکه در فصل قبل توصیف شد، ولی چنین اثباتی در مضمونی عرضه می‌شودکه نتایج معینی جزء متداول تکنیك ضمنی آن شده باشند. لذا اثبات گزاره‌ای چون D از فرضهای صریح H_1، ...، و H_n، متشکل خواهد بود از تعدادی گزاره چون L_1، L_2، ...، و L_n، که L_n همان D است، وهر L_m به‌یکی از دوصورت زیر است:

(یك) حقیقتی است شناخته شده، که یا استنباط ساده‌ای است از فرضها یا از تکنیك ضمنی،

(دو) استنتاجی است از سطرهای قبلی L_1، ...، L_{n-1}، که بااستفاده از منطق‌صوری وحقایق معلوم از تکنیك ضمنی حاصل می‌شود.

هراثبات، به‌صورت تلفیقی از یك زبان طبیعی و نمادپردازی ریاضی نوشته می‌شود که ساخت منطقی‌را روشن سازد. اگر استنتاجها ازقراین روشن باشند شماره‌گذاری‌مراحل را می‌توان حذف کرد، و برای ساده‌کردن نمادگذاری، نمادهای جدیدی را هم می‌توان معرفی کرد.

ساخت هراثبات واقعی حکمی چون $P \Rightarrow Q$ همان شالوده را داردکه یك اثبات صوری و منطقی، ولی درآن تلویحاً از تکنیك ضمنی هم استفاده می‌شود.

گاهی ممکن است موضوع مورد بحث آن قدر واضح باشدکه هیچ فرض صریحی ذکر نشود. مثلاً:

قضیه. (اقلیدس). تعداد اعداد اول نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم فقط تعدادی متناهی عدداول وجود داشته باشد مثلاً p_1، ...، p_n. عدد اولی چون p عدد $N = 1 + p_1 p_2 \cdots p_n$ را بخش می‌کند. ولی p نمی‌تواندیکی از اعداد p_1، ...، p_n باشد، زیرا باقیماندهٔ حاصل از تقسیم N بر هر یك از این اعداد برابر ۱ است. این مطلب با این فرض که p_1، ...، p_n فهرست کاملی است از اعداد اول در تناقض است. □

این اثبات، به‌مبحث حساب اعداد صحیح، شامل تجزیه به عوامل اول، برمی‌گردد. این اثبات، به صورت اثبات با برهان خلف داده شده است. فرض کنیم P گزارهٔ «تعداد اعداد اول نامتناهی است» باشد. سطر اول اثبات بیان می‌کند که «فرض کنیم $\neg P$»، و سپس در جستجوی یك تناقض، خط معمول استدلال دنبال می‌شود. بنابراین، $\neg P$ باید نادرست باشد، ولذا P حتماً درست است.

دراین نوع اثبات، بایدکاملاً مراقب مطالب ضمنی باشیم، تا درقسمتهایی ازاثبات که حذف‌شده‌اند نقصی منطقی وجود نداشته باشد. مثلاً، چه اشکالی در به‌اصطلاح«اثبات» زیر وجود دارد؟

قضیه (؟). ۱ بزرگترین عدد صحیح است.

اثبات (؟). فرض کنیم چنین نباشد. فرض کنیم n بزرگترین عدد صحیح باشد. آنگاه $1 < n$. حال n^2 نیز یك عدد صحیح است، و $n \cdot 1 = n < n^2$. لذا $n < n^2$؛ و این در تناقض با این فرض است که n بزرگترین عدد صحیح است.

بنابراین فرض نخست نادرست است، و ۱ همان‌طورکه ادعا شده بود، بزرگترین عدد صحیح است. □

نقص این اثبات درکجاست؟ قبل‌ازخواندن مطالب بعد به‌جواب‌این سؤال‌فکر کنید.

نقص این اثبات درگزارهٔ «فرض کنیم n بزرگترین عدد صحیح باشد» است. این گزاره نقیض صحیح گزارهٔ «۱ بزرگترین عدد صحیح است» نیست. نقیض آن چنین‌است: «$1 < n$ بزرگترین عدد صحیح است یا بزرگترین عدد صحیح وجود ندارد»، وبا پذیرفتن این گزاره، تناقض به‌وجود نمی‌آید، زیرا $n < n^2$ متناقض با عبارت ایرانیك فوق نیست.

این نقص منطقی به‌دلیل غیرصوری بودن اثبات پنهان شده است. اجتناب ازدامهایی نظیر این، نیاز به‌تجربهٔ فراوان دارد.

دستگاه اصل موضوعی

برای حصول اطمینان از اینکه مطالب ضمنی مورد استفاده مبنای استواری دارند، باید اصول اولیه‌ای دردست باشند. به‌این منظور، گزاره‌های صریح معینی را به عنوان اصول موضوع بنیادی اختیار می‌کنیم، وصادق بودن آنهارا به‌عنوان فرض می‌پذیریم، وهمهٔ‌نتایج دیگر نظریه را ازآنها استنتاج می‌کنیم. این نتایج بنابه‌سلیقه، قضیه، حکم، لم، نتیجه،و... نامیده می‌شوند. غالباً کلمات «قضیه» و «حکم» مترادف تلقی می‌شوند، برخی از مؤلفین هم صرفاً یکی‌ازاینها را به‌کار می‌برند.ما ترجیح می‌دهیم که‌کلمهٔ «حکم» را برای‌توصیف نتایج سادهٔ معمولی به‌کار ببریم، وکلمهٔ «قضیه» را به‌مطالب مهمتری اختصاص دهیم. به‌این

ترتیب، با متمایز کردن قضیه‌های مهم از احکام، ساخت نظریه بهتر جلوه می‌کند.[۱]

برای بهتر جلوه دادن سیمای نظریه و برای کاستن پیچیدگی اثباتهای خیلی طولانی، می‌توان اجـزای تشکیل دهندهٔ یك اثبات را جدا کرد و آنها را قبل‌از بیان صورت قضیه به اثبات رسانید. این نتایج مقدماتی را لم می‌نامیم. ممکن است لمهای متعددی را قبل از قضیهٔ اصلی اثبات کنیم تا وقتی به‌اثبات قضیهٔ اصلی رسیدیم همهٔ کارهای دشوار انجام شده وتنها کار باقیمانده ایجاد ارتباط بین مطالب باشد. به‌این ترتیب می‌توان اثبات خود قضیه را امری بسیار طبیعی‌تر نمایاند و به‌خواص برجستهٔ آن جلوه‌ای روشنتر داد وآن را بـا شرح جزئیات مذکور درلمها مخفی نکرد.

لم (کـه بیش‌از قضیه می‌آید) متممی داردکـه آن را نتیجه می‌نامیم. و این خود نتیجه‌ای است که می‌تواند به‌سادگی از قضیه استنتاج شود، و بلافاصله بعد از آن می‌آید. گاهی اثبات، به دلیل مضمون، چنان بدیهی است کـه از ارائـه آن صرفنظر می‌گردد، یا «به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود».

با درجه‌بندی کردن عنوان نتایج اثبات شده به‌صورت قضیه، لم، و نتیجه، می‌تـوان نظریه را منسجم‌تر و قابل حصول‌تر ساخت. درضمن، همان‌طورکـه به‌سطوح پیشرفته‌تر و پیچیده‌تر نظریه می‌رسیم، می‌توانیم نتایج بیشتری را به‌عنوان مطالب ضمنی و اساسی آن نظریه، به‌نحوی که قبلاً شرح آن رفت، جزء مفروضات بدانیم.

درفصل ۲، بـه‌ایده‌های شهودی اعداد حقیقی نظری افکندیم و درآن زمینه نتایجی نیز به‌اثبات رسانیدیم. برای بررسی‌صوری این موضوع، باید برخی از خواص حساب‌را به‌عنوان اصول موضوع بنیادی اختیارکنیم ومطالب را به‌طور منطقی برمبنای آنها بسازیم. اگر دقیق باشیم از تمام‌کلکهایی‌که دراین زمینه به‌طور شهودی پروراندیم استفاده‌می‌کنیم تا راه خود را جهت تشکیل نظریه به‌صورت صوری پیداکنیم. در فصل ۸ اصول موضوع مناسبی برای اعداد طبیعی درنظر می‌گیریم وسپس بـه‌سایر دستگاههای اعداد می‌پردازیم. وقتی بنیادی استوار برای حساب داشته باشیم، می‌توانیم آن را بـه عنوان مطالب ضمنی به‌کار ببریم ونظریه‌های پیشرفته‌تر را بناکنیم. در بررسی فضاهای برداری، یاآنالیز، و یا هندسه، نتایج مربوط به حساب را می‌توان مفروض دانست و توجه خود را به‌اثبات نتایج رده‌های بالاتر معطوف کرد. در هرمرحله باید روشن باشدکه از چه نوع نتایجی می‌توان بدون اشاره استفاده کرد، وکدام را باید به‌دقت نام برد. گاهی مؤلف یك کتاب درسی، یا یك مدرس، می‌تواند فرض کند کـه موضوع خود روشنگر این مطلب هست و لذا از ذکر صریح آن صرفنظر نماید.

---

۱. واژهٔ «حکم» را به‌جای کلمه proposition آورده‌ایم ولی چون از طرفی تمایز بین نتایج مهم وغیرمهم مطلبی است شخصی‌واز طرف دیگر باب‌کردن واژهٔ نامأنوس وغیر ضرور «حکم» برای قضیه جایز نیست به‌جای هردوی این واژه‌ها «قضیه» را به‌کار خواهیم برد. ــم.

سؤالهای امتحانی

یکی‌از مواردی‌که برای دانشجویان اهمیت بسزایی دارد این است‌که چه اثباتی‌درامتحان قابل قبول است.این امر تـا حدی به ممتحن بستگی دارد، ولی قسمتی از نگرانی مربوط به‌عدم آگاهی از مضمون است. در هرکتاب، مضمون از وضعیت مشخص می‌شود. بدیهی است‌که برای یك اثبات مربوط به فصل ۷، پذیرفتن نتایج موجود در فصلهای ۱ـ۶ مجاز است. ولی درامتحان، ممکن است روشن نباشدکـه اثبات در چه سطحی مورد نیاز است. آیا باید همهٔ جزئیات را شامل باشد؟ از چه مطالبی می‌توان با اطمینان صرفنظرکرد؟اگر سؤال خوب‌طرح شده باشد، مضمون مشخص است. بدیهی‌است‌که عبارتی چون «بااستفاده ازاصول اولیه، نشان دهیدکه...» اثباتی دقیق با استفاده ازتعاریف بنیانی واصول‌موضوع را می‌طلبد. سؤالی مربوط به‌قسمتهای پیشرفته‌تر یك موضوع، چنین جوابی را نمی‌طلبد، و مفروض دانستن هرمطلب ثابت شدهٔ قبلی، به‌عنوان مطالب ضمنی آن سطح، بی‌خطر است. هرگز تـوضیح بیشتری از آنچه کـه مناسب مفاهیم مربوط بـه‌سؤال است عرضه نکنید. بخصوص، اگرطراح سؤال از ایده‌های معینی استفادهٔ واضحی‌کرده باشد، شماهم‌می‌توانید بـه‌همان اندازهٔ وضوح آنها را درحل مسئله بـه‌کارگیرید. این‌کار از جوابهای طولانی، شامل اثبات مطالب مقدماتی‌که باید فرض‌گرفته شوند، جلوگیری می‌کند.

یك سؤال ممکن است از سطوح مختلفی تشکیل بشود، مثلاً قسمت اولش مقدماتی باشد و قسمتهای بعدی پیشرفته‌تر. دانشجوی خردمند، به‌طور محسوس قدرت استدلال خود را درحد مضمون افزایش‌می‌دهد وآزادانه ایده‌هایی متناسب با وضع جدید به‌کارمی‌گیرد.

تمرین

۱. آیا نوشتهٔ ذیل، یك اثبات است؟ اگر نیست، چرا؟

قضیه: به‌ازای هردو عدد حقیقی x و yداریم

$$\frac{1}{2}(x+y) \geqslant \sqrt{xy}.$$

اثبات: طرفین را به‌توان ۲ می‌رسانیم ودر ۴ ضرب می‌کنیم تا

$$x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy$$

به‌دست می‌آید، سپس با تفریق $4xy$ از طرفین داریم

$$x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$$

ولی عبارت $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ همیشه نامنفی است، لذا قضیه ثابت می‌شود.

۲. آیا نوشتهٔ زیر یك اثبات است؟ اگر نیست، چرا؟

قضیه: درهرمثلث متساوی‌الساقین، زوایای مجاور به‌دو ساق برابرند.
اثبات: فرض کنیم $\triangle ABC$ یك مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع $AB = AC$ باشد. آنگاه $\triangle ABC$ قابل انطباق بر $\triangle ACB$ است، زیرا اضلاع نظیر برابرند: $AB = AC$، $BC = CB$، $AC = AB$. لذا زوایای نظیر هم برابرند: و به‌خصوص $\angle ABC = \angle ACB$.
(خواص معمولی مثلثهای قابل انطباق را می‌توانید به‌عنوان فرض بپذیرید.)

۳. آیا «اثباتهای» داده شده در فصل ۲ این کتاب، در حد مضمون مناسبی اثباتهای موثقی هستند؟ اگر هستند، مضمون چیست؟ اگر نیستند، اثباتها چه باید باشند؟

۴. اثبات قضیهٔ ۵، فصل ۳، را تحلیل کنید و نشان دهیدکه هرگزاره چگونه از گزاره‌های قبلی نتیجه می‌شود. به‌اثبات موجود چه باید افزود تا درتعریف منطقی یك «اثبات» صدق کند؟
این تمرین را برای اثباتهای دیگر فصل ۳ هم تکرار کنید.

۵. یك کتاب درسی ریاضی بردارید، قضیه‌ای از آن را انتخاب کنید (که اثباتش نه‌خیلی طولانی باشد و نه خیلی کوتاه) وسپس ساختش را تحلیل نمایید. چه نتایجی به عنوان مطالب ضمنی پذیرفته شده‌اند؟
تمرین را برای‌چند قضیهٔ دیگر، ترجیحاً ازکتابهای متفاوت واز شاخه‌های گوناگون ریاضیات، تکرار کنید.

۶. اصول زیر،اصول موضوع یك دستگاه (تا به‌حال تعریف نشدهٔ) ریاضی به‌نام بوروکراسی است. این دستگاه متشکل است از
یك مجموعهٔ B از بوروکراتها،
یك مجموعهٔ C ازکمیته‌ها،
یك رابطهٔ S بین B و C (بخوانید... در... خدمت می‌کند)، که دراصول موضوع زیر صدق می‌کنند:
(ب۱) هربوروکرات حداقل درسه کمیتهٔ متفاوت خدمت می‌کند.
(ب۲) درهرکمیته، حداقل سه بوروکرات متفاوت خدمت می‌کنند.
(ب۳) به‌ازای هردوکمیتهٔ متمایز مفروض، دقیقاً یك بوروکرات در هردوکمیته خدمت می‌کند.
(ب۴) به‌ازای هردو بوروکرات متمایز مفروض، دقیقاً یك کمیته وجود داردکه هر دو بوروکرات درآن خدمت می‌کنند.
با توجه به‌این اصول موضوع، ثابت کنیدکه اگر تعداد بوروکراتها متناهی باشد، تعدادکمیته‌ها نیز متناهی است. ثابت کنیدکه درهربوروکراسی همیشه دست‌کم هفت بوروکرات باید وجود داشته باشد،ضمناً یك بوروکراسی پیدا کنیدکه‌دقیقاً هفت بوروکرات داشته باشد.

۷. اثبات زیر درتعریف منطقی اثبات صدق می‌کند. برای اینکه بفهمید واقعاً چه‌می‌گذرد آن را تحلیل کنید.

قضیه: اگر A، B، و C سه مجموعه باشند، آنگاه $(A \cap A) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

اثبات:

L_1: فرض کنیم $a \in (A \cap B) \cap C$.

L_2 : $a \in A \cap B$.

L_3 : فرض کنیم $b \in A \cap (B \cap C)$.

L_4 : $a \in C$.

L_5 : $b \in B \cap C$.

L_6 : $b \in B$.

L_7 : $a \in B$.

L_8 : $b \in C$.

L_9 : $\{a , b\} \subseteq B$.

L_{10} : $b \in A$.

L_{11} : $a \in A$.

L_{12} : $b \in A \cap B$.

L_{13} : $a \in A \cap B$.

L_{14}: $\{a , b\} \subseteq A \cap B$.

L_{15} : $a \in B \cap C$.

L_{16} : $a \in A \cap (B \cap C)$.

L_{17} : $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

L_{18} : $b \in (A \cap B) \cap C$.

L_{19} : $(A \cap B) \cap C \supseteq A \cap (B \cap C)$.

L_{20} : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

این اثبات را به‌شیوه‌ای محسوس بنویسیدکه ساخت استدلال روشنتر شود.

قسمت III

عرضهٔ اصل موضوعی دستگاهها

حال به‌حود دستگاههای‌اعداد می‌پردازیم، ساختشان‌را تحلیل می‌کنیم، ومی‌کوشیم فهرستی صوری‌ازاصول موضوع بیابیم‌که آنهارا به‌طور دقیق توصیف‌کند. همچنین نشان می‌دهیم که بااستفاده‌ازمواد اولیهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها چگونه دستگاههایی ساخته می‌شوندکه این‌اصول را ارضاکنند. این‌امر ایده‌های شهودیمان‌را برپایه‌ای استوار قرار می‌دهد ومارا مجاز می‌سازدکه بدون هیچ تردید منطقی آنهارا به‌کار ببریم.

به بیان استعاره، اکنون می‌خواهیم ساختمانمان‌را بسازیم، یا می‌خواهیم گیاهمان‌را بکاریم: نکته مهم این‌است‌که باید چنان دقت کنیم که‌اشتباهی رخ ندهد، واین به‌معنی‌اعمال دقت لازم درجزئیات است.

طرزتفکری که‌اکنون‌ازخواننده خواسته می‌شودکمی متفاوت‌است. گرچه ازایده‌های شهودی می‌توان به‌عنوان منبع انگیزه‌بخش استفاده‌کرد، ولی هیچ مطلبی‌را تازمانیکه‌اثبات منطقی دقیقی برایش ارائه نشده است نمی‌توان به‌عنوان جزئی‌از اثبات به‌کاربرد. بنابراین لازم است، با استفاده از اصول موضوع، خواصی راکه قبلاً به‌طور شهودی پذیرفتیم بـه دقت اثبات‌کنیم. این کار را بـه‌این خاطر می‌کنیم‌که مطمئن شویم این خواص، بـه‌تعبیر صوری، واقعاً درست هستند، زیرا پذیرش قبلیشان بیشتر برمبنای عادت بـود تامنطق. لـذا ایده‌هایمان‌را برپایه‌ای معتبرتر قرار می‌دهیم.

درفصل ۸، حتی برای احکام ظاهراً بدیهی، اثباتهایی بسیار مفصل ارائـه می‌دهیم. ولی ازفصل ۹ به‌بعد به‌تدریج ازمیزان جزئیات‌کم می‌کنیم، وبررسی قسمتهایی از اثبات‌را که در حال حاضر برای خواننده عادی است به عهدهٔ خودش می‌گذاریم. این امـر برای اجتناب از گم‌شدن نکات اصلی، درزیر توده‌ای ازجزئیات پرزحمت، ضروراست. روش اثبات مرحله به مرحله، اگر به درازا بکشد، تصویرکلی‌را مبهم می‌سازد.

۸

اعداد طبیعی و اثبات به‌روش استقرا

در نگاه اول به‌نظر نمی‌رسد که اثبات به روش استقرا در الگـوی اثبات توصیف شده در فصل قبل بگنجد. به‌یك نمونه توجه می‌کنیم:

قضیه. مجموع نخستین n عدد طبیعی برابر با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است.

اثبات. این حکم به وضوح به ازای $n=۱$ صادق است. اگر به ازای $n=k$ نیز صادق باشد، داریم

$$۱+۲+\cdots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱).$$

حال باافزودن $k+۱$ به طرفین رابطه، داریم

$$۱+۲+\cdots+(k+۱)=\frac{۱}{۲}k(k+۱)+(k+۱)=\frac{۱}{۲}(k+۱)(k+۲).$$

این عدد، مجموع نخستین $k+۱$ عدد طبیعی است ولذافرمول مذکوربه‌ازای $n=k+۱$ هم درست است. بنابه استقرا، فرمول مذکور به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی صادق است. □

بسیاری این اثبات‌را برهانی از نوع «والی‌آخر ...» می‌دانند، کـه در آن ابتدا

درستی حکم به‌ازای $n=1$ نشان داده می‌شود؛ آنگاه، پس‌از اثبات مرحلهٔ عمومی رسیدن از $n=k$ به $n=k+1$، آن‌را برای $k=1$ به‌کارمی‌بریم تاازا $n=1$ به $n=2$ برسیم، سپس بااستفادهٔ مجدد آن‌از $n=2$ به $n=3$ می‌رسیم، والی‌آخر، تاهرجاکه بخواهیم. مثلاً، پس‌از ۵۹۲ بار استفاده‌از مرحلهٔ عمومی می‌توانیم به $n=593$ برسیم. تنها اشکال این است‌که برای رسیدن به‌مقادیر بزرگ n، باید مرحلهٔ عمومی‌را به دفعات بسیارزیاد به کار ببریم، ودر واقع هرگز نمی‌توانیم همهٔ اعداد طبیعی را دریك اثبات باطول متناهی بگنجانیم.

راه رهایی ازاین مشکل حذف بخش «و الی‌آخر ...» ازاثبات وقراردادن آن، به طور واضح درخود تعریف اعداد طبیعی است. سپس خواهیم دیدکه اثبات به‌روش استقرا درالگوی اثباتهای ریاضی توصیف شده در فصل قبل می گنجد.

اعداد طبیعی

اعداد طبیعی مجموعه‌ای کاملاً غیربدیهی هستند، زیرا نمی‌توانیم فهرست کاملی ازاعضای آن‌را بنویسیم: این اعداد الی غیرالنهایه ادامه دارند. ارائه توصیفی رضایتبخش برای آنها، نیازمند روشی متفاوت است. خوشبختانه ایدهٔ شهودی شمارش‌را می‌توان به آسانی به زبان مجموعه‌هابیان کرد. با ۱ شروع می کنیم، سپس ۲، آنگاه ۳، وبه‌همین نحو تالی‌ها را تاهرجاکه مایل باشیم نامگذاری می کنیم. برای درك «کل» مفهوم مجموعهٔ اعداد، این نامگذاری تالیهارا به‌صورت یك تابع روی مجموعهٔ $\mathcal{N}$ اعداد طبیعی درنظر می گیریم. یعنی، به جستجوی تابعی چون $s : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ باخواص مناسب می‌پردازیم. دراینجا s «تالی» را نمایش می‌دهد و $s(1)=2$، $s(2)=3$، والی آخر. دو خاصیت بدیهی مورد نیاز عبارتند از اینکه :

(یك) s پوشا نباشد (زیرا به‌ازای هر $n \in \mathcal{N}$، $s(n) \neq 1$)،

(دو) s یك به‌یك باشد ($s(m)=s(n)$ ایجاب کندکه $m=n$).

خاصیت مهم سومی به‌صورت زیرهم‌مورد نیازاست تااثباتهای‌استقرایی ازآن نتیجه شوند:

(سه) فرض کنیم $S \subseteq \mathcal{N}$ طوری باشدکه $1 \in S$؛ وبه‌ازای هر $n \in \mathcal{N}$، اگر $n \in S$ آنگاه $s(n) \in S$. دراین صورت $S=\mathcal{N}$.

به‌عبارت دیگر، (سه) بیان می کندکه هر زیرمجموعهٔ شامل ۱ کـه درصورت شامل بودن n، $s(n)$ را نیزشامل باشد، برابرهمهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

این مطلب واقعیتی شگفت آور است‌کـه این سه خاصیت تنها خواص مورد لـزوم برای توصیف اعداد طبیعی هستند. هرپایهٔ اصل موضوعی برای حساب، تنها بـه این نیاز داردکه وجود مجموعه‌ای بااین سه خاصیت به‌عنوان اصل موضوع پذیرفته شود. به دلایل تکنیکی بهتراست به‌جای ۱ با ۰ شروع کنیم. یافتن دلایل مشکل نیست. گرچه درشمارش معمولاً با ۱ شروع می کنیم، ولی مجموعهٔ تهی ۰ عضو دارد ومفید است بتوانیم این‌را هم بیان کنیم. همچنین، درحساب داشتن عضو صفر به‌راحتی کارکمك می کند. به‌این دو دلیل و

دلایل دیگر، دستگاه اصل موضوعی‌را با ۰ شروع می‌کنیم، وبرای‌آنکه این دستگاه با مفهوم‌شهودی‌اعداد طبیعی اشتباه نشود، $\mathbb{N}_0$ را برای نمایش دستگاه صوری به‌کارمی‌بریم، اندیس یادآور مشمول بودن ۰ است. به این ترتیب اصول موضوع پئانو[1] برای اعداد طبیعی به‌دست می‌آیند، که به‌نام ریاضیدان ایتالیایی مسئول ابداع این روش دراواخرقرن نوزدهم است:

فرض‌کنیم مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}_0$ وتابعی چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ وجود داردکه:

(ط۱) s پوشا نیست: عضوی چون $0 \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $s(n) \neq 0$.

(ط۲) s یك به یك‌است: اگر $s(m)=s(n)$ آنگاه $m=n$.

(ط۳) اگر $S \subseteq \mathbb{N}_0$ چنان‌باشدکه $0 \in S$؛ وبه‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}_0$، $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$. آنگاه $S = \mathbb{N}_0$.

هیچ تضمینی وجود ندارد که چنین مجموعهٔ $\mathbb{N}_0$ ی وجود داشته باشد، لذا باید وجود آن‌را هم به‌عنوان یك‌اصل موضوع بنیادی بپذیریم:

اصل موضوع وجوداعداد طبیعی. مجموعه‌ای چون $\mathbb{N}_0$ وتابعی چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ باخواص (ط۱) ـ (ط۳) وجود دارد.

باهمین چند اصل، می‌توانیم تمام خواص معمولی حساب‌را عرضه‌کنیم وبپرورانیم، بعداً هم دستگاههای دیگر اعداد، شامل اعداد حقیقی ومختلط، را بسازیم. همچنین خواهیم دیدکه‌اصل موضوع (ط۳) چطور براثبات به‌روش استقرا محیط می‌شود. مورد سادهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

قضیهٔ ۱. اگر $n \in \mathbb{N}_0$، $n \neq 0$، آنگاه عضو یکتایی چون $m \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد که $n = s(m)$.

اثبات. فرض‌کنیم $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n = s(m)$ یا به ازای $m \in \mathbb{N}_0\}$. مسلماً $0 \in S$. اگر $n \in S$ آنگاه یا $n = 0$، که دراین‌صورت $s(n) = s(0)$ ولذا $s(n) \in S$؛ یا $n = s(m)$، و $s(n) = s(s(m))$ که $s(m) \in \mathbb{N}_0$، ولذا $s(n) \in S$. ازاین‌رو، بنا به‌اصل موضوع (ط۳)، $S = \mathbb{N}_0$. این امرنشان می‌دهدکه یك m مطلوب وجود دارد. یکتایی‌آن از (ط۲) نتیجه می‌شود. □

قضیهٔ ۱ بیان می‌کندکه ۰ تنها عضوی است‌که تالی نیست، واین خاصیتی است‌که آن‌را از دیگر اعضا متمایز می‌کند. مجموعهٔ $\mathbb{N}_0 - \{0\} = \mathbb{N}$ را مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌نامیم. $s(0)$ را با ۱ نشان می‌دهیم. این عضو ۱ در $\mathbb{N}$ است وخواهیم دیدکه از اهمیت خاصی برخوردار است.

---

1. Peano

یکبار دیگر به‌اثبات قضیهٔ ۱ توجه می‌کنیم. ساخت اصلی آن تشکیل می‌شود از تعریف مجموعه‌ای چون S، وسپس

(یك) اثبات $0 \in S$،

(دو) اثبات $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$،

(سه) استفاده از اصل موضوع (ط۳) جهت استنتاج $S = \mathbb{N}_0$.

الگوی اثبات به‌روش استقرا همیشه همین است.

S در عمل به‌صورت

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid P(n)\}$$

است که در آن $P(n)$ گزاره‌نمایی است که می‌دانیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$ یا درست است یا نادرست. احکام (یك)، (دو)، (سه) چنین برگردان می‌شوند:

'(یك) اثبات درستی $P(0)$،

'(دو) اثبات اینکه اگر $P(n)$ درست باشد آنگاه $P(S(n))$ هم درست است.

'(سه) استفاده از (ط۳) جهت استنتاج درستی $P(n)$ به‌ازای همهٔ $n \in \mathbb{N}_0$. استفاده از اصل موضوع (ط۳)، اثبات‌را بدون هیچ اشاره‌ای به برهانی از نوع «والی‌آخر...» به پایان می‌رساند. خواننده می‌تواند اسکلت اساسی‌این روش‌را درقضیه‌ای‌که درآغاز فصل بیان شد ملاحظه‌کند، بااین استثناکه درآنجا به‌جای ۰ با ۱ شروع‌کردیم وبه‌جای $s(n)$ نوشتیم $n+1$. بعداً نشان می‌دهیم‌که اگر باهر $k \in \mathbb{N}_0$، به ویژه با $k = 1$، هم شروع کنیم، بازهم این روش به‌کار می‌رود، ولذا قضیهٔ ابتدای فصل صرفاً مثال ساده‌ای ازاثبات استقرایی است‌که به‌اصل موضوع (ط۳) وابسته است.

درعمل ممکن است به اصل موضوع (ط۳) صریحاً اشاره نشود. اثبات‌را می‌توانیم تماماً برحسب گزاره‌نمایی چون $P(n)$ بیان‌کنیم، و پس‌از اثبات مراحل '(یك)، و '(دو)، بگوییم‌که حکم «$P(n)$ به‌ازای همهٔ nها درست است» بنا به‌استقرا ثابت شد. خواننده همواره باید این‌را به‌عنوان استفاده‌ای ضمنی ازاصل موضوع (ط۳)، که به‌همین دلیل‌هم اصل موضوع استقرا نامیده می‌شود، تعبیرکند. درجریان چنین اثباتی، فرض درست بودن $P(n)$ را فرض استقرا واثبات‌اینکه $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ را مرحلهٔ استقرا می‌نامند. فعلاً که آغاز بررسی $\mathbb{N}_0$ است، مجموعهٔ S را همواره به طورصریح بیان خواهیم کرد.

تعریف به استقرا

مهمترین مطلبی‌که باید مورد توجه قرارگیرد حساب در $\mathbb{N}_0$ است. ابتدا باید عملهای اصلی جمع وضرب‌را تعریف‌کنیم. عمل جمع‌را می‌توانیم باقراردادن

$$m+0 = m, \qquad (1)$$

به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}_0$، تعریف‌کنیم وسپس $m+s(n)$ را برحسب $m+n$ به‌وسیلهٔ

$$m+s(n)=s(m+n)\,. \qquad (۲)$$

به‌نظر می‌رسد که اصل موضوع استقرا، هم برای اثباتها طراحی شده است و هم برای تعاریف. ولی نقصی، ناشی‌از تفاوتی بنیادی بین‌اثبات وتعریف، وجود دارد که باید برطرف شود. دراثبات به‌روش استقرا، مرحلهٔ استقرایی $n\in S\Rightarrow s(n)\in S$ تنها متضمن نشان‌دادن این است که اگر $n\in S$ درست باشد، آنگاه $s(n)\in S$ نیز درست است؛ در حقیقت لازم نیست بدانیم که آیا $n\in S$ درست‌است یانه. ولی برای ارائه تعریفی استقرایی برای‌جمع، جهت امکان تعریف $m+s(n)$ به وسیلهٔ (۲)، قطعاً ضرور است که ابتدا مقدار $m+n$ را بشناسیم. البته، الگوی شهودیمان $\mathcal{N}$ حاکی است که اگربا (۱) شروع کنیم می‌توانیم مرحلهٔ (۲) را n مرتبه به‌کار ببریم و $m+n$ را به دست آوریم. متأسفانه چنین حکمی در $\mathbb{N}$ اثبات نشده‌است؛ درواقع‌اگر $m\in\mathbb{N}$ مفروض باشد، هنوزنمی‌دانیم که اگربا ۰ شروع کنیم وتالی‌های $s(۰)=۱$، $s(۱)=۲$، والی آخر را بـه‌دست آوریم، سرانجام بـه m می‌رسیم. در واقع قصد ما این است که برهانهای «والی‌آخر...» را حذف کنیم. راه رفـع این نقص این است که یك‌اصل‌کلی درمورد درستی‌اینگونه تعریفها به‌اثبات برسانیم. گرچه اصول‌کلی‌تری هم وجود دارند، ولی‌ما حکمی‌را اثبات می‌کنیم که کلیهٔ موارد موجود در این فصل‌را شامل می‌شود.

قضیهٔ ۲. (قضیهٔ بازگشتی). اگر X یك مجموعه، $f:X\to X$ یك تابع، و $c\in X$ باشد، آنگاه تابعی یکتاچون $\phi:\mathbb{N}_۰\to X$ وجود دارد که:

(یك) $\phi(۰)=c$،

(دو) به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}_۰$، $\phi(s(n))=f(\phi(n))$.

بحث پیش‌از اثبات. برحسب نمادهای مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌ها ازفصل ۵، تابعی چون $\phi:\mathbb{N}_۰\to X$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}_۰\times X$ است باخواص:

(I) اگر $n\in\mathbb{N}_۰$، $x\in X$ وجود دارد که $(n,x)\in\phi$،

(II) اگر $(n,y)\in\phi$ و (n,x)، آنگاه $x=y$.

پس برای تعریف ϕ کافی است زیرمجموعهٔ متناظرش را مشخص کنیم. حال با برگرداندن صورت قضیه، این زیر مجموعه باید دارای خواص زیر باشد:

(الف) $(۰,c)\in\phi$،

(ب) $(n,x)\in\phi\Rightarrow(s(n),f(x))\in\phi$.

ولی زیرمجموعه‌های بسیاری، چون خود $\mathbb{N}_۰\times X$، بااین خواص وجود دارند. آن‌یکی که مورد نظرماست، اشتراك همهٔ این زیرمجموعه‌هاست، زیرا تنها این زیرمجموعه خواص (I) و (II) را ارضا می‌کند.

اثبات. فرض کنیم ϕ اشتراك همهٔ زیرمجموعه‌هایی چون U از $\mathbb{N}_۰\times X$ باشد که

$$(۰,c)\in U\,, \qquad (۳)$$

$$(n, x) \in U \Rightarrow (s(n), f(x)) \in U . \qquad (۴)$$

آنگاه ϕ هردوی این خواص را ارضا می‌کند؛ به‌علاوه، این کوچکترین مجموعه‌ای است که این خواص‌را دارد. حال باید ثابت کنیم که ϕ در واقع یك تابع است، که به‌معنای بررسی (I) و (II) می‌باشد.

اگر فرض کنیم

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 | (n, x) \in \phi \text{، به‌ازای } x \in X \text{ یکی}\}$$

(I) به آسانی ثابت می‌شود، زیرا (الف) می‌گوید که $S \in 0$ و (ب) می‌گوید که $n \in S \Rightarrow s(n) \in S$. بنا به‌استقرا $S = \mathbb{N}_0$.

(II) کمی پیچیده‌تر است (ولی نه زیاد). فرض کنیم

$$T = \{n \in \mathbb{N}_0 | (n, x) \in \phi \text{، به‌ازای } x \in X \text{ یکتایی}\} .$$

می‌دانیم که $(0, c) \in \phi$. اگر همچنین $(0, d) \in \phi$، و $c \neq d$، فرض می‌کنیم

$$\phi^- = \phi - \{(0, d)\} .$$

آنگاه ϕ^-، در (۳) صدق می‌کند؛ واگر $(n, x) \in \phi^-$ آنگاه $(s(n), f(x)) \in \phi$ و برابر $(0, d)$ هم نیست زیرا بنا به اصل موضوع (ط۱)، $s(n) \neq 0$. لذا $f(x)) \in \phi^-$ و $s(n)$)، و ϕ^- در (۴) صدق می‌کند. از آنجا که ϕ کوچکترین مجموعه‌ای است که در (۳) و (۴) صدق می‌کند، این یك تناقض است؛ پس این d وجود ندارد، ولذا $0 \in T$.

مرحلهٔ استقرا نیز به همین نحو اثبات می‌شود. اگر $n \in T$ آنگاه، به‌ازای دقیقاً یك $x \in X$، $(n, x) \in \phi$). از (ب) داریم $(s(n), f(x)) \in \phi$)؛ پس برای اثبات $s(n) \in T$ باید نشان دهیم که هیچ زوج مرتب دیگری چون $(s(n), y) \in \phi$ وجود ندارد که $y \neq f(x)$. اگر به‌فرض محال چنین زوجی وجود داشته باشد، $\phi^* = \phi - \{(s(n), y)\}$ را درنظر می‌گیریم. چون $s(n) \neq 0$، بازهم می‌بینیم که ϕ^* در (۳) صدق می‌کند. برای بررسی (۴) لازم است ثابت کنیم که

$$\text{به‌ازای هر } m \in \mathbb{N}_0 \text{، } (m, z) \in \phi^* \Rightarrow (s(m), f(z)) \in \phi^* .$$

حال به‌ازای $m = n$ این گزاره صادق است، زیرا فقط یك $x \in X$ داریم که $(n, x) \in \phi$، وبنا به (ب)، به‌ازای این x، $(s(n), f(x)) \in \phi$ واین هم برابر با $(s(n), y)$ نیست زیرا $y \neq f(x)$. اگر $m \neq n$، بنا به (ب) داریم $(s(m), f(z)) \in \phi$)، و بنا به (ط۲)، $s(m) \neq s(n)$. پس $(s(m), f(x)) \neq (s(n), y)$)، ونتیجه اینکه $(s(m), f(z)) \in \phi^*$. درهرحال، ϕ^* در (۴) صدق می‌کندومجدداً به‌یك تناقض می‌رسیم. بنا به‌استقرا $T = \mathbb{N}_0$، واثبات کامل می‌شود. □

به‌عنوان مثالهایی برای استفاده ازقضیهٔ بازگشتی داریم:

(۱) جمع. $\phi_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$، $\phi_m(n) = m+n$، با تعریف

$$\phi_m(0) = m$$

$$\phi_m(s(n)) = s(\phi_m(n)).$$

در اینجا $c = m$ و $f = s$.

(۲) ضرب. $\mu_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$، $\mu_m(n) = mn$، با تعریف

$$\mu_m(0) = 0$$

$$\mu_m(s(n)) = \mu_m(n) + m.$$

در اینجا $c = 0$، $f(r) = r+m$.

(۳) توان. $\pi_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$، $\pi_m(n) = m^n$، با تعریف

$$\pi_m(0) = 1$$

$$\pi_m(s(n)) = m\pi_m(n).$$

در اینجا $c = 1$، $f(r) = rm$.

(۴) ترکیب مکرر یک تابع $f : X \to X$، با تعریف

$$f^0(x) = x$$

به ازای هر $x \in X$، $f^{s(n)}(x) = f(f^n(x))$.

قواعد حساب

حال که جمع و ضرب به‌روش مناسبی تعریف شدند، اثبات قواعد معمولی حساب امر نسبتاً ساده‌ای است. البته اگر خواننده سعی کند بدون هیچ‌گونه راهنمایی خودش این قواعد را اثبات کند، پی‌خواهد برد که اثباتها خیلی هم بدیهی نیستند. ابزار اصلی استقرا، و مشکل اصلی یافتن بهترین ترتیب جهت اثبات مطالب است. تصور می‌کنیم خواننده با استعداد بتواند مطالب زیررا به‌نحو بهتری هم عرضه کند.

برای ارجاع، تعاریف را یادآوری می‌کنیم:

$$(\text{یک } \alpha)\ m+0 = m, \qquad (\text{دو } \alpha)\ m+s(n) = s(m+n),$$

$$(\text{یک } \mu)\ m0 = 0, \qquad (\text{دو } \mu)\ ms(n) = mn+m.$$

حال از (دو α) و (یک α) درمی‌یابیم که $m+s(0) = s(m+0) = s(m)$. قبلاً $s(0)$ را با ۱ نشان دادیم، پس $s(m) = m+1$.

لم ۳. به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}_0$:

(الف) $0+m=m$،
(ب) $1+m=s(m)$،
(پ) $0m=0$،
(ت) $1m=m$.

اثبات. درهرمورد ازاستقرا روی m استفاده می‌شود. (الف) را ثابت، و بقیه‌را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. فرض‌کنیم

$$S=\{m\in \mathbb{N}_0 \mid 0+m=m\}.$$

بنا به (α یك)، واضح است‌که $0\in S$. حال‌اگر $m\in S$ آنگاه $0+m=m$، لذا بنابه (α دو)، $0+s(m)=s(0+m)=s(m)$. بنابراین $s(m)\in S$. بنا به (ط۳)، $S=\mathbb{N}_0$. □

قضیهٔ ۴. به ازای هر $m, n, p\in \mathbb{N}_0$:
(الف) $(m+n)+p=m+(n+p)$،
(ب) $m+n=n+m$،
(پ) $(mn)p=m(np)$،
(ت) $mn=nm$،
(ث) $m(n+p)=mn+mp$.

اثبات. (الف) با استفاده از

$$S=\{p\in \mathbb{N}_0 \mid (m+n)+p=m+(n+p)\}$$

واستقرا روی p ثابت می‌شود. اولاً

$$\begin{aligned}(m+n)+0&=m+n && \text{بنا به (α یك)}\\ &=m+(n+0) && \text{بنا به (α یك)}\end{aligned}$$

لذا $0\in S$.
ثانیاً اگر $p\in S$ آنگاه

$$(m+n)+p=m+(n+p), \qquad (۵)$$

لذا

$$\begin{aligned}(m+n)+s(p)&=s((m+n)+p) && \text{بنا به (α دو)}\\ &=s(m+(n+p)) && \text{بنا به (۵)}\\ &=m+s(n+p) && \text{بنا به (α دو)}\end{aligned}$$

$$= m+(n+s(p)) \qquad \text{(دو } \alpha \text{ بنا به)}$$

ودر نتیجه $s(p) \in S$. بنا به‌استقرا، $S = \mathbb{N}_0$.

(ب) را با استقرا روی n و با استفاده از

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 | m+n = n+m\}$$

ثابت می‌کنیم. لم ۳ (الف) نشان می‌دهدکه $0 \in S$. اگر $n \in S$، آنگاه

$$m+n = n+m, \qquad (۶)$$

ولذا

$$\begin{aligned} m+s(n) &= s(m+n) && \text{(دو } \alpha \text{ بنا به)} \\ &= s(n+m) && \text{(۶) بنا به} \\ &= n+s(m) && \text{(دو } \alpha \text{ بنا به)} \\ &= n+(1+m) && \text{(ب) بنا به لم۳} \\ &= (n+1)+m && \text{بنا به‌قضیهٔ۴ (الف)} \\ &= s(n)+m, \end{aligned}$$

وبنابراین $s(n) \in S$. بنا به‌استقرا، $S = \mathbb{N}_0$، وازاینجا (ب) هم اثبات می‌شود.

اینك بهتراست، بااستفاده از استقرا روی p، (ث) را ثابت کنیم. فرض‌کنیم

$$S = \{p \in \mathbb{N}_0 | m(n+p) = mn+mp\} .$$

آنگاه

$$\begin{aligned} m(n+0) &= mn && \text{(یك } \alpha \text{ بنا به)} \\ &= mn+0 && \text{(یك } \alpha \text{ بنا به)} \\ &= mn+m0 && \text{(یك } \mu \text{ بنا به)} . \end{aligned}$$

و در نتیجه $0 \in S$.

اگر $p \in S$. آنگاه

$$m(n+p) = mn+mp \qquad (۷)$$

و لذا

$$\begin{aligned} m(n+s(p)) &= ms(n+p) && \text{(دو } \alpha \text{ بنا به)} \\ &= m(n+p)+m && \text{(دو } \mu \text{ بنا به)} \\ &= (mn+mp)+m && \text{(۷) بنا به} \end{aligned}$$

$$= mn + (mp + m) \quad \text{(الف) بنا به}$$

$$= mn + ms(p) \quad \text{(دو) بنا به } \mu$$

واز اینجا $s(p) \in S$، واستقرا نتیجه می‌دهد که $S = \mathbb{N}_0$.

حال اثبات (پ) نسبتاً ساده است واز همان نوع اثباتهای قبلی است. پس (ت) باقی می‌ماند که قدری پیچیده‌تر است. فرض کنیم

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid mn = nm\} .$$

بنا به لم۳ (پ)، $0 \in S$. اگر $n \in S$ آنگاه

$$mn = nm \qquad (۸)$$

دادیم

$$ms(n) = mn + m, \quad \text{(دو) بنا به } \mu$$

$$= nm + m. \quad \text{و بنا به (۸)،}$$

اگر می‌توانستیم نشان دهیم که این مقدار برابر با $s(n)m$ است اثبات تمام بود، ولی متأسفانه هنوز این‌را نمی‌دانیم. ولی می‌توانیم آن‌را بااستقرای دیگری روی m اثبات کنیم. فرض کنیم

$$T = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid nm + m = s(n)m\} .$$

آنگاه $0 \in T$، واگر $m \in T$ آنگاه

$$nm + m = s(n)m, \qquad (۹)$$

ولذا

$$ns(m) + s(m) = n(m+1) + (m+1)$$

$$= (nm + n) + (m+1) \quad \text{(ث) بنا به}$$

$$= nm + (n + (m+1)) \quad \text{(الف) بنا به}$$

$$= nm + ((n+m) + 1) \quad \text{(الف) بنا به}$$

$$= nm + ((m+n) + 1) \quad \text{(ب) بنا به}$$

$$= nm + (m + (n+1)) \quad \text{(الف) بنا به}$$

$$= (nm + m) + (n+1) \quad \text{(الف) بنا به}$$

$$= s(n)m + s(n) \quad \text{(۹) بنا به}$$

$$= s(n)s(m) \quad \text{(دو) بنا به } \mu$$

ولذا $s(m)\in T$ و $T=\mathbb{N}_0$. بنابراین، با بازگشت به‌نقطه‌ای که توقف کرده بودیم داریم، $s(n)\in S$ و $S=\mathbb{N}_0$. این‌امر (ت) را ثابت می‌کند. □

حال‌که این تمرین حجیم استقرایی انجام شد، می‌توانیم این نتایج مربوط به‌حساب را آزادانه به‌کار ببریم. نخست $n+1$ را جانشین $s(n)$ می‌کنیم. در این صورت اصل موضوع استقرا صورت مأنوس‌تری به‌خود می‌گیرد:

اگر $S\subseteq\mathbb{N}_0$، $0\in S$، و $n\in S\Rightarrow n+1\in S$، آنگاه $S=\mathbb{N}_0$.

اصل موضوع (ط۲) هم به‌صورت

$$m+1=n+1\Rightarrow m=n$$

برگردانده می‌شود، و این‌اصل‌را می‌توان با استفاده‌از استقرا تعمیم داد وچنین به‌دست‌آورد:

قضیهٔ ۵. به‌ازای هر $m,n,q\in\mathbb{N}_0$:

(الف) $m+q=n+q\Rightarrow m=n$،

(ب) $q\neq 0$، $mq=nq\Rightarrow m=n$.

اثبات. (الف) ازاستقرا روی q استفاده می‌کنیم.فرض‌کنیم

$$S=\{q\in\mathbb{N}_0 \mid m+q=n+q\Rightarrow m+n\}.$$

واضح است‌که $0\in S$. اگر $q\in S$، فرض می‌کنیم

$$m+(q+1)=n+(q+1).$$

آنگاه، بنابه قضیهٔ ۴،

$$(m+q)+1=(n+q)+1,$$

لذا بنابه (ط۲)،

$$m+q=n+q$$

وچون $q\in S$،

$$m=n.$$

بنابراین $q+1\in S$، وبنا به‌استقرا $S=\mathbb{N}_0$.

(ب) فرض‌کنیم

$$S=\{m\in\mathbb{N}_0 \mid q\neq 0,\ mq=nq\Rightarrow m=n\}.$$

برای اثبات $0\in S$، فرض می‌کنیم $q\neq 0$ و

$$nq=0q=0.$$

آنگاه به‌ازای عددی چون p داریم $q=p+1$. اگر $n\neq 0$ آنگاه $n=r+1$. پس $nq=(Pr+p+r)+1$ نمی‌تواند ۰ باشد. بنابراین $n=0$، و $0\in S$.

حال فرض کنیم $m\in S$، $q\neq 0$، و

$$(m+1)q=nq\ .$$

مانندقبل، داریم $n\neq 0$، لذا به‌ازای $r\in\mathbb{N}_0$، $n=r+1$. آنگاه $mq+q=rq+q$. بنابه قسمت (الف)، $mq=rq$؛ بنابه فرض، $m=r$. درنتیجه $m+1=n$. این مطلب، اثبات‌را کامل می‌کند. □

اکنون می‌توانیم تفریق را مورد بحث قراردهیم. فرض کنیم $p=r+q$. بنابه‌قضیهٔ ۵، r توسط p و q به طور یکتا به‌دست می‌آید. بنابراین r را با $p-q$ نمایش می‌دهیم. به‌ازای $m, n\in\mathbb{N}_0$، رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$m\geqslant n \iff \exists\, r\in\mathbb{N}_0,\ m=r+n$$

تعریف می‌کنیم. اگر $m, n\in\mathbb{N}_0$، تفاضل $m-n$ فقط وقتی تعریف می‌شودکه $m\geqslant n$. بااین شرایط می‌توانیم قواعد مختلف تفریق‌را طبق نیاز اثبات‌کنیم؛ ازجمله :

به‌ازای $m\geqslant n\geqslant r$، $m-(n-r)=(m-n)+r$،

به‌ازای $n\geqslant r$، $m+(n-r)=(m+n)-r$،

به‌ازای $n\geqslant r$، $m(n-r)=mn-mr$.

اثبات همهٔ اینها ساده است؛ مثلاً، آخری چنین اثبات می‌شودکه

$$n=s+r \quad (\text{چون } n\geqslant r)،$$

در نتیجه

$$mn=m(s+r)=ms+mr\ .$$

لذا بنابه تعریف،

$$mn-mr=ms=m(n-r)$$

زیرا $s=n-r$.

تقسیم‌را نیز می‌توانیم بررسی کنیم، ودرصورتی‌که $m=rn\ (n\neq 0)$، می‌توانیم r را با m/n نمایش دهیم. این سؤال‌را کـه چه وقت تقسیم امکان‌پذیـر است دربخش بعد مورد بحث قرار خواهیم داد.

ترتیب در اعداد طبیعی

قبلاً در $\mathbb{N}_0$ رابطهٔ $\geqslant$ را تعریف کردیم. رابطه‌های ترتیبی دیگر چنین تعریف می‌شوند:

$$m>n \iff m\geqslant n \,\&\, m\neq n,$$

$$m\leqslant n \iff n\geqslant m,$$

$$m<n \iff n>m.$$

باید ثابت کنیم که این رابطه‌ها در واقع، به‌معنای فصل ۴ ، رابطه‌های ترتیبی هستند. مثلاً

قضیهٔ ۶. به‌ازای هر $m, n, p\in \mathbb{N}_0$ ، $m\geqslant n,\ n\geqslant p \Rightarrow m\geqslant p$.

اثبات. اعدادی چون r و $s\in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $m=r+n$، و $n=s+p$.
بنابراین $m=r+(s+p)=(r+s)+p$، لذا $m\geqslant p$. □

اثبات خاصیت دوم رابطه‌های ترتیبی نیز آسان است:

قضیهٔ ۷. اگر $m, n\in \mathbb{N}_0$ ، $m\geqslant n$، و $n\geqslant m$، آنگاه $m=n$.

اثبات. اعدادی چون $r, t\in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $m=r+n$، و $n=t+m$؛ لذا $m=r+t+m$. بنا به قضیهٔ ۵ (الف)، $r+t=0$. $t\neq 0$ نمی‌تواند باشد، زیرا بنا به قضیهٔ ۱ نتیجه می‌گیریم که به ازای عضوی چون $q\in \mathbb{N}_0$، $t=q+1$، و سپس $(r+q)+1=0$، که متناقض اصل موضوع (ط ۱) است. بنابراین $t=0$، ولذا $n=m$. □

خاصیت سوم رابطهٔ ترتیبی نیاز به یک اثبات فنی‌تری دارد که به قضیهٔ ۱۲ موکول می‌شود. ولی اثبات این مطلب که این روابط تحت عملهای حساب در $\mathbb{N}_0$ همان طور رفتار می‌کنند که انتظار می‌رود، امر ساده‌ای است:

قضیهٔ ۸. به‌ازای هر $m, n, q\in \mathbb{N}_0$:
(الف) اگر $m\geqslant n$، و $p\geqslant q$، آنگاه $m+p\geqslant n+q$،
(ب) اگر $m\geqslant n$، و $p\geqslant q$، آنگاه $mp\geqslant nq$.

اثبات. (الف) اعدادی چون $r, s\in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $m=r+n$، و $p=s+q$.
ازاین‌رو، پس از ساده کردن، می‌بینیم که $m+p=(r+s)+(n+q)$.
(ب) به‌همین نحو داریم $mp=nq+(rs+ns+rq)$. □

عضو صفر ۰ کوچکترین عضو $\mathbb{N}_0$ است، به‌این معنی که:

لم ۹. اگر $m\in \mathbb{N}_0$ آنگاه $m\geqslant 0$.

اثبات. $m = ۰ + m$. □

عضو ۱ کوچکترین عضو بعدی است:

لم ۱۰. اگر $m \in \mathbf{N}_۰$، $m > ۰$ آنگاه $m \geqslant ۱$.

اثبات. بنا به قضیهٔ ۱، اگر $m \neq ۰$ آنگاه به ازای عضوی چون $q \in \mathbf{N}_۰$، $m = q + ۱$. بنابراین $m \geqslant ۱$. □

به‌همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که بعداز ۱، $۱ + ۱ = ۲$ کوچکترین عضو است، سپس بعداز ۲، $۱ + ۲ = ۳$ کوچکترین است، والی آخر. مفیدتر است که دراین مورد قضیه‌ای کلی به‌اثبات برسد:

قضیهٔ ۱۱. اگر $m, n \in \mathbf{N}_۰$، $m > n$ و $m \geqslant n + ۱$ آنگاه.

اثبات. به‌ازای $r \in \mathbf{N}_۰$ی داریم $m = n + r$؛ و $r \neq ۰$ زیرا $m \neq n$. بنا به قضیهٔ ۱، به ازای عضوی چون $q \in \mathbf{N}_۰$، $r = q + ۱$، لذا $m = (n + ۱) + q$، و $m \geqslant n + ۱$. □

حال اثبات اینکه $\geqslant$ به‌معنای فصل ۵ یك رابطهٔ ترتیبی است‌را می‌توان کامل کرد.

قضیهٔ ۱۲. رابطهٔ $\geqslant$ یك رابطهٔ ترتیبی (ضعیف) روی $\mathbf{N}_۰$ است.

اثبات. بنا به‌تعریف، باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $m, n, p \in \mathbf{N}_۰$،
(تض ۱) $m \geqslant n \,\&\, n \geqslant p \Rightarrow m \geqslant p$،
(تض ۲) یا $m \geqslant n$ یا $n \geqslant m$،
(تض ۳) اگر $m \geqslant n$ و $n \geqslant m$، آنگاه $m = n$.
(تض ۱) و (تض ۳) را قبلاً درقضیه‌های ۶ و ۷ اثبات کردیم. برای اثبات (تض ۲)، فرض می‌کنیم

$$S(m) = \{n \in \mathbf{N}_۰ \mid n \geqslant m \text{ یا } m \geqslant n\}.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که به‌ازای هر $m \in \mathbf{N}_۰$، $S(m) = \mathbf{N}_۰$. به‌ازای هر m مفروضی، داریم $۰ \in S(m)$، زیرا $m \geqslant ۰$. حال فرض کنید $n \in S(m)$. داریم $m \geqslant n$ یا $n \geqslant m$. اگر $n \geqslant m$ آنگاه $n + ۱ \geqslant m$. اگر $m \geqslant n$ آنگاه یا $n = m$، و $m \leqslant n + ۱$، یا $m > n$ که دراین صورت بنا به‌قضیهٔ ۱۱، $n + ۱ \leqslant m$. لذا $n + ۱ \in S(m)$. بنابه استقرا، طبق انتظار $S(m) = \mathbf{N}_۰$. □

همان طور که درفصل ۴ متذکرشدیم، نتیجه می‌گیریم که $<$ یك رابطهٔ ترتیبی اکید

است. یعنی، به‌ازای هر $m, n, p \in \mathbf{N}_0$،

$$m > n \& n > p \Rightarrow m > p,$$

و دقیقاً یکی از روابط $m > n$، $m = n$، و $m < n$ درست است (قانون سه‌گانگی). قضیهٔ بعد تقریباً عکس قضیهٔ ۵ است.

قضیهٔ ۱۳. به‌ازای هر $m, n, q \in \mathbf{N}_0$:

(الف) $m+q > n+q \Rightarrow m > n$،

(ب) بافرض $q \neq 0$، $mq > nq \Rightarrow m > n$.

اثبات. (الف) اگر $m \not> n$، آنگاه بنابه‌قانون سه‌گانگی، $m \leqslant n$. ولی بنا به‌قضیهٔ ۸ (الف)، $m \leqslant n$ نتیجه می‌دهد $m+q \leqslant n+q$. این مطلب متناقض فرض است، و لذا قسمت (الف) اثبات می‌شود. قسمت (ب) به‌طور مشابه ثابت می‌شود. □

البته اگر $\geqslant$ را به‌جای $>$ درنظر بگیریم، بازهم قضیهٔ ۱۳ معتبر است، ودراین صورت قضیهٔ اخیر دقیقاً عکس قضیهٔ ۵ خواهد بود.

یکتایی $\mathbf{N}_0$

مجموعهٔ $\mathbf{N}_0$ ، عملیات، وترتیبش، به‌معنی کاملاً مشخصی یکتا هستند. به‌عنوان‌مثالی پیش‌پا افتاده، دستگاه شمارش انگلیسی «وان، تو، تری، . . .»، با وجودی که بی‌تردید باشمارش فارسی «یك، دو، سه، . . .» متفاوت است، دارای همان ساخت حسابی‌است. برای مشاهدهٔ این مطلب، ملاحظه می‌کنیم که درترجمهٔ انگلیسی به‌فارسی باجانشین‌کردن «یك» به‌جای «وان»، «دو» به‌جای «تو»، والی‌آخر، حساب معتبرانگلیسی به‌حساب‌معتبرفارسی، وبرعکس، تبدیل می‌شود. درمورد $\mathbf{N}_0$ نیزهمین طور است. فرض‌کنیم بتوانیم مجموعهٔ دیگری چون $\mathbf{N}'_0$ وتابعی چون $s' : \mathbf{N}'_0 \to \mathbf{N}'_0$ پیداکنیم که در اصول موضوع متناظر، (ط ۱′) ـ (ط ۳′) صدق کنند. آنگاه تابع $\phi : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}'_0$ را با

$$\phi(0) = 0'$$

$$\phi(s(n)) = s'(\phi(n)),$$

به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}_0$، تعریف می‌کنیم . این تابع، بنابه قضیهٔ بازگشتی، وجود دارد؛ تابعی چون $\varphi : \mathbf{N}'_0 \to \mathbf{N}_0$ باتعریف

$$\varphi(0') = 0$$

$$\varphi(s'(m)) = s(\varphi(m)),$$

به‌ازای هر $m \in \mathbf{N}'_0$، وجود دارد.

یك اثبات سادهٔ استقرایی نشان می‌دهد که ϕ و φ وارون یکدیگرند. فرض می‌کنیم $S=\{n\in \mathbb{N}_0 \mid \varphi\phi(n)=n\}$ ونشان می‌دهیم که $S=\mathbb{N}_0$، وبه‌همین‌نحو ثابت می‌کنیم که $\phi\varphi=1_{\mathbb{N}'_0}$. استقرا روی n همچنین نشان می‌دهد که

$$\phi(m+n)=\phi(m)+\phi(n),$$

$$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n),$$

و

$$m\geqslant n \Rightarrow \phi(m)\geqslant\phi(n).$$

لذا تابع دوسویی ϕ بین $\mathbb{N}_0$ و $\mathbb{N}'_0$، حساب و ترتیب‌را حفظ می‌کند: می‌توانیم ازآن برای «برگرداندن» نتایج معتبر دریکی به‌نتایج معتبر دردیگری استفاده‌کنیم. چنین تابع دوسویی‌را یك یکریختی ترتیبی[1] می‌نامند. بااین معنی، دستگاهی‌که (ط۱)ـ(ط۳)را ارضا می‌کند ساخت منحصر به‌فرد دارد: تمام‌این دستگاهها یکریخت ترتیبی یکدیگرند. همهٔ خواص اعداد طبیعی درسه‌اصل موضوع ساده خلاصه می‌شود!

پس یکی‌از دستگاههایی‌که می‌تواند این اصول موضوع را ارضاکند، همان مفهوم شهودیمان $\mathcal{N}\cup\{0\}$ است، ولذا این دستگاه باید به‌روش بدیهی متناظر با $\mathbb{N}_0$ باشد. تفاوت اساسی آنها دراین است‌که خواص موردنظر دربارهٔ $\mathcal{N}\cup\{0\}$ بامثال و تجربه به دست آمده، وحال‌آنکه خواص $\mathbb{N}_0$ به‌طور منطقی ازاصول موضوع استنتاج شده‌اند. پس برای همهٔ خواص عادی مربوط به $\mathcal{N}\cup\{0\}$ می‌توان توجیه دقیقی ارائه داد. مثلاً می‌توانیم اعضای $\mathbb{N}_0$ را بااستفاده‌ازنماد دهدهی نامگذاری‌کنیم وجداول جمع وضرب‌را محاسبه نماییم. فعلاً، ارجح است‌که این نکات فنی‌را خیلی عادی بپنداریم وازآنها صرفنظرکنیم.

شمارش

همچون درزندگی روزمره، می‌توانیم بااستفاده ازاعداد طبیعی «بشماریم». فرض‌کنیم به ازای $n\in\mathbb{N}$،

$$\mathbb{N}(n)=\{m\in\mathbb{N}\mid 1\leqslant m\leqslant n\},$$

و

$$\mathbb{N}(0)=\varnothing.$$

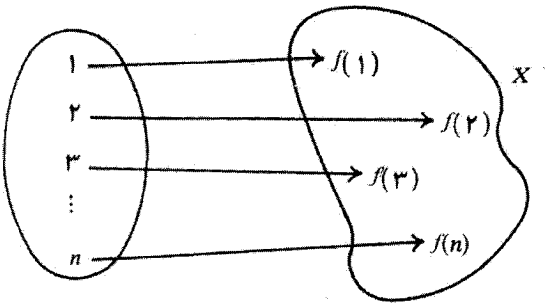
می‌گوییم مجموعه‌ای چون X دارای n عضو $(n\in\mathbb{N}_0)$ است اگر تابعی دو سویی چون

---

۱. کلمهٔ «یکریختی»، به‌تنهایی، معمولاً برای توابعی‌دوسویی‌که تمام‌عملهای حسابی (جبری) مربوط را حفظ می‌کنند به‌کار می‌رود. کلمهٔ «ترتیبی» برای تأکید براین مطلب به‌کارمی‌رود که ترتیب نیزحفظ می‌شود. این اصطلاح، برای دستگاههای متعدد دیگرریاضی‌هم‌کاربرد دارد.

$$f: \mathbf{N}(n) \to X$$

وجود داشته باشد. این مطلب الگویی برای ایدهٔ ابتدایی شمارش است:



اگر به‌ترتیب به‌اعضای $f(۱)$، $f(۲)$، ...، و $f(n)$ اشاره کنیم و آنهارا «۱، ۲، ...، n» بنامیم، آنگاه دقیقاً شیوهٔ متداول شمردن را رعایت کرده‌ایم. نماد مفید $\mathbf{N}(۰)=\varnothing$ به ما اجازه می‌دهد که این روند را برای مجموعهٔ تهی نیز به‌کار ببریم. اگر به‌ازای $n \in \mathbf{N}_۰$، مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، آن‌را باپایان، ودر غیراین صورت آن‌را بی‌پایان می‌نامیم.[۱]

این شیوهٔ شمارش، به‌ترتیب شمردن بستگی‌ندارد: اگردوسویی $f: \mathbf{N}(n) \to X$ و دوسویی $g: \mathbf{N}(m) \to X$ مفروض باشند، همواره داریم $m=n$. برای‌اثبات این‌مطلب، فرض می‌کنیم $\varphi = f^{-۱}g$. آنگاه $\varphi: \mathbf{N}(m) \to \mathbf{N}(n)$ یك دو سویی است. به‌روش استقرا ثابت می‌کنیم که اگر تابعی دو سویی بین $\mathbf{N}(m)$ و $\mathbf{N}(n)$ وجود داشته باشد، آنگاه $m=n$.

این مطلب یقیناً به‌ازای $m=۰$ درست است. فرض می‌کنیم مطلب به‌ازای $m \in \mathbf{N}_۰$ نیز درست باشد، ودوسویی

$$\theta: \mathbf{N}(m+۱) \to \mathbf{N}(k).$$

را درنظر می‌گیریم. حال $k \neq ۰$، یا در غیراین صورت $m+۱=۰$ که متناقض (ط۱) است. بنابراین به ازای $n \in \mathbf{N}_۰$ ی، $k=n+۱$. حال تابع دو سویی $\theta^*: \mathbf{N}(m+۱) \to \mathbf{N}(n+۱)$ را چنان می‌سازیم که $\theta^*(m+۱)=n+۱$. اگرداشته باشیم $\theta(m+۱)=n+۱$، آنگاه $\theta^*=\theta$ را اختیارمی‌کنیم. وگرنه عضوی چون $q \leqslant n$ وجود دارد که $\theta(q)=n+۱$، و لذا چنین تعریف می‌کنیم که

$$\theta^*(q)=\theta(m+۱),$$

$$\theta^*(m+۱)=n+۱,$$

---

۱. با پایان را متناهی وبی‌پایان را نامتناهی هم می‌نامند.ـــم.

و درسایرموارد، $\theta^*(r)=\theta(r)$.

حال θ^* را به‌تابعی چون

$$\theta^*|_{\mathbf{N}(m)} : \mathbf{N}(m) \longrightarrow \mathbf{N}(n)$$

محدود می‌کنیم. این تابع به وضوح دوسویی است، ولذا بنا به‌استقرا، $m=n$. بنابراین $m+۱=n+۱=k$، پس مرحلهٔ استقرایی کامل می‌شود.

این مطلب ایدهٔ شهودی شمارش دردستگاه صوری‌را توجیه می‌کند.

ابتکار فون نویمان[1]

اکنون برای تنوع، روش برجستهٔ جان‌فون‌نویمان برای توصیف اعداد طبیعی‌راکه درسال ۱۳۰۲ هجری شمسی (۱۹۲۳ میلادی) اعلام شد، ذکر می‌کنیم. این روش، که عدد n را به‌عنوان مجموعه‌ای با n عضو تعریف می‌کند، به‌خصوص برای شمارش مناسب است. برای شروع تنها یك انتخاب برای مجموعهٔ با ۰ عضو وجود دارد، پس قرار می‌دهیم

$$۰_{\mathrm{v}}=\varnothing .$$

(دراینجا اندیس v دراشاره به‌فون‌نویمان است). حال یك شیء به‌نام ۰_{v} داریم، لذا

$$۱_{\mathrm{v}}=\{۰_{\mathrm{v}}\}$$

را تعریف می‌کنیم‌که به‌طور آشکار مجموعه‌ای است بایك عضو. حال دو شیء داریم ۰_{v} و ۱_{v}، و لذا

$$۲_{\mathrm{v}}=\{۰_{\mathrm{v}}, ۱_{\mathrm{v}}\}$$

را تعریف می‌کنیم. اکنون روشن است‌که چطور باید ادامه داد. ملاحظه‌کنیدکه

$$\{۰_{\mathrm{v}}, ۱_{\mathrm{v}}\}=\{۰_{\mathrm{v}}\}\cup\{۱_{\mathrm{v}}\}=۱_{\mathrm{v}}\cup\{۱_{\mathrm{v}}\} .$$

پس‌از تعریف n_{v} به صورت

$$n_{\mathrm{v}}=\{۰_{\mathrm{v}}, ۱_{\mathrm{v}}, \cdots, (n-۱)_{\mathrm{v}}\}$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}(n+۱)_{\mathrm{v}} &= n_{\mathrm{v}}\cup\{n_{\mathrm{v}}\}\\ &=\{۰_{\mathrm{v}}, \cdots, (n-۱)_{\mathrm{v}}\}\cup\{n_{\mathrm{v}}\}\\ &=\{۰_{\mathrm{v}}, \cdots, n_{\mathrm{v}}\} .\end{aligned}$$

---

1. von Neumann, John

این تعریف را می‌توان به‌صورت صوری‌تر زیرهم بیان‌کرد. به‌ازای هرمجموعهٔ X، فرض کنیم

$$\sigma(X)=X\cup\{X\}$$

تالی X باشد. این تعریف دارای خاصیت عجیب

$$X\subseteq\sigma(X)\quad\text{و}\quad X\in\sigma(X)$$

است. حال مجموعه‌ای چون Ω را که اعضایش مجموعه هستند استقرایی می‌نامیم اگر

$$\varnothing\in\Omega\,,$$
$$X\in\Omega\Rightarrow\sigma(X)\in\Omega\,.$$

برای پرهیز ازتعریفی چون «والی‌آخر ...»، فون‌نویمان اصل موضوع زیررا وضع‌کرد:

اصل موضوع بینهایت. مجموعه‌ای استقرایی چون Ω وجود دارد.

این مجموعهٔ Ω ممکن است بزرگترازمجموعه‌ای باشدکه مورد نیازاست. ولی‌اگر $\mathbf{N}_\nu$ اشتراك همهٔ زیرمجموعه‌های استقرایی Ω باشد، آنگاه‌این مجموعه‌کوچکترین مجموعهٔ استقرایی‌است. ازاین‌رو، اگر $S\subseteq\mathbf{N}_\nu$ و S استقرایی‌باشد، نتیجه‌می‌گیریم‌که $S=\mathbf{N}_\nu$.

از آنجاکه $\mathbf{N}_\nu$ استقرایی است، داریم $\varnothing\in\mathbf{N}_\nu$، و $X\in\mathbf{N}_\nu\Rightarrow\sigma(X)\in\mathbf{N}_\nu$، لذا $\sigma:\mathbf{N}_\nu\to\mathbf{N}_\nu$ یك‌تابع‌است. همچنین، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}_\nu$، $\varnothing\neq\sigma(n)$، زیرا $n\in\sigma(n)$. ثابت می‌کنیم‌که σ یك به یك است.

ابتدا ملاحظه می‌کنیم‌که‌اگر $m,n\in\mathbf{N}_\nu$ و $m\in n$، آنگاه $m\subseteq n$. زیرا فرض‌کنیم

$$S=\{n\in\mathbf{N}_\nu\,|\,m\in n\Rightarrow m\subseteq n\}\,.$$

واضح است‌که $\varnothing\in S$ فرض‌کنیم $n\in S$ و $m\in\sigma(n)$. آنگاه $m\in n$ یا $m=n$. در هر دوحالت $m\subseteq n\cup\{n\}=\sigma(n)$. از این‌رو S زیرمجموعه‌ای استقرایی از $\mathbf{N}_\nu$ است، و لذا $S=\mathbf{N}_\nu$.

حال فرض کنیم $\sigma(m)=\sigma(n)$. آنگاه $m\cup\{m\}=n\cup\{n\}$. بنابراین $m\in n$ یا $m=n$. با توجه به یادآوری فوق، $m\subseteq n$. به همین نحو $n\subseteq m$، پس $m=n$ و σ یك به یك است.

باجمع‌بندی‌این یادآوریهاملاحظه‌می‌کنیم‌که $\mathbf{N}_\nu$ یك مجموعه‌است، $\sigma:\mathbf{N}_\nu\to\mathbf{N}_\nu$ یك تابع است، $\varnothing\in\mathbf{N}_\nu$، و داریم:

(یك) به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}_\nu$، $\varnothing\neq\sigma(n)$،

(دو) $\sigma(m)=\sigma(n)\Rightarrow m=n$،

(سه) اگر $S\subseteq\mathbf{N}_\nu$، $\varnothing\in S$، و $n\in S\Rightarrow\sigma(n)\in S$، آنگاه $S=\mathbf{N}_\nu$.

این خواص، همان اصول موضوع پئانو هستندکه درآن $\mathbf{N}_\nu$ به جای $\mathbf{N}$، σ به جای

s ، و $\emptyset$ به‌جای ۰ قرار گرفته است. لذا ایدهٔ فون‌نویمان بنیاد دیگری برای اعداد طبیعی به‌دست‌می‌دهد، و اصل موضوع بینهایتش به‌عنوان جانشینی‌برای اصل موضوع وجود اعداد طبیعی‌عمل می‌کند. می‌توانستیم به‌جای روش پئانو ازاین‌روش استفاده‌کنیم. ولی دردستگاه فون‌نویمان، ساده‌ترین راه شمارش‌این‌است که بگوییم، مجموعه‌ای چون X دارای n عضو است اگر تابعی دوسویی چون $f:n_{\nu} \longrightarrow X$، یعنی

$$f:\{0_{\nu}, 1_{\nu}, \ldots, (n-1)_{\nu}\} \longrightarrow X$$

وجود داشته باشد. واین‌امر به‌این معنی‌است که به‌جای‌شمارش ابتدایی‌تر «۱، ۲، ۳، ...، n» که به‌آن عادت‌کرده‌ایم، بشماریم «0_{ν}، 1_{ν}، 2_{ν}، ...، $(n-1)_{\nu}$».

صورتهای دیگر استقرا

در اثبات به روش استقرا، گاهی درمرحلهٔ استقرا به فرضی بیش از صادق بودن $P(n)$ نیازمندیم. ممکن‌است‌لازم‌باشدبدانیم که $P(1)$، $P(2)$، ...، $P(n)$ همه صادقند تابتوانیم به $P(n+1)$ برسیم . اصلی موسوم به «اصل عمومی استقرا» راه‌گشای این وضعیت است. اگر

(الف‌ع۱): $P(0)$ درست باشد، و

(الف‌ع۲): درستی $P(m)$، به‌ازای‌هر $m \in \mathbb{N}_0$ با $m \leqslant n$، درستی $P(m+1)$ را ایجاب‌کند،

آنگاه $P(n)$ به‌ازای همهٔ اعضای $n \in \mathbb{N}_0$ درست است.

ابتدا، به‌دلیل دقیقتر به‌نظررسیدن گزارهٔ دوم، چنین تصور می‌شودکه‌این‌اصل تعمیمی واقعی ازاصل استقرا است. ولی‌اگر فرض‌کنیم $Q(n)$ گزاره‌نمای

$$P(0)\,\&\,P(1)\,\&\,\ldots\,\&\,P(n),$$

یا به‌بیان صوری‌تر گزاره‌نمای

«به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}_0$، با $m \leqslant n$، $P(m)$ درست است»

باشد، آنگاه می‌بینیم که (الف‌ع۱) و (الف‌ع۲) به:

(یك) $Q(0)$ درست است،

(دو) درستی $Q(n)$ درستی $Q(n+1)$ را نتیجه می‌دهد،

تبدیل می‌شوند.

بنابراین ظاهر فریبندهٔ اصل «عمومی» از بین می‌رود: این همان اصل عادی برای $Q(n)$ است، وازنظر تئوری کلی‌ترازاصل معمولی استقرا نیست. البته، درعمل گاهی اثباتها را ساده‌تر می‌کند. بااستفاده ازآن می‌توانیم نسخهٔ بدل بسیار مفیدی ازاصل استقرا را اثبات‌کنیم:

قضیهٔ ۱۴ (اصل خوش ترتیبی). هر زیرمجموعهٔ ناتهی از $\mathbb{N}_0$ دارای کوچکترین عضو است.[۱]

اثبات به‌عبارت صوری‌تر، باید نشان دهیم که اگر $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{N}_0$، آنگاه عضوی چون $a \in S$ وجود دارد که به‌ازای هر $s \in S$ داریم $a \leqslant s$. برای یافتن یك تناقض، فرض می‌کنیم چنین aیی وجودندارد. گیریم $P(n)$ گزاره‌نمای $n \notin S$ باشد. آنگاه $P(0)$ درست است، زیرا اگر $0 \in S$، لم ۹ نتیجه می‌دهد که 0 کوچکترین عضو S است. حال فرض می‌کنیم که $P(m)$ به‌ازای هر $m \leqslant n$ درست باشد، لذا اگر $m \leqslant n$ آنگاه $m \notin S$. اگر $s \in S$ آنگاه $s > n$، و لذا بنابه قضیهٔ ۱۱، $s \geqslant n+1$ عدد $n+1$ متعلق به S نیست زیرا در غیر این صورت باید کوچکترین عضو باشد، پس $n+1 \notin S$ و $P(n+1)$ درست است. بنابه اصل عمومی استقرا، $P(n)$ به ازای هر nی درست است، یعنی، S تهی است. واین یك تناقض است. □

نسخهٔ بدل دیگری از اصل استقرا از 0 شروع نمی‌کند بلکه‌از عضوی چون $k \in \mathbb{N}_0$ آغاز می‌کند. اگر

$P(k)$ درست باشد،

و اگر

درستی $P(m)$، به‌ازای همهٔ $m \geqslant k$، درستی $P(m+1)$ را ایجاب کند،

آنگاه می‌توان استنتاج کرد که $P(n)$ به‌ازای هر $n \geqslant k$ درست است.

اگر $Q(n) = P(n+k)$ اختیارشود، این‌اصل به‌اصل معمولی تبدیل می‌شود. اغلب این اصل‌را به‌ازای $k = 1$ به‌کار می‌بریم. ولی درقضیهٔ بعد، که در جایی دیگر مورد نیاز است، $k = 3$ گرفته می‌شود.

قضیهٔ ۱۵ (قانون کلی شرکت پذیری). اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$، آنگاه حاصل‌جمع $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مستقل ازنحوهٔ قراردادن پرانتزهاست.

اثبات. اگر $n = 3$، تنها دوشیوهٔ پرانتزگذاری وجود دارد، وآن هم $(a_1 + a_2) + a_3$ و $a_1 + (a_2 + a_3)$ است. این دو، بنا به قضیهٔ ۴ (الف) برابرند. فرض کنیم قضیه برای nی درست باشد. آنگاه، بدون هیچ ابهامی می‌توانیم همهٔ پرانتزهای مربوط به حاصل‌جمع n عدد یاکمتررا حذف کنیم. لذا باید مجموع

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_{n+1})$$

را درنظر بگیریم ونشان دهیم که مقدارآن مستقل‌از k است. فرض کنیم

$$a = a_1 + \cdots + a_k$$

---

۱. یعنی، عضوی‌متعلق به‌آن‌زیرمجموعه‌و $\leqslant$ (کوچکتر ازیامساوی‌با) هرعضودیگرآن مجموعه.

$$b=a_{k+1}+\cdots+a_n$$

$$c=a_{n+1}\,.$$

آنگاه عبارت فوق برابر است با

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$=(a_1+\cdots+a_n)+a_{n+1}$$

که به k وابسته نیست. این‌امر مرحلهٔ استقرا را کامل می‌کند. □

وقتی ضرب‌را به‌جای جمع درنظر بگیریم، اثبات مشابه همین خواهد بود.

تقسیم

اگر $m, n\in \mathbf{N}_0$ و $n\neq 0$، همیشه امکان‌پذیر نیست که m را بر n تقسیم کنیم و جوابی در $\mathbf{N}_0$ به دست آوریم. برای امکان‌پذیر بودن این تقسیم، m باید مضربی‌از n باشد، یعنی به‌ازای عضوی‌چون $q\in \mathbf{N}_0$ باید داشته باشیم $m=qn$. اگرچنین‌نباشد، آنگاه عمل‌تقسیم باقیمانده‌ای خواهد داشت.

قضیهٔ ۱۶ (الگوریتم تقسیم). اگر $m, n\in \mathbf{N}_0$، $n\neq 0$، اعضای یکتایی چون $q, r\in \mathbf{N}_0$ وجود دارند که $m=qn+r$، $r<n$.

اثبات. استقرا را روی m به‌کار می‌بریم. فرض کنیم

$$S=\{m\in \mathbf{N}_0 \mid m=qn+r \text{ به‌ازای } q, r\in \mathbf{N}_0,\ r<n\}\,.$$

ازآنجاکه $0=0n+0$، داریم $0\in S$. فرض کنیم $m\in S$. آنگاه $m=qn+r$ که در آن $r<n$، و

$$m+1=qn+r+1\,. \qquad (*)$$

حال چون $r<n$، نتیجه می‌گیریم که $r+1\leqslant n$. لذا یا $n=r+1$، که (*) به

$$m+1=(q+1)n+0$$

تبدیل می‌شود، یا $r+1<n$، که (*) به

$$m+1=qn+(r+1) \quad \text{و} \quad r+1<n$$

بدل می‌گردد. درهردو حالت، $m+1\in S$، ولذا بنا به‌استقرا $S=\mathbf{N}_0$.

برای اینکه نشان دهیم q و r یکتا هستند، فرض می‌کنیم

$$m=qn+r=q'n+r'$$

و $r, r' < n$. آنگاه

$$qn \leqslant m < (q+1)n$$

$$q'n \leqslant m < (q'+1)n .$$

ازاین‌رو، بنا به‌خاصیت تعدی رابطهٔ ترتیبی، $qn < (q'+1)n$، ولـذا بنابـه قضیهٔ ۱۳، $q < q'+1$، وآنگاه بنا به‌قضیهٔ ۱۱، $q \leqslant q'$. به‌همین نحو $q' \leqslant q$، پس $q=q'$. حال بنابه قضیهٔ ۵ (الف) نتیجه می‌گیریم که $r=r'$. □

تجزیه به عوامل

اکنون می‌توانیم تجزیه به عوامل اول را مورد بحث قرار دهیم، وبه‌خصوص یکتایی آن‌را ثابت کنیم. چون فقط اعداد غیرصفرمورد توجه هستند، دربقیهٔ این فصل با $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 - \{0\}$ سروکار خواهیم داشت. ابتدا به‌ارائه چند تعریف ساده می‌پردازیم.

می‌گوییم $k \in \mathbb{N}$ یك عامل یامقسوم علیه $m \in \mathbb{N}$ است اگر $s \in \mathbb{N}$ ی وجودداشته باشدکه $m=ks$. می‌نویسیم $k|m$. واضح است‌که ۱ و m مقسوم علیه‌های m هستند؛ هر مقسوم‌علیه دیگر، یك مقسوم علیه واقعی نام‌دارد. m راعددی اول می‌خوانیم‌اگر $m \neq 1$ و m هیچ مقسوم‌علیه واقعی نـداشته باشد. (۱ را برای سهولت بیان مواردی چون قضیهٔ تجزیه به‌عوامل یکتاکه بعداً خواهد آمدکنار می‌گذاریم.) به‌آسانی دیده می‌شودکه هـر مقسوم‌علیه k برای m باید درحوزهٔ $1 \leqslant k \leqslant m$ قـرار داشته باشد، زیـرا اگر $k > m$ آنگاه‌چون $s \geqslant 1$، درمی‌یابیم که $ks > m$. لذاهرمقسوم‌علیه‌واقعی‌درحوزهٔ $1 < k < m$ قرار دارد.

اگر k مقسوم علیهی بـرای دو عدد $m, n \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌را یك مقسوم علیه مشترك می‌نامیم. پس ۱ همیشه مقسوم علیهی مشترك است؛ اگر ۱ تنها مقسوم علیه مشترك باشد، m و n را متباین می‌خوانیم. به‌جای‌اینکه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌را به عنوان بزرگترین عدد بین‌مقسوم علیه‌های مشترك تعریف کنیم (که در واقع چنین هم هست)، آن‌را بـه‌روش مفیدتری تعریف می‌کنیم. می‌گوییم $h \in \mathbb{N}$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $n \in \mathbb{N}$ و m است اگر h مقسوم علیه مشترکی باشدکـه هرمقسوم علیه مشترك دیگری چـون k، مقسوم علیهی از h هم باشد. می‌نویسیم ب. م. م. $h=(m, n)$. ساده‌ترین راه اثبات اینکه هر دو عـدد طبیعی غیرصفر بزرگترین مقسوم علیه مشترکی دارند، محاسبهٔ صریح آن است. بـرنامه‌ای برای محاسبهٔ ب.م.م. وجود دارد که (به‌دلایل تاریخی، الگوریتم اقلیدسی[1] نامیده می‌شود) واز دو حقیقت زیرناشی می‌شود:

(یك) اگر $r_1 = q_1 r_2$ آنگاه ب. م. م. $r_2=(r_1, r_2)$،

1. Euclidean algorithm

(دو) اگر $r_1 = q_1 r_2 + r_3$ و $r_3 \neq 0$، آنگاه ب.م.م. $(r_1, r_2) =$ ب.م.م. (r_2, r_3).

اثبات این احکام با استفاده از تعریف ب.م.م. تمرین ساده‌ای است، و به‌خصوص (دو) به‌این دلیل درست است که معادلهٔ $r_1 = q_1 r_2 + r_3$ نشان می‌دهد که هر مقسوم علیه مشترک r_1 و r_2 باید r_3 را نیز بخش کند، و هر مقسوم علیه مشترک r_2 و r_3 باید r_1 را هم بخش کند.

الگوریتم اقلیدسی

برای پیدا کردن ب.م.م. r_1 و r_2، مکرراً الگوریتم تقسیم را به‌کار می‌بریم تا q_i و r_iهایی پیدا کنیم که

$$r_1 = q_1 r_2 + r_3, \qquad (r_3 < r_2)$$
$$r_2 = q_2 r_3 + r_4, \qquad (r_4 < r_3)$$
$$\cdots$$
$$r_i = q_i r_{i+1} + r_{i+2}, \qquad (r_{i+2} < r_{i+1})$$
$$\cdots$$

چون $\cdots < r_3 < r_2$، این روند نمی‌تواند الی غیرالنهایه ادامه یابد، زیرا اصل خوش ترتیبی بیان می‌کند که مجموعهٔ اعداد موردنظر کوچکترین عضوی دارد، و به‌آسانی نتیجه می‌شود که در مرحله‌ای داریم $r_{i+2} = 0$ و $r_{i+1} \neq 0$. این مقدار r_{i+1}، بزرگترین مقسوم علیه مشترکی برای r_1 و r_2 است. زیرا که احکام (یك) و (دو) فوق نشان می‌دهند که

$$r_{i+1} = \text{ب.م.م.} (r_i \text{ و } r_{i+1}) = \cdots = \text{ب.م.م.} (r_2, r_3) = \text{ب.م.م.} (r_1, r_2).$$

به‌عنوان مثال ب.م.م. ۶۱۲ و ۲۲۱ را پیدا می‌کنیم (استفاده از عملهای حساب را به‌عنوان جزئی از تکنیك ضمنی مجاز می‌دانیم، زیرا دیدیم که آنها را هم می‌توان به‌طور رسمی جزئی از $\mathbb{N}_0$ دانست):

$$۶۱۲ = ۲ \times ۲۲۱ + ۱۷۰$$
$$۲۲۱ = ۱ \times ۱۷۰ + ۵۱$$
$$۱۷۰ = ۳ \times ۵۱ + ۱۷$$
$$۵۱ = ۳ \times ۱۷$$

بنابراین ب.م.م. $(۶۱۲, ۲۲۱) = ۱۷$.

ملاحظه می‌کنیم که این روش، برخلاف روشی که غالباً درمدارس یاد داده می‌شود، بدون تجزیهٔ اعداد به‌عوامل اول، ب.م.م. را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۷. اگر h ب.م.م. اعداد $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ باشد، و $n \in \mathbb{N}$، آنگاه ب.م.م. اعداد

nr_1 و nr_2 عدد nh است.

اثبات. اگر مراحل الگوریتم اقلیدسی را که در فوق نوشته شد درمورد ب.م.م. (r_1, r_2) به‌کار بندیم و همه‌را در n ضرب کنیم، دستگاه معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$nr_1 = q_1 nr_2 + nr_3, \quad (nr_3 < nr_2)$$
$$nr_2 = q_2 nr_3 + nr_4, \quad (nr_4 < nr_3)$$
$$\cdots$$
$$nr_i = q_i nr_{i+1}, \quad (r_{i+2} = 0)$$

(با این یادآوری که $nr_{i+2} = 0$). یکتا بودن باقیمانده درهرمرحله نشان می‌دهد که این دستگاه، الگوریتم اقلیدسی برای ب.م.م. (nr_1, nr_2) است، ودرنتیجه

$$nr_{i+1} = n \cdot ((r_1, r_2) \text{ب.م.م}).$$ □

از این قضیه حقیقت مهمی به دست می‌آید:

لم ۱۸. اگر $m, n \in \mathbf{N}$ و p عدد اولی باشدکه mn را بخش‌کند، آنگاه p عدد m را بخش می‌کند یا عدد n را.

اثبات. فرض کنیم p، m را بخش نکند. چون p اول است، تنها مقسوم علیه‌های آن ۱ و p هستند؛ لذا ب.م.م. دوعدد p و m باید ۱ باشد. بنابه‌قضیهٔ ۱۷، ب.م.م. اعداد nm و np عدد n است. ولی p هم nm وهم np را بخش می‌کند، لذا بنا به‌تعریف ب.م.م. عدد p، n را نیز بخش می‌کند. □

نتیجهٔ ۱۹. اگر $m_1, \ldots, m_r \in \mathbf{N}$، و p عدداولی باشدکه‌حاصلضرب $m_1 \cdots m_r$ را بخش‌کند، آنگاه p حداقل یکی‌از m_1، ...، m_r را بخش می‌کند.

اثبات. استقرا را روی $r \geqslant 2$ به‌کار ببرید. □

آخرین قضیهٔ این فصل به‌طور صوری بیان می‌کندکه تجزیهٔ اعداد طبیعی به‌عوامل اول، بجز احتمالاً درترتیب نوشتن عوامل یکتاست.

قضیهٔ ۲۰ (یکتایی تجزیه به عوامل اول). فرض‌کنیم $m \in \mathbf{N}$، $m \geqslant 2$، و

$$m = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} = q_1^{f_1} \cdots q_s^{f_s}$$

که درآن p_i ها و q_i ها اول هستند واعداد طبیعی $e_i, f_i \geqslant 1$. آنگاه $r = s$ وتابعی دو-سویی چون $\phi: \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, s\}$ وجود داردکه به‌ازای‌هر i، $p_i = q_{\phi(i)}$ و $e_i = f_{\phi(i)}$.

اثبات. استقرا را روی $k=e_1+\dots+e_r$ به‌کار می‌بندیم. اگر $k=1$ آنگاه $m=p_1$، $r=1$، و $e_1=1$. حال، p_1 حاصلضرب q ها را بخش می‌کند، لذا بنا به نتیجهٔ ۱۹ به‌ازای عددی چون i، q_i را بخش می‌کند. چون q_i اول‌است لذا $p=q_i$. با استفاده از قضیهٔ ۵ (ب) می‌توانیم طرفین رابطهٔ فوق‌را بر p_1 تقسیم کنیم و

$$1=q_1^{f_1}\dots q_i^{f_i-1}\dots q_s^{f_s}$$

را به‌دست‌آوریم. این تنها وقتی‌امکان‌پذیراست‌که $s=1$ و $f_1=1$. بنابراین، دو تجزیه به عوامل فوق به‌صورت $m=p_1=q_1$ هستند، و ϕ را می‌توان تابع همانی دانست.

حال فرض کنیم که حکم قضیه به ازای k درست باشد، و فرض کنیم $e_1+\dots+e_r=k+1$. نظیرحالت $k=1$، به‌ازای عددی چون i داریم $p_1=q_i$. نتیجه اینکه $e_1=f_i$ زیرا درغیراین صورت اگر بااستفاده ازقضیهٔ ۵ (ب) توانهای p_1 را ازطرفین حذف کنیم، یك طرف بر p_1 قابل تقسیم خواهد بود وطرف دیگر چنین نخواهد بود. حال باحذف همهٔ توانهای p_1، داریم

$$p_2^{e_2}\dots p_r^{e_r}=q_1^{f_1}\dots q_{i-1}^{f_{i-1}}q_{i+1}^{f_{i+1}}\dots q_s^{f_s}.$$

بنابه‌استقرا، $r-1=s-1$، وتابعی دوسویی چون

$$\varphi:\{2,\dots,r\}\to\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,s\}$$

وجود داردکه به ازای $j=2,\dots,r$، $p_j=q_{\varphi(j)}$ و $e_j=f_{\varphi(j)}$. حال‌کافی است ϕ را چنین تعریف‌کنیم

$$\phi(1)=i$$

وبه‌ازای $j=2,\dots,r$، $\phi(j)=\varphi(j)$

ولذا مرحلهٔ استقرا ثابت می‌شود. □

تمرین

شش تمرین اول‌را باید درمضمون مطالب‌این فصل درنظرگرفت، وبقیه‌راکه باروش‌استقرا اثبات می‌شوند ومربوط به زمینه‌های وسیعتری از ریاضیات هستند باید در مضمون مناسب بررسی‌کرد.

۱. m^n، به‌ازای $m,n\in\mathbb{N}_0$، چنین تعریف می‌شود:

$$m^0=1,\ m^{n+1}=m^nm.$$

بااستفاده ازبرهان استقرایی مناسبی، ثابت‌کنیدکه

$$m^{n+r}=m^nm^r$$

$$m^{nr}=(m^n)^r$$

$$(mn)^r=m^r n^r\ .$$

۲. هردنباله ازاعداد طبیعی تابعی است چون $s:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}_0$. به جای $s(n)$، می‌نویسیم s_n و s را با (s_n) نمایش می‌دهیم. اگر (s_n) دنباله‌ای باشد، n مین مجموع جزئی σ_n از (s_n) را به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_1=s_1,\qquad \sigma_{n+1}=\sigma_n+s_{n+1}\ .$$

مجموع σ_n به‌صورت $\sigma_n=s_1+s_2+\cdots+s_n$ نیز نوشته می‌شود.
به‌روش استقرا ثابت کنید که:

(الف) $۱+۲+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$،

(ب) $۱^2+۲^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$،

(پ) $۱^3+۲^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

۳. به‌ازای $n\in\mathbf{N}_0$، $n!$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$0!=1,\quad (n+1)!=n!\ (n+1).$$

با استفاده ازاستقرا روی n، ثابت کنید که به‌ازای هر $0\leqslant r\leqslant n$، $r!\,(n-r)!$ عدد $n!$ را بخش می‌کند.

به‌ازای هر $n,r\in\mathbf{N}_0$، $0\leqslant r\leqslant n\in\mathbf{N}$ را برابر با $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ تعریف می‌کنیم.
نشان دهید که:

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r},$$

و

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}.$$

با استفاده ازتساوی آخر، باستقرا ثابت کنید که به‌ازای هر $a,b,n\in\mathbf{N}_0$:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}+\cdots+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+\cdots+\binom{n}{n}b^n\ .$$

۴. باستقرا، یا به نحوی دیگر، ثابت کنید که:

(الف) $۱\cdot۱! + ۲\cdot۲! + \cdots + n\cdot n! = (n+۱)! - ۱$،

(ب) $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$،

(پ) $\binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲} + \cdots + n\binom{n}{n} = ۲^{n-۱}n$.

۵. بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۲۲۴۴ و ۲۱۴۵ را باروشهای زیر محاسبه کنید:
(الف) به‌روش الگوریتم اقلیدسی،
(ب) به‌روش تجزیه به‌عوامل اول اعداد ۲۲۴۴ و ۲۱۴۵.

۶. اعداد فیبوناچی (u_n) به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌شوند:

$$u_۱ = ۱,\ u_۲ = ۲,\ u_{n+۱} = u_n + u_{n-۱}.$$

$u_۳$، $u_۴$، $u_۵$، $u_۶$، و $u_۷$ را به‌دست آورید. ثابت کنید که هرعدد طبیعی، مجموعی از اعداد فیبوناچی است. آیا این عبارت یکتاست؟

۷. اگر $x_۱, \ldots, x_n$ اعدادی حقیقی باشند، ثابت کنید که

$$|x_۱| + \cdots + |x_n| \geqslant |x_۱ + \cdots + x_n|.$$

۸. فرض کنید p/q کسری به‌ساده‌ترین صورت باشد که به ازای عددی طبیعی چون n

$$\frac{۱}{n+۱} < \frac{p}{q} < \frac{۱}{n}.$$

نشان دهید $\frac{p}{q} - \frac{۱}{n+۱}$ کسری است که صورتش، درساده‌ترین صورت، کوچکتر از p است. بنابراین، بااستقرا، ثابت کنید که هر کسر واقعی p/q را که در آن $p < q$، می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی ازمعکوسهای متمایز نوشت:

$$\frac{p}{q} = \frac{۱}{n_۱} + \cdots + \frac{۱}{n_k}.$$

دراینجا $n_۱, \ldots, n_k$ اعدادی طبیعی هستند.
مثلاً، $\frac{۱۹}{۱۵} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶۰}$.
با استفاده از تکنیک عرضه شده دراین تمرین، ۵/۷ را به‌صورت مجموعی ازمعکوسها بنویسید.

۹. نظیرهای الگوریتم تقسیم والگوریتم اقلیدسی را برای چند جمله‌ایهای

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۰$$

باضرایب حقیقی، بیان‌واثبات کنید. (راهنمایی: اگر $a_n \neq 0$، آنگاه درجهٔ $p(x)$ عضوی از $\mathbf{N}_0$ است).

۱۰. برج هانوی معمایی است متشکل‌از n قرص به اندازه‌های متفاوت که می‌توانند درسه کپهٔ A، B، و C قرار گیرند. «مجازیم» قرصی‌را از روی یك برج‌برداریم وبرروی برجی دیگر بگذاریم به شرطی‌که برروی قرصی کوچکتر قرار نگیرد. نخست همهٔ قرصهارا در یك برج A، به‌ترتیب نزولی اندازه‌هایشان قرار می‌دهیم به‌طوری‌که بزرگترینشان درته برج باشد؛ دوبرج دیگرخالی هستند، ثابت‌کنید با دنباله‌ای‌ازجابه‌جاییهای مجازمی‌توانیم همهٔ قرصهارا به برج B منتقل‌کنیم.

۱۱. آیا اثباتهای زیر اثباتهای استقرایی درستی هستند؟

(الف) همهٔ اشخاص طاس هستند.

اثبات. استقرا را روی تعداد n موها به کار می‌بریم. بدیهی است‌که شخص بدون مو طاس است. برای طاس نبودن، کافی نیست‌که یك مو به‌شخص طاس بیفزاییم، لذا اگر شخص با n مو طاس باشد، شخص با $n+1$ مو نیزطاس است. بنا به‌استقرا، هرشخص هراندازه هم‌که موداشته باشد، طاس است.

(ب) تعداد موهای همهٔ اشخاص برابر است.

اثبات. استقرا را روی تعداد اشخاص به‌کار می‌بندیم. اگر این تعداد ۰ یا ۱ باشد، گزاره به‌وضوح درست‌است. فرض‌کنیم این‌گزاره درمورد n شخص درست باشد. $n+1$ شخص‌را درنظر می‌گیریم، یکی را حذف می‌کنیم، آنگاه بنابه استقرا، تعداد موهای n شخص باقیمانده برابراست. شخص دیگری‌را حذف می‌کنیم: بازهم‌تعدادموهای n شخص باقیمانده برابراست، پس تعداد موهای‌اولین شخص حذف شده برابر باتعداد موهای بقیه است. بنابراین تعداد موهای همهٔ $n+1$ شخص برابر است.

(پ) اگر n خط مستقیم روی یك قرص مستدیر چنان رسم شوند که هیچ سه خطی یکدیگررا دریك‌نقطه قطع نکنند، این خطوط قرص‌را به 2^n قسمت تقسیم می‌کنند.

اثبات. به‌ازای $n = 1, 2$، تعداد تقسیمات برابر ۲ و ۴ است. فرض‌کنیم نتیجه به ازای n درست باشد. اگرخط دیگری اضافه شود، هرناحیه‌ای‌که این خط ازآن بگذرد به دوقسمت تقسیم می‌شود، ولذا جمعاً 2^{n+1} قسمت به‌دست می‌آید. پس بنا به‌استقرا، گزاره اثبات می‌شود.

(ت) به‌ازای هرعدد طبیعی n، عدد n^2-n+41 عددی اول (مثبت یامنفی) است.

اثبات. $41 = 41+1-1^2$، $43 = 41+2-2^2$، $47 = 41+3-3^2$، $53 = 41+4-4^2$، $61 = 41+5-5^2$، $71 = 41+6-6^2$، ....

(ث) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2+1$.

اثبات. اگر فرمول فوق به ازای n درست باشد، آنگاه به‌طرفین $2n+1$ را می‌افزاییم تا

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)+(۲n+۱)=n^۲+۱+(۲n+۱)$$
$$=(n+۱)^۲+۱$$

به دست آید. این همان فرمول فوق است که در آن $n+۱$ به‌جای n قرار گرفته است، لذا بنا به‌استقرا، فرمول فوق به‌ازای هرعدد طبیعی درست است.

(ج) $۲+۴+\cdots+۲n=n(n+۱)$.

اثبات. اگر $۲+۴+\cdots+۲n=n(n+۱)$، آنگاه

$$۲+۴+\cdots+۲n+۲(n+۱)=n(n+۱)+۲(n+۱)$$

، ولذا

$$۲+۴+\cdots+۲(n+۱)=(n+۱)(n+۲).$$

بنا به‌استقرا، فرمول فوق به‌ازای همهٔ nها درست است.

۱۲. استقرا با تفاضل. میانگین حسابی n عدد حقیقی $a_۱$، ...، a_n برابر است با $(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n$ و میانگین هندسی آنها (اگر همه غیرمنفی باشند) برابراست با $\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$. ثابت کنید که اگر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n \geqslant ۰$، آنگاه

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n \geqslant \sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}.$$

ممکن است اثبات استقرایی معمولی نتیجه ندهد. روش کشی‌را امتحان می‌کنیم: فرض کنید $P(n)$ گزارهٔ «به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی $a_۱, a_۲, \ldots, a_n \geqslant ۰$،

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n \geqslant \sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

باشد».

ابتدا با استقرای معمولی ثابت کنید که $۰ \leqslant a \leqslant b \Rightarrow ۰ \leqslant a^n \leqslant b^n$، وسپس استنتاج کنید که به‌ازای $a, b \geqslant ۰$، داریم $a^n \leqslant b^n \Rightarrow a \leqslant b$. اگر $\sqrt[n]{x}$ نمایش ریشهٔ n ام مثبت عدد $x \geqslant ۰$ باشد، استنتاج کنید که به‌ازای $x, y \geqslant ۰$، $x \geqslant y \iff \sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[n]{y}$.

$P(۱)$ بدیهی است، و $P(۲)$ را می‌توان با بررسی علامت $\frac{۱}{۴}(a_۱+a_۲)^۲-a_۱a_۲$ اثبات کرد. حال ثابت کنید که $P(n) \Rightarrow P(۲n)$. (راهنمایی: از $P(n)$ درمورد $a_۱$، ...، a_n وهمچنین درمورد $a_{n+۱}$، ...، $a_{۲n}$ استفاده کنید وآنها را با استفاده از $P(۲)$ به یکدیگر ارتباط دهید. آنگاه ثابت کنید که $P(n) \Rightarrow P(n-۱)$. (بامفروض بودن $a_۱$، ...، $a_{n-۱}$، فرض کنید $a_n=(a_۱+\cdots+a_{n-۱})/_{n-۱}$ و با استفاده از $P(n)$ نشان دهید که

$$\sqrt[n]{a_۱\cdots a_{n-۱}a_n} \leqslant a_n.$$

این‌را به‌توان n برسانید ونتیجه‌را ساده‌کنید تا $P(n-1)$ به‌دست آید.)
حال استنتاج کنیدکه $P(n)$ به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ درست است.

۱۳. اثبات درستی $P(n)$، به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، همیشه با یك برهان استقرایی ساده حاصل نمی‌شود. مثلاً گمان گلدباخ[1] که هرعددطبیعی زوج مجموع دوعدداول‌است، $۱+۱=۲$، $۲+۲=۴$، $۳+۳=۶$، $۳+۵=۸$، $۳+۷=۱۰$، ... (به شرطی‌کـه ۱ را هم یك عدد اول بدانیم) ظاهراً درست‌است. گمان گلدباخ را برای‌اعداد طبیعی زوج $۲n \leqslant ۵۰$ بررسی کنید. آیا الگویی که بتواند جهت اثباتی استقرایی به‌کار رود دیده می‌شود؟ معلوم نیست که‌آیا این گمان درست‌است یانادرست. اگرتوانستید صحت یاسقم‌آن‌را ثابت‌کنید، تلگرامی‌هم برای ما بفرستید!

1. Goldbach, Conjecture

۹

اعداد حقیقی

با توجه به‌الگوی‌شهودیمان $\mathcal{R}$ می‌توانیم ببینیم‌که چه‌خواصی مطلوب الگوی‌صوری‌اعداد حقیقی است. دوعمل دوتایی (جمع و ضرب) با خواص حسابی مناسب، وکافی برای‌امکان تعریف تفریق و تقسیم، باید وجود داشته باشند.علاوه براین رابطه‌ای ترتیبی هم‌که به‌طور مناسبی به‌جمع وضرب مربوط شود. وطرحش طوری باشدکه حضور اعضای منفی را نیز ملحوظ کند، باید وجود داشته باشد. آخرین جزء اصلی اصل کمال است،که به‌طور غیر صوری در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت. این سه جنبه: حساب، ترتیب و اصل کمال،اگر به‌طورمناسبی بیان شوند می‌توانند، همان گونه‌که (ط۱)-(ط۳)، $\mathbb{N}_0$ را مشخص می‌کنند، اعداد حقیقی را به طورکامل توصیف نمایند. روشهای متعددی برای بیان خواص مطلوب وجود دارند، ولی تجربهٔقرن گذشتهٔ ریاضیات نشان می‌دهدکه دستگاه اصول موضوع ذیل یکی از بهترین است.

فرض‌کنیم $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای باشدکه روی‌آن دو عمل دوتایی $+$ و $\cdot$ (به نامهای جمع و ضرب) تعریف شده‌اند. اگر $a, b \in \mathbb{R}$، $a+b$ را مجموع a و b و $a \cdot b$ را حاصلضرب آنها می‌نامیم. بنا بدرسم متداول، از این پس نقطه را حذف می‌کنیم و حاصلضرب را به صورت ab می‌نویسیم.

(ا) حساب

مجموعه‌ای چون $\mathbb{R}$ با اعمال دوتایی $+$ و $\cdot$ میدان نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر

$a, b, c \in \mathbb{R}$:

(ج۱) $a+b=b+a$،

(ج۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$،

(ج۳) عضوی چون $0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $a+0=a$،

(ج۴) اگر $a \in \mathbb{R}$ عضوی چون $-a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه $a+(-a)=0$،

(ض۱) $ab=ba$،

(ض۲) $a(bc)=(ab)c$،

(ض۳) عضوی چون $1 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه $1 \neq 0$، و به‌ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $1a=a$،

(ض۴) اگر $a \in \mathbb{R}$، $a \neq 0$، عضوی چون $a^{-1} \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه $aa^{-1}=1$،

(پ) $a(b+c)=ab+ac$.

عضوهای ۰ و ۱ را اعضای صفر و یکهٔ $\mathbb{R}$ می‌نامند. به‌واسطهٔ (ج۱) و (ض۱) داریم $0+a=a$، $(-a)+a=0$، $1a=a$، $a^{-1}a=1$، و $(a+b)c=ac+bc$.

تفریق را با

$$a-b=a+(-b)$$

و تقسیم را با

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}، \text{ به‌شرطی که } b \neq 0،$$

تعریف می‌کنیم.

(ب) ترتیب

میدانی چون $\mathbb{R}$ را مرتب خوانیم اگر زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه:

(ت۱) $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b, ab \in \mathbb{R}^+$،

(ت۲) $a \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$ یا $-a \in \mathbb{R}^+$

(ت۳) $(a \in \mathbb{R}^+) \& (-a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow a=0$.

این اصول موضوع طوری طرح شده‌اندکه ترتیب به‌نحو صحیح به‌حساب مربوط گردد. مجموعهٔ $\mathbb{R}^+$ متناظر ایدهٔ شهودیمان‌از زیرمجموعهٔ‌عضوهای مثبت‌است. آنگاه رابطهٔ‌معمولی ترتیب با

$$a \geqslant b \Longleftrightarrow a-b \in \mathbb{R}^+$$

تعریف می‌شود. بعداً نشان خواهیم دادکه این رابطه در واقع یك رابطهٔ ترتیبی هست.

(پ) اصل کمال

عضو a از $\mathbf{R}$ را یك کران بالای زیرمجموعه‌ای چون $S \subseteq \mathbf{R}$ می‌خوانیم اگر به‌ازای هر $s \in S$، $a \geqslant s$. هر مجموعهٔ S را که دارای کران بالا باشد از بالا کراندار می‌نامیم. عضوی چون λ از $\mathbf{R}$ را یك کوچکترین کران بالای (Sك.ك.ب) نامیم اگر:

(یك) به‌ازای هر $s \in S$، $s \leqslant \lambda$ (λ یك کران بالا باشد)،

(دو) $a \geqslant \lambda \Rightarrow a \geqslant s$ به‌ازای هر $s \in S$)، (λ بین کرانهای بالا کوچکترین باشد).

آخرین اصل موضوع چنین‌ست.

(كك) اگر S زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbf{R}$ و S از بالا کراندار باشد، آنگاه S در $\mathbf{R}$ دارای یك کوچکترین کران بالاست.

این اصل، اصل موضوع کمال است. هر دستگاهی که همهٔ سیزده اصل موضوع فوق، (ج۱) ـ (ج۴)، (ض۱) ـ (ض۴)، (پ)، (ت۱) ـ (ت۳)، (كك)، را داشته باشد یك میدان مرتب کامل می‌نامند.

اگر بخواهیم درسمان را بر اصل موضوع وجود $\mathbf{N}_0$ بنا کنیم، باید مسئلهٔ ساختن میدان مرتب کامل $\mathbf{R}$ برپایهٔ $\mathbf{N}_0$ را حل کنیم. این عمل، به نحوی مشابه عرضهٔ شهودی که در سطح مدارس به‌کار می‌رود، انجام‌پذیر است. ابتدا اعداد صحیح $\mathbf{Z}$ را از $\mathbf{N}_0$ و اعداد گویای $\mathbf{Q}$ را از $\mathbf{Z}$ می‌سازیم. این عمل با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها به‌نحوی بسیار ساده انجام می‌پذیرد. ساختن $\mathbf{R}$ از $\mathbf{Q}$ کار دشوارتری است، و بررسی سیزده اصل موضوع در مواردی بسیار مشکل.

اکنون به ساختن این رشته از دستگاههای اعداد می‌پردازیم، زیرا این جزئی از میراث ریاضی است که هر ریاضیدان باید، حداقل یکبار در دوران زندگیش، آن را ببیند. با مروری برگذشته می‌بینیم که اهمیت این ساختن‌ها در این است که نشان دهیم فرض وجود $\mathbf{N}_0$، به‌علاوهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، وجود $\mathbf{R}$ را ایجاب می‌کند. به‌منظور استفاده، بهتر است وجود $\mathbf{R}$ را به‌عنوان اصل موضوع پایه در نظر بگیریم و از ساختن آن صرفنظر کنیم (ولی در نظر داشته باشیم که ساختن آن امکان‌پذیر است). ساختن اعداد، خود اثری است از قرن نوزدهم، که در آن زمان اعداد طبیعی به‌عنوان پایهٔ ریاضیات پذیرفته شد، ولی درك کاملی از اعداد حقیقی وجود نداشت. در آن قرن، اثبات این مطلب که در ریاضیات اعداد حقیقی اشیا معتبری هستند اهمیت داشت، و لذا ساختن $\mathbf{R}$ از $\mathbf{N}_0$ مؤثر واقع شد. ولی امروزه، که انجام‌پذیر بودن این کار به ثبوت رسیده است، مسائل روانی و فلسفی مربوط جدیت خود را از دست داده‌اند: اگر به‌جای $\mathbf{N}_0$ وجود $\mathbf{R}$ را اصل قرار دهیم، نه چیزی از دست می‌دهیم و نه چیزی به‌دست می‌آوریم. ولی اصل قرار دادن $\mathbf{R}$، کار را بسیار ساده‌تر می‌کند، زیرا یافتن زنجیری چون

$$\mathbf{R} \supseteq \mathbf{Q} \supseteq \mathbf{Z} \supseteq \mathbf{N}_0$$

از زیرمجموعه‌های اعداد گویا، صحیح، و طبیعی در داخل نسبتاً ساده‌تر است. برای انجام این امر، باید خواص مناسبی که مشخص کنندهٔ $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ باشند مشخص گردند ($\mathbf{N}_0$ با همان اصل موضوع (ط۱) ـ (ط۳) قبلاً مشخص شده است). در فصل ۱۰ این روند ساختن

سازه‌های داخلی $\mathbb{R}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و مزایای آن را هم ملاحظه می‌کنیم. ولی اینک، پس از افزودن چند نکته به‌اصل موضوع جهت امکان محاسبه و ایجاد ترتیب، به‌ساختن $\mathbb{R}$ از $\mathbb{N}_0$ می‌پردازیم.

استنتاجهای مقدماتی مربوط به‌حساب

انتظار نداریم که الگوی شهودیمان از اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ همهٔ خواص میدان را دارا باشد: به‌خصوص اینکه همهٔ اعضای $\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ وارون ضربی هم ندارند. ولی سایر اصول‌موضوع مربوط به‌حساب، یعنی همه‌مگر (ض۴)، باید برقرار باشند. مجموعه‌ای چون R با دو عمل دوتایی حایز شرایط (ج۱) – (ج۴)، (ض۱) – (ض۳)، و (پ) یک‌حلقه[1] نامیده می‌شود. اگر علاوه براین زیرمجموعه‌ای چون R^+ هم وجود داشته باشد که (ت۱) – (ت۳) را ارضا کند، حلقهٔ مرتب خواهیم داشت.

اینک از این اصول موضوع استنتاجهایی می‌نماییم که نه تنها خود نتایج مفیدی هستند، بلکه تمرین خوبی برای شیوهٔ اصل موضوعی هم هستند.

قضیهٔ ۱. اگر R حلقه باشد، و به‌ازای عضوی چون $x \in R$، و به‌ازای هر $a \in R$، $a+x=a$، آنگاه $x=0$. و اگر به‌ازای هر $a \in R$، $xa=a$، آنگاه $x=1$.

اثبات. اگر $a=0$ آنگاه $x+0=0$. ولی بنا به (ج۳) و (ج۱)، $x+0=x$، لذا $x=0$. به‌همین نحو $x1=x=1$. □

این قضیه نشان می‌دهد که عضوهای صفر و یکهٔ R یکتا هستند: هیچ عضو دیگری این‌خاصیت‌را ندارد. به‌همین‌نحو منفی عضوی چون a، یعنی $-a$، به‌طور یکتا تعیین می‌شود:

قضیهٔ ۲. اگر به‌ازای عضوهای x و a از حلقهٔ R، $x+a=0$، آنگاه $x=-a$.

اثبات.

$$\begin{aligned} x &= x+0, && \text{بنا به (ج۳)} \\ &= x+(a+(-a)), && \text{بنا به (ج۴)} \\ &= (x+a)+(-a), && \text{بنا به (ج۲)} \\ &= 0+(-a), && x+a=0 \text{ چون} \\ &= -a, && \text{بنا به (ج۴)} \end{aligned}$$

□.

۱. به‌بیان دقیقتر یک حلقهٔ جابه‌جایی. کلمهٔ «حلقه» معمولاً به‌دستگاهی اطلاق می‌شود که‌مجموعهٔ محدودتری از اصول موضوع، بجز (ض۱)، را ارضا کند. چون دلیلی نمی‌بینیم که حلقه‌های غیر جابه‌جایی را مطرح کنیم، از رویهٔ جاری پیروی وصفت غیر جابه‌جایی را حذف می‌کنیم. (دردرسهای مربوط به‌جبر چنین حلقه‌ای را یک «حلقهٔ جابه‌جایی با عضو یکه» می‌نامند.—م.)

اگر R یك میدان باشد آنگاه وارون ضربی (برای اعضای غیرصفر) هم به‌طور یکتا تعیین می‌شود، و اثبات مشابه اثبات فوق است.

قضیهٔ ۳. اگر R یك حلقه باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in R$، $-(-a)=a$.

اثبات. بنا به‌تعریف داریم، $a+(-a)=0$. بنا به‌قضیهٔ ۲، $-(-a)=a$. □

قضیهٔ ۴. اگر R یك حلقه باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in R$، $a0=0a=0$.

اثبات.

$$\begin{aligned} a0 &= a(0+0), && \text{بنا به (ج۳)} \\ &= a0+a0, && \text{بنا به (پ)} \end{aligned}$$

و با افزودن $-(a0)$ به‌طرفین تساوی، داریم

$$\begin{aligned} 0 = a0+(-a0) &= (a0+a0)+(-a0), \\ &= a0+(a0+(-a0)), && \text{بنا به (ج۱)} \\ &= a0+0, && \text{بنا به (ج۴)} \\ &= a0, && \text{بنا به (ج۳)} \end{aligned}$$

آنگاه بنا به (ض۱)، $0=a0$. □

قضیهٔ ۵. اگر R یك حلقه باشد و $a, b \in R$ آنگاه $-(ab)=(-a)b=a(-b)$.

اثبات.

$$\begin{aligned} ab+(-a)b &= (a+(-a))b, && \text{بنا به (پ) و (ض۱)} \\ &= 0b, && \text{بنا به (ج۴)} \\ &= 0, && \text{بنا به (قضیهٔ ۴)} \end{aligned}$$

و لذا، بنا به‌قضیهٔ ۲، $-(ab)=(-a)b$. بقیهٔ احکام از (ض۱) نتیجه می‌شوند. □

حال به‌آسانی می‌توان نتایج دیگری چون $ab=(-a)(-b)$، یا $a=-a(-1)$ را هم اثبات کرد. اگر R یك میدان باشد، همچنین می‌توان ثابت کرد که اگر $a \neq 0$ آنگاه $a=(a^{-1})^{-1}$. با تعریف تفریق و تقسیم، طبق روال فوق، می‌توانیم خواص دیگری از این عملها را هم که انتظار داریم اثبات کنیم، مثلاً:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

جزئیات به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

اینك به بررسی خواص ترتیب می‌پردازیم. فرض‌کنیم حساب مربوط به‌حلقه‌ها و میدانها به اندازه‌ای جا افتاده‌اندکه هنگام استفاده، دیگر نیازی به‌اشارهٔ صریح نداشته باشند. ولی ذکر صریح اصول موضوع مربوط به ترتیب را هنوز هم لازم می‌دانیم.

استنتاجهای مقدماتی در مورد ترتیب

در این بخش R حلقه‌ای مرتب فرض می‌شود. همان طورکه قبلاً اشاره شد، در R رابطهٔ ترتیب با

$$a\geqslant b\Longleftrightarrow a-b\in R^{+} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. بلافاصله نتیجه می‌گیریم که $a\geqslant 0\Longleftrightarrow a\in R^{+}$، پس

$$R^{+}=\{a\in R\mid a\geqslant 0\}. \qquad (۲)$$

حال با استفاده از (ت۱) ـ (ت۳) ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۶. رابطهٔ $\geqslant$ روی R یك ترتیب ضعیف است.

اثبات. باید سه خاصیت:

(تض۱) $a\geqslant b\,\&\,b\geqslant c\Rightarrow a\geqslant c$،

(تض۲) $a\geqslant b$ یا $b\geqslant a$،

(تض۳) $a\geqslant b\,\&\,b\geqslant a\Rightarrow a=b$،

را اثبات کنیم.

برای اثبات (تض۱) داریم، $a\geqslant b\,\&\,b\geqslant c\Rightarrow a-b\,,b-c\in R^{+}$. بنا به (ت۱)، $(a-b)+(b-c)\in R^{+}$، لذا $a-c\in R^{+}$، پس $a\geqslant c$. (این اولین مواجههٔ «بی‌دردسرما با حساب» است: اثبات $(a-b)+(b-c)=a-c$ به‌روش‌اصل‌موضوعی مراحل متعددی داردکه در اینجا حذف می‌شوند).

برای اثبات (تض۲)، (ت۲) نتیجه می‌دهدکه $a-b\in R^{+}$ یا

$$b-a=-(a-b)\in R^{+}.$$

لذا $a\geqslant b$ یا $b\geqslant a$.

برای اثبات (تض۳)، اگر هر دو $a-b$ و $b-a \in R^+$، آنگاه بنابه (ت۳)، $a-b=0$، لذا $a=b$. □

رابطهٔ ترتیب، در قبال حساب به‌گونه‌ای مناسب عمل می‌کند:

قضیهٔ ۷. به‌ازای هر $a, b, c, d \in R$:

(الف) $a \geqslant b \,\&\, c \geqslant d \Rightarrow a+c \geqslant b+d$،

(ب) $a \geqslant b \geqslant 0 \,\&\, c \geqslant d \geqslant 0 \Rightarrow ac \geqslant bd$.

اثبات. طبق (۱)، تعریف $\geqslant$ را به‌کار ببندید و از حساب استفاده کنید. □

در تعریف میدان مرتب (یا حلقهٔ مرتب) می‌توانیم خواص مذکور در قضیه‌های ۶ و ۷ را به جای (ت۱) ـ (ت۳) قرار دهیم و جهت تعریف R^+ از رابطهٔ $\geqslant$ و تساوی (۲)، منتها در جهت معکوس، استفاده نماییم. اینکه کدام را انتخاب می‌کنیم، به سلیقه مربوط می‌شود.

در یك حلقهٔ مرتب، قدر مطلق را با

$$|a| = \begin{cases} a & \text{اگر } a \in R^+ \text{،} \\ -a & \text{اگر } -a \in R^+ \text{،} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم که به‌ازای هر $a \in R$، $|a| \geqslant 0$، و با تکرار برهان فصل ۲ در این مضمون صوری، داریم

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \,,$$

$$|ab| = |a||b| \,.$$

با توجه به این مقدمات ابزار کافی برای ساختن اعداد صحیح، گویا، و حقیقی به دست آورده‌ایم.

ساختن اعداد صحیح

برای رسیدن از $\mathbb{N}_0$ به‌اعداد صحیح، باید به‌معرفی اعداد منفی بپردازیم. در واقع باید تفاضل $m-n$ اعداد طبیعی را در نظر بگیریم. اگر $m \geqslant n$ این تفاضلها به‌عنوان اعدادی طبیعی قابل تعریف هستند؛ و لذا هدف ارائهٔ تعریف آنها در حالت $n > m$ است. اگر $m, n, r, s \in \mathbb{N}_0$ و $m \geqslant n$، $r \geqslant s$ آنگاه

$$m-n = r-s \iff m+s = r+n.$$

حال ملاحظه می‌کنیم که طرف راست این رابطه بدون هیچ محدودیتی برای m، n، r، s

بامعنی است. این مطلب راهنمای ماست. مجموعهٔ $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ متشکل از زوجهای مرتب (m, n) را اختیار و روی آن رابطهٔ $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(m, n) \sim (r, s) \Longleftrightarrow m+s = r+n.$$

برای اینکه نشان دهیم این رابطه رابطه‌ای هم‌ارزی است تنها به‌حساب در $\mathbb{N}_0$ نیازمندیم. پس از انجام این بررسی، مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را مجموعهٔ ایـن **رده‌های** هم‌ارزی تعریف می‌کنیم. ایدهٔ بحث این است کـه **ردهٔ** هم‌ارزی (m, n) باید در تناظر بـا عدد شهودی $m-n$ باشد؛ بررسی صوری این ایده به‌صورت زیر است. فرض کنیم $\langle m, n \rangle$ کلاس هم‌ارزی شامل (m, n) را نمایش دهد. آنگاه $\langle m, n \rangle = \langle r, s \rangle \Rightarrow m+s = r+n$. روی $\mathbb{Z}$ جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم[1]:

$$\langle m, n \rangle + \langle p, q \rangle = \langle m+p, n+q \rangle,$$

$$\langle m, n \rangle \langle p, q \rangle = \langle mp+nq, mq+np \rangle.$$

مسئله این است که نشان دهیم ایـن اعمال به‌معنای فصل ۴ خوش‌تعریف هستند. لذا فرض می‌کنیم $\langle m, n \rangle = \langle m', n' \rangle$ و $\langle p, q \rangle = \langle p', q' \rangle$. آنگاه $m+n' = m'+n$، و $p+q' = p'+q$. حال

$$\begin{aligned}(m+p)+(n'+q') &= (m+n')+(p+q') \\ &= (m'+n)+(p'+q) \\ &= (m'+p')+(n+q).\end{aligned}$$

بنابراین $\langle m+p, n+q \rangle = \langle m'+p', n'+q' \rangle$، و لـذا جمع خوش‌تعریف است. خوش‌تعریفی ضرب نیز به‌همین نحو بررسی می‌شود.

حال اگر فرض کنیم

$$\mathbb{Z}^+ = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \mid \text{در } \mathbb{N}_0 \; m \geqslant n\},$$

اثبات حلقه بودن و مرتب بودن $\mathbb{Z}$ به‌صورت تمرینی آسان ولی طولانی درمی‌آید.

قضیهٔ ۸. $\mathbb{Z}$ با اعمال فوق حلقه‌ای است مرتب.

اثبات. بایدصحت اصول موضوع (ج۱) – (ج۴)، (ض۱) – (ض۳)، (پ) و (ت۱) –

---

۱. در مورد $\langle m, n \rangle$ به‌صورت "$m-n$" فکر کنید. آنگاه ایـن تعاریف از برگردان عبارات زیر به‌دست می‌آیند

$$(m-n)+(p-q) = (m+p)-(n+q)$$

$$(m-n)(p-q) = (mp+nq)-(mq+np).$$

(ت۳) را بررسی کنیم. در تمام موارد با استفاده از تعریف $\mathbb{Z}$ خاصیت مورد نظر در $\mathbb{N}_0$ را بازگو وصحت آن راباحساب بررسی می کنیم. به‌عنوان نمونه (ج۱)را اثبات می کنیم.

فرض کنید $a=\langle m,n\rangle$ و $b=\langle p,q\rangle$. آنگاه

$$a+b=\langle m+p,n+q\rangle$$

بنا به‌حساب در $\mathbb{N}_0$ ،

$$=\langle p+m,q+n\rangle$$

$$=b+a.$$

اثبات اصول موضوع دیگر گاهی سخت‌تر، ولی به‌همین نحو است: خواننده باید مداد و کاغذ در دست بگیرد وصحت آنها را بررسی کند! ریاضیات یك ورزش چون فوتبال‌برای تماشا نیست. □

مرحلهٔ‌بعدی بازیافتن نمادمعمول اعداد صحیح، به‌صورت اعدادطبیعی مثبت یامنفی، است. هر عضو $\mathbb{Z}^+$ به صورت $\langle m,n\rangle$ است که در آن $m\geqslant n$، لذا می‌توانیم آن را به‌صورت $\langle m-n,0\rangle$ هم بنویسیم. پس هر عضو $\mathbb{Z}^+$ بـه ازای عضوی چون $r\in\mathbb{N}_0$ به‌صورت $\langle r,0\rangle$ است. حال اصل موضوع (ت۲) بیان می کندکه بـه ازای‌هر $a\in\mathbb{Z}$، یا $a\in\mathbb{Z}^+$ یا $-a\in\mathbb{Z}^+$، پس یا $a=\langle r,0\rangle$

$$.a=-\langle r,0\rangle=\langle 0,r\rangle$$

تابع $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{Z}^+$ را با $f(n)=\langle n,0\rangle$ تعریف می کنیم. به‌آسانی می بینیم که f دو سویی است و:

$$f(m+n)=f(m)+f(n),$$

$$f(mn)=f(m)f(n),$$

$$m\geqslant n\Rightarrow f(m)\geqslant f(n),$$

یعنی f، به‌معنای فصل قبل، یك یکریختی ترتیبی است.

این امر یك مسئله فنی به‌پیش می‌آورد. ممکن است انتظار داشته باشیم $\mathbb{N}_0\subseteq\mathbb{Z}$، که نیست: در عوض $\mathbb{N}$ با $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}^+$ یکریخت ترتیبی است. این مطلب به این معنی است که‌گرچه $\mathbb{N}_0$ و $\mathbb{Z}^+$ بـه‌طور قطع دو شیء متفاوت هستند (دومی یك مجموعه از رده‌های هم‌ارزی زوجهای مرتب است)، ولی بلافاصله پس از عبور از مرحلهٔ ساختن، تفاوت بین آنها بی‌اهمیت می‌شود: از نظر حساب و ترتیب دقیقاً دارای ساخت ریاضی یکسان‌هستند.

یکی‌از راههای برخوردبا این مسئله توجه به‌این مطلب است که $\mathbb{Z}^+$ اصول‌موضوع (ط۱) ـ (ط۳) را ارضا می کند ولذا خواصی دقیقاً یکسان با $\mathbb{N}_0$ دارد. پس به‌طورموقت

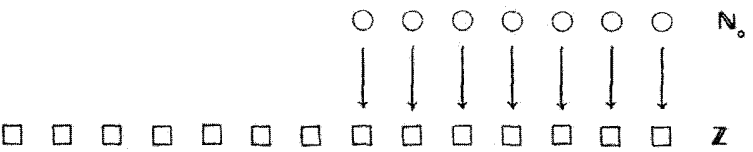
$\mathbf{N}_0$ی را انتخاب می‌کنیم، $\mathbf{Z}$ را می‌سازیم وسپس $\mathbf{N}_0$ قدیمی را به‌بوتهٔ فراموشی می‌سپاریم. مسئله این‌است که همین عمل‌را باید با $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ نیز انجام دهیم. واین روند کاهی راکوه‌کردن است. ازطرفی، رعایت تفاوت بین $\mathbf{N}_0$ و $\mathbf{Z}^+$، و بین مجموعه‌های مشابهی که بعداً خواهند آمد، بحث را با یکریختی‌های بدنما مخدوش می‌سازد و مطلب ساده‌ای را پیچیده جلوه می‌دهد.

روش رضایتبخش‌تر این است کـه با استفاده از یکریختی‌ها، نمادگذاری را تغییر دهیم. یعنی، نمادهای

$$n \text{ برای } \langle n , 0 \rangle$$

$$-n \text{ برای } \langle 0 , n \rangle ,$$

را اختیارکنیم وبا استفاده از یکریختی نشان دهیم‌که این تغییر نماد، در حساب یا ترتیب هیچ نتیجهٔ نامطلوبی ایجاد نمی‌کند. حاصل ایـن‌کار ایـن است‌که $\mathbf{Z}^+$ را حذف‌کنیم و به‌جایش $\mathbf{N}_0$ را قرار دهیم. با تعریف عملهای مربوط روی $\mathbf{N}_0$ $(\mathbf{Z}-\mathbf{Z}^+)\cup\mathbf{N}_0$ می‌توانستیم این‌کار را به‌روش صوری نظریهٔ مجموعه‌ها هم انجام دهیم. آنگاه در دستگـاه حاصل، که مجدداً آن را $\mathbf{Z}$ می‌نامیم، داریم $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{Z}$. (دیاگرام زیر بـ این ایده را به‌قدرکافی روشن بسازد.)



ساختن اعدادگویا

الگو بسیار شبیه الگوی فوق است. در اینجا با $\mathbf{Z}$ آغاز می‌کنیم ومی‌خواهیم‌مجموعه‌ای بزرگترچون $\mathbf{Q}$ را معرفی‌کنیم که در آن کسرهای m/n قابل تعریف باشند. برای‌انجام این امر، فرض می‌کنیم S مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (m , n) باشدکه $m , n \in \mathbf{Z}$ و $n \neq 0$. رابطهٔ $\sim$ را با

$$(m , n) \sim (p , q) \Longleftrightarrow mq = np$$

تعریف می‌کنیم. (در ایـن تعریف از خاصیت مطلوب $m/n = p/q$ اگـر و فقط اگـر $mq = np$ الهام‌گرفته‌ایم.) حال $\mathbf{Q}$ را مجموعـهٔ رده‌های هم‌ارزی ایـن رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم و، با پیش‌بینی نتیجـهٔ نهایی، نماد m/n را بـرای نمایش ردهٔ هم‌ارزی (m , n) به‌کار می‌بریم. عملها را به‌صورت زیر تعریف‌کنید:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq},$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

قضیهٔ ۹. $\mathbf{Q}$ با عملهای فوق یك میدان تشکیل می‌دهد.

اثبات. جزئیات به‌خواننده واگذار می‌شود. ابتدا لازم است نشان دهیم که این عملها خوش‌تعریف هستند. سپس باید صحت فهرست بلند بالایی از اصول موضوع را بررسی کنیم. انجام این‌کار وقتی واقعاً مؤثر است که خود شما آن را انجام دهید: خواندن محاسبات طولانی اشخاص دیگر، بخصوص که ساده و سرراست هم باشند، به‌ندرت مفید واقع می‌شود. ولی به‌هرجهت راهنمایی می‌کنیم که: به‌ازای $n\neq 0$ ، m، وارون ضربی m/n، n/m است. □

حال با قرار دادن

$$\mathbf{Q}^+=\left\{\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}\,|\,m,n\in\mathbf{Z}^+,\ n\neq 0\right\}$$

یك ترتیب تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۰. با توجه به‌تعریف فوق، $\mathbf{Q}$ میدانی مرتب است.

اثبات. این قضیه را نیز به‌عهدهٔ شما می‌گذاریم. □

حال، تابعی داریم چون $g:\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ با تعریف $g(n)=n/1$. و باز هم به ازای $m,n\in\mathbf{Z}$:

$$g(m+n)=g(m)+g(n),$$

$$g(mn)=g(m)g(n),$$

$$m\geqslant n\Rightarrow g(m)\geqslant g(n)$$

و لذا g نیز یك یکریختی ترتیبی است. حال همچون درمورد $\mathbf{N}$ و $\mathbf{Z}$، می‌توانیم $\mathbf{Z}$ را زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{Q}$، هرچندکه دقیقاً چنین نیست، بپنداریم.

از آنجاکه هر کسر m/n را می‌توانیم به‌صورت $(m/1)(n/1)^{-1}=(m/1)(1/n)$ هم بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که یکسان گرفتن n با $n/1$ مغایرتی با نمادگذاری ندارد، و متناظر الگوی شهودی معمولی است.

حقیقتاً مندرجات این فصل تا اینجا صرفاً نوعی سرگرمی و بازی جبری بود. ولی از این پس مطالب جدی‌تر خواهند شد.

اعداد حقیقی

ساختن اعداد حقیقی بـه صورت اعداد اعشاری بی‌پایان، به‌روش فصل ۲، هرچند از نظر کلی پر دردسر، ولی امکان‌پذیر است. با این وجود، در آنجا ملاحظه کردیم که استفاده از تقریب زدن دنباله‌های اعداد گویا مزایای تکنیکی هم دارد. البته بـه کار بردن دنباله‌های یکنوا بسیار آسان است، ولی ما از دنباله‌های کلی‌تر «کشی[1]» که در زیر تعریف می‌شوند، استفاده می‌کنیم. نظیر بخشهای قبل، بسیاری از جزئیات ساده را حذف می‌کنیم؛ بهانهٔ ما هم مثل قبل همان است که: اگر چنین کنیم نکات اصلی ساده‌تر دیده می‌شوند، و جزئیات به زمینهٔ بحث ملحق می‌شوند.

دنبالهٔ اعداد گویا

هر دنباله از اعداد گویا را می‌توانیم به‌طور صوری به‌صورت تابعی چون

$$s : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$$

تعریف کنیم. به‌جای $s(n)$ می‌نویسیم s_n و دنباله را با $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ یا با $(s_1, s_2, s_3, \dots)$، و یا فقط با (s_n) نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathbf{S}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های اعداد گـویا باشد. جمع و ضرب در $\mathbf{S}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$$
$$(a_n)(b_n)=(a_nb_n).$$

لم ۱۱.۹ $\mathbf{S}$ تحت عملهای فوق یك حلقه است.

اثبات. عضو همانـی $(1, 1, 1, \dots)$، عضو صفر $(0, 0, 0, \dots)$، و وارون جمعی (a_n)، $(-a_n)$ است. بررسی صحت همهٔ این مطالب کاملاً عادی است. □

با این وجود، ملاحظه کنید کـه $\mathbf{S}$ یك میدان نیست. اگـر همهٔ جملات s_n غیر صفر باشند، آنگاه (s_n) دارای وارون ضربی $(1/s_n)$ است. ولی اگـر جمله‌ای چون $s_n = 0$ باشد، آنگاه هیچ وارونی نمی‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً، $(0, 1, 1, \dots)$ نمی‌تواند وارونی چون $(b_1, b_2, b_3, \dots)$، داشته باشد، زیرا

1. Cauchy

$$(۰, ۱, ۱, \cdots)(b_۱, b_۲, b_۳, \cdots) = (۰, b_۲, b_۳, \cdots) \neq (۱, ۱, ۱, \cdots).$$

همان‌طور که در فصل ۲ دیدیم، هر عدد حقیقی را می‌توانیم «حد» دنباله‌ای از اعداد گویا بپنداریم. در بحث حاضر نیز می‌توانیم همان تعریف همگرایی مذکور در آن فصل را بپذیریم، به‌شرطی که ε در آن تعریف را عدد گویا اختیار کنیم.

تعریف. می‌گوییم دنباله‌ای چون (s_n) از اعداد گویا به $l \in \mathbf{Q}$ میل می‌کند اگر به ازای هر $\varepsilon \in \mathbf{Q}$، $\varepsilon > ۰$، عضوی چون $N \in \mathbf{N}$ وجود داشته باشد که

$$n > N \Rightarrow |s_n - l| < \varepsilon.$$

این تعریف برای بحث کاملاً رضایتبخش نیست: همگرایی به‌حدی گویا در واقع آن چیزی نیست که مطلوب ماست. به‌خاطر امکان بحث، فرض کنیم همگرایی دنباله‌ای از اعداد گویا به‌حدی حقیقی مصداق داشته باشد. این فرض مسلماً در الگوهای شهودی $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ صدق می‌کند. مسئله اینجاست که به طور صوری بر ما معلوم نیست که این حد چیست. با این وجود، اگر (s_n) به‌عددی حقیقی چون l همگرا باشد، آنگاه Nی وجود دارد که

$$\text{به‌ازای هر } n > N, \quad |s_n - l| < \varepsilon$$

و همچنین

$$\text{به‌ازای هر } m > N, \quad |s_m - l| < \varepsilon.$$

از ترکیب این دو نامساوی، داریم:

$$\text{به‌ازای هر } m, n > N, \quad |s_m - s_n| < ۲\varepsilon.$$

حال در این گزاره عدد حقیقی فرضی l وجود ندارد. اگر به‌جای ε با $\frac{۱}{۲}\varepsilon$ شروع کنیم، با تنظیم مطالب فوق ایدهٔ اساسی زیر را به‌دست می‌آوریم:

تعریف. دنباله‌ای چون (s_n) از اعداد گویا یک دنبالهٔ کشی است اگر به‌ازای هر عدد گویای $\varepsilon > ۰$، Nی وجود داشته باشد که

$$m, n > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

به‌طور شهودی، جمله‌های چنین دنباله‌ای به‌یکدیگر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. (آگوستین کشی ریاضیدان فرانسوی قرن نوزدهم است که تألیفات فراوانی دارد و گرچه احتمالاً مبتکر مفهوم این دنباله‌ها نباشد ولی آنها را در بعد وسیعی مورد استفاده قرار داده است.)

دنباله‌های کشی، که به‌عنوان دنباله‌های تقریبهای گویای اعداد حقیقی مد نظر قرار می‌گیرند، مواد اولیهٔ ساخت صوری خود اعداد حقیقی را فراهم می‌سازند.

لم ۱۲. هر دنبالهٔ کشی کراندار است.

اثبات. بافرض $\varepsilon=1$، Nی وجود دارد که بدازای هر $m, n>N$، $|s_n-s_m|<1$. لذا به‌ازای هر $n>N$ داریم $|s_n-s_{N+1}|<1$، یعنی $|s_n|<|s_{N+1}|+1$. از این‌رو، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$،

$$|s_n|\leqslant \max\{|s_1|, |s_2|, \cdots, |s_N|, |s_{N+1}|+1\}. \quad \square$$

لم ۱۳. اگر (a_n) و (b_n) دو دنبالهٔ کشی باشند، آنگاه (a_n+b_n)، (a_nb_n)، و $(-a_n)$ نیز دنباله‌های کشی هستند.

اثبات. اگر $\varepsilon>0$ گویا باشد، N_1ی و N_2یی وجود دارند که:

$$m, n>N_1 \Rightarrow |a_m-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$m, n>N_2 \Rightarrow |b_m-b_n|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

لذا به‌ازای $m, n>N=\max(N_1, N_2)$، داریم:

$$\begin{aligned}|(a_m+b_m)-(a_n+b_n)| &= |(a_m-a_n)+(b_m-b_n)|\\ &\leqslant |a_m-a_n|+|b_m-b_n|\\ &<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon\\ &=\varepsilon,\end{aligned}$$

پس (a_n+b_n) کشی است.

برای اثبات کشی بودن دنبالهٔ (a_nb_n)، ملاحظه می‌کنیم که طبق لم ۱۲، اعداد گویایی چون $A, B\in\mathbf{Q}$ وجود دارند که به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، $|a_n|<A$ و $|b_n|<B$. با قدری دوراندیشی (مؤلفین این اثبات را قبلاً دیده‌اند)، اگر $\varepsilon\in\mathbf{Q}$، $\varepsilon>0$، داریم $\varepsilon/(A+B)\in\mathbf{Q}$، و $\varepsilon/(A+B)>0$؛ لذا می‌توانیم N_1ی و N_2یی پیدا کنیم که:

$$m, n>N_1 \Rightarrow |a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$m, n>N_2 \Rightarrow |b_m-b_n|<\frac{\varepsilon}{A+B}.$$

حال اگر $m, n>N=\max(N_1, N_2)$ آنگاه هردو نامساوی فوق برقرارند، ولذا

$$|a_m b_m - a_n b_n| = |(a_m - a_n)b_m + a_n(b_m - b_n|)|$$
$$\leqslant |a_m - a_n||b_m| + |a_n||b_m - b_n|$$
$$< \left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right) B + A \cdot \frac{\varepsilon}{A+B}$$
$$= \varepsilon.$$

پس $(a_n b_n)$ هم کشی است.

در پایان، کشی بـودن $(-a_n)$ را می‌توان یا با محاسبهٔ مستقیم، و یا با قرار دادن $b_n = -1$، به‌ازای همهٔ nها، دربرهان فوق، اثبات کرد. □

حال اگر فرض کنیم $\mathscr{C}$ نمایش مجموعه همهٔ دنباله‌های کشی باشد، داریم:

قضیهٔ ۱۴. $\mathscr{C}$ تحت جمع وضرب دنباله‌ها، طبق تعریف فوق، یك حلقه است.

اثبات. اگر $(a_n), (b_n) \in \mathscr{C}$، لم ۱۳ بیان می‌کند که $(a_n)+(b_n), (a_n)(b_n), (-a_n) \in \mathscr{C}$. واضح است که دنبالهٔ صفر $(0, 0, 0, \ldots)$ و دنبالهٔ یکهٔ $(1, 1, 1, \ldots)$ به $\mathscr{C}$ تعلق دارند. باتوجه به‌اصول موضوع حلقه‌ها، این امر نشان می‌دهد که (ج۳)، (ج۴)، و (ض۳) برقرارند. اصول موضوع دیگر به این دلیل صادقند که، طبق لم ۱۱، این اصول برای همهٔ دنباله‌های اعدادگویا برقرارند. □

اما، هنوز یك میدان ساخته نشده است، زیرا دنباله‌ای مانند $(0, 1, 1, \ldots)$ کشی وغیر صفر است ولی وارون ندارد. برای حل این مشکل، به‌مسئلهٔ دیگری هم توجه می‌کنیم: وآن اینکه به‌طور شهودی دنباله‌های مختلف کشی می‌توانند حد برابر داشته باشند. بامعرفی مفهومی دیگر، هردو مشکل را باهم برطرف می‌کنیم.

تعریف. دنبالـه‌ای چون (s_n) از اعدادگویا را یك دنبالهٔ پوچ می‌نامیم اگر به 0 همگرا باشد، یعنی اگـر بـه‌ازای هر $\varepsilon > 0$، Nی وجود داشته باشدکه هرگاه $n > N$ آنگاه $|s_n| < \varepsilon$.

اگر دو دنبالهٔ (a_n) و (b_n) به‌یك حد l میل کنند، آنگاه به‌آسانی دیده می‌شودکـه دنبالهٔ $(a_n - b_n)$ پوچ است. این الهام‌بخش رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\mathscr{C}$ چون:

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow (a_n - b_n) \text{ پوچ باشد،}$$

است. برای اینکه ببینیم این یك رابطهٔ هم‌ارزی هست، ملاحظه می کنیم که احکام $(a_n) \sim (a_n)$ و $(a_n) \sim (b_n) \Rightarrow (b_n) \sim (a_n)$ کاملاً بدیهی هستند. اگر $(a_n) \sim (b_n)$ و $(b_n) \sim (c_n)$،

آنگاه (a_n-b_n) و (b_n-c_n) پوچ هستند، یعنی به ۰ میل می‌کنند. طبق استدلال اولین قضیهٔ فصل ۷، این امر ایجاب می‌کند که $((a_n-b_n)+(b_n-c_n))$ به ۰ میل کند، یعنی (a_n-c_n) هم پوچ باشد، لذا $(a_n)\sim(c_n)$.

حال فرض می‌کنیم $\mathbb{R}$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های کشی باشد، و ردهٔ هم‌ارزی شامل (s_n) با $[s_n]$ نشان داده شود.

عملهای جمع وضرب را با تعریفهای:

$$[a_n]+[b_n]=[a_n+b_n],$$

$$[a_n][b_n]=[a_nb_n]$$

به $\mathbb{R}$ سرایت می‌دهیم. این عملها خوش‌تعریف هستند. زیرا اگر $[a_n]=[a'_n]$ و $[b_n]=[b'_n]$، آنگاه $(a_n-a'_n)$ و $(b_n-b'_n)$ پوچ هستند. از این‌رو $((a_n+b_n)-(a'_n+b'_n))$ نیز پوچ است، ولذا $[a_n+b_n]=[a'_n+b'_n]$. اثبات خوش‌تعریف بودن ضرب به‌این‌سرراستی نیست. طبق لم ۱۲، اعداد گویایی چون A و B وجود دارند که

$$|a_n|<A\ ,\quad |b'_n|<B\ ,\quad n\in\mathbb{N}\ \text{به‌ازای هر}$$

حال اگر $\varepsilon>0$ مفروض باشد، می‌توانیم N_1ی، N_2یی پیدا کنیم که

$$n>N_1\Rightarrow|a_n-a'_n|<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

$$n>N_2\Rightarrow|b_n-b'_n|<\frac{\varepsilon}{A+B}.$$

اگر $n>N=\max(N_1\ ,\ N_2)$، آنگاه

$$\begin{aligned}|a_nb_n-a'_nb'_n|&=|a_n(b_n-b'_n)+(a_n-a'_n)b'_n|\\&\leqslant|a_n||b_n-b'_n|+|a_n-a'_n||b'_n|\\&<A\cdot\frac{\varepsilon}{A+B}+\frac{\varepsilon}{A+B}\cdot B\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین $(a_nb_n-a'_nb'_n)$ پوچ است، ولذا $[a_nb_n]=[a'_nb'_n]$.

قضیهٔ ۱۵. $\mathbb{R}$ با این عملها یك میدان است.

اثبات. بررسی صحت اصول موضوع (ج۱)–(ج۴)، (ض۱)–(ض۳)، و (پ) امری عادی است. عضو صفر $[0]$ است، عضو یکه $[1]$، و منفی $[a_n]$، $[-a_n]$ است. کار

اصلی، اثبات (ض۴) است: اگر $[a_n] \neq [0]$، آنگاه $[a_n]$ وارونی در $\mathbb{R}$ دارد.

حال $[a_n] \neq [0]$ اگر و فقط اگر (a_n) پوچ نباشد. لذا $\varepsilon > 0$ی وجود دارد که به‌ازای آن Nی با خاصیت $n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ وجود ندارد. واضحتر بگوییم، برای این مقدار ε، به‌ازای هر $N \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}$ی وجود دارد که $n > N$ و $|a_n| \geq \varepsilon$.

ولی چون (a_n) کشی است، N_1ی وجود دارد که اگر $m, n > N_1$ آنگاه $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. فرض کنیم $N_2 = \max(N, N_1)$. آنگاه به‌ازای هر $m > N_2$، $n > N_2$ی می‌توانیم بیابیم که $|a_n| \geq \varepsilon$، وسپس $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. لذا $|a_m| > \frac{1}{2}\varepsilon$.

(اگر دلیل آن روشن نیست: فرض کنید $|a_m| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$، آنگاه داریم

$$|a_n| = |(a_n - a_m) + a_m| \leq |a_n - a_m| + |a_m| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

که تناقض است.)

لذا به‌خصوص، به‌ازای $m > N_2$، $a_m \neq 0$. دنباله‌ای چون (b_n) را به‌صورت

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \leq N_2 \text{،} \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{اگر } n > N_2 \text{،} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \leq N \text{،} \\ 1 & \text{اگر } n > N_2 \text{،} \end{cases}$$

پس $(1 - a_n b_n)$ دنباله‌ای پوچ است؛ درواقع اگر $n > N_2$، برابر صفر است، و لذا $[1] = [a_n b_n]$. بنابراین $[a_n]$ وارون دارد، ودرنتیجه $\mathbb{R}$ یك میدان است. □

ترتیب در $\mathbb{R}$

برای تعریف ترتیب روی $\mathbb{R}$، مسئلهٔ دیگری وجود دارد. جملات دنباله‌ای که حد مثبت دارد ممکن است هم منفی باشند و هم مثبت. با توجه به‌لم زیر، می‌توانیم تعریفی مناسب، ولی اندکی غیرطبیعی، ارائه دهیم.

لم ۱۶. هردنبالهٔ گویای غیرپوچ کشی (a_n) دارای این خاصیت است که $\varepsilon > 0$ی و $N \in \mathbb{N}$ی وجود دارند که به‌ازای هر $n > N$، $|a_n| > \varepsilon$.

اثبات. این، همان پاراگرافهای دوم وسوم اثبات قضیهٔ ۱۵ است که در آن ε به‌جای $\frac{1}{2}\varepsilon$ گرفته می‌شود. □

تعریف. $[a_n]\in\mathbb{R}^+$ اگر وفقط اگر یا

(یك) $[a_n]=[0]$، یا

(دو) $0<\varepsilon$ی، $\varepsilon\in\mathbb{Q}$، وجود داشته باشدکه به ازای $N\in\mathbb{N}$ی، هرگاه $n>N$ آنگاه $a_n>\varepsilon$.

بنابراین، جملات هردنبالهٔکشی مطلقاً مثبت باید، از نقطه‌ای به‌بعد، نه‌فقط مثبت‌بلکه مقدار معینی (چون ε) بزرگتر از صفر باشند.

قضیهٔ ۱۷. $\mathbb{R}$ یك میدان مرتب است.

اثبات. واضح است‌که اگر $[a_n],[b_n]\in\mathbb{R}^+$، آنگاه $[a_n+b_n]\in\mathbb{R}^+$، و $[a_nb_n]\in\mathbb{R}^+$. همچنین‌واضح‌است‌که‌اگر $[a_n]\in\mathbb{R}^+$و$[-a_n]\in\mathbb{R}^+$، آنگاه$[a_n]=[0]$.

تنها باید نشان‌دهیم که $[a_n]\in\mathbb{R}^+$ یا $[-a_n]\in\mathbb{R}^+$. طبق‌لم۱۶، یا $[a_n]=[0]$ یا،به‌ازای $N\in\mathbb{R}$ی و $0<\varepsilon$ی‌هرگاه $n>N$ داریم $|a_n|>\varepsilon$. همچنین،چون (a_n)کشی است،به‌ازای N_1ی $m,n>N_1$ داریم $|a_m-a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$. لذابه‌ازای $n>\max(N,N_1)$، علامت a_n نمی‌تواند تغییرکند،زیرا درآن‌صورت باید داشته‌باشیم $a_n>\varepsilon$، $a_{n+1}<-\varepsilon$، و $|a_n-a_{n+1}|>2\varepsilon$ یا اینکه $a_n<-\varepsilon$، $a_{n+1}>\varepsilon$، وهمان نتیجهٔ قبلی.

بنابراین یـا عددی چون $N_2=\max(N,N_1)$ وجود دارد کـه بـه‌ازای هـر $n>N_2$، $a_n>\varepsilon$، کـه دراین صورت $[a_n]\in\mathbb{R}^+$؛ یا اینکه بـه ازای هـر $n>N_2$، $a_n<-\varepsilon$، که دراین صورت $[-a_n]\in\mathbb{R}^+$. □

کامل‌بودن $\mathbb{R}$

اثبات‌کامل بودن به‌مراتب دشوارتر است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که اگر

$$\hat{q}=[q,q,q,\ldots]\quad ،q\in\mathbb{Q}\text{ به‌ازای}$$

تعریف شود، آنگاه حکم $\mathbb{Q}$ یکـریخت ترتیبی بـا زیرمجموعهٔ $\{\hat{q}\in\mathbb{R}\mid q\in\mathbb{Q}\}$ از $\mathbb{R}$ است، به‌آسانی اثبات می‌شود.

لم ۱۸. اگر $[a_n]\in\mathbb{R}$ آنگاه به‌ازای عضوی چون $p\in\mathbb{Z}$، $[a_n]<\hat{p}$.

اثبات. طبق لم ۱۲، بـه ازای عضوی چون $A\in\mathbb{Q}$، $|a_n|<A$. اگر p یك عدد صحیح ناکمتر از $A+1$ باشد، آنگاه $[a_n]<\hat{p}$. □

قضیهٔ ۱۹. $\mathbb{R}$ یك میدان مرتب‌کامل است.

اثبات. فقط باید کامل بودن اثبات شود. پس فرض می‌کنیم $X \neq \varnothing$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، وعضوی چون $[x_n]$ از $\mathbb{R}$ یک کران بالا برای X باشد. طبق لم ۱۸ به‌ازای عضوی مثل $p \in \mathbb{Z}$، $[x_n] < \hat{p}$، پس $\hat{p}$ یک کران بالا برای X است.

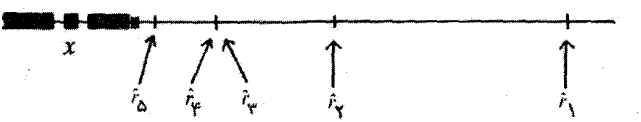
به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$ یک عدد گویا چون r_m را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم k_m کوچکترین عدد صحیحی است که $\widehat{k_m/2^m}$ یک کران بالا برای X باشد، و فرض کنیم $r_m = k_m/2^m$. (نماد $\hat{q}$، $q = k_m/2^m$ صرفاً روش دیگری است برای نوشتن $\widehat{k_m/2^m}$ که از نظر چاپ مناسبتر است.)

ابتدا باید این روند را توجیه کنیم. مجموعهٔ S متشکل از همهٔ اعداد صحیح j_mی که به‌ازای آن $\widehat{j_m/2^m}$ یک کران بالا برای X باشد، ناتهی است، زیرا $j_m = 2^m p$ در این مجموعه است. از طرف دیگر عدد صحیحی چون h وجود دارد که به‌ازای آن $\widehat{h/2^m}$ یک کران بالا نیست. زیرا اگر $[a_n] \in X$، آنگاه می‌توان $N \in \mathbb{N}$ی و $A \in \mathbb{Q}$یی پیدا کرد که به‌ازای هر $n > N$،

$$-A < a_n < A.$$

اگر $h/2^m < -A$، آنگاه $\widehat{h/2^m}$ یک کران بالا برای X نیست. نتیجه اینکه هر $j_m \in S$ بزرگتر از h است. فرض کنیم T مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{j_m - h \mid j_m \in S\}$ باشد: این مجموعه ناتهی است، ولذا طبق اصل خوش‌ترتیبی کوچکترین عضوی چون l دارد. حال می‌نویسیم $k_m = l + h$.

اکنون می‌توانیم اعداد گویای $r_m = k_m/2^m$ را، به عنوان کوچکترین اعداد گویای به‌صورت $(\text{عدد صحیح})/2^m$ که $\widehat{r_m}$ یک کران بالا برای X باشد، طبق تصویر زیر نمایش دهیم:



بنا به تعریف داریم

$$2k_m - 2 < k_{m+1} \leqslant 2k_m.$$

زیرا اگر

$$\widehat{(2k_m - 2)/2^{m+1}}$$

یک کران بالا برای X باشد،

$$\widehat{(k_m - 1)/2^m}$$

نیز چنین است، و خود متناقض این مطلب است که k_m کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت

است؛ واز طرف دیگر

$$\overbrace{۲k_m / ۲^{m+۱}}$$

یك‌کران بالا ۱است، ولذا $k_{m+۱} \leqslant ۲k_m$. نتیجه اینکه

$$r_m - \frac{۱}{۲^{m+۱}} \leqslant r_{m+۱} \leqslant r_m.$$

ولی به‌آسانی از این مطلب نتیجه می‌شودکه (r_n) یك دنبالهٔکشی است، زیرا

$$|r_m - r_{m+s}| \leqslant ۲^{-m-۱} + \cdots + ۲^{-m-s} < ۲^{-m}$$

اکنون تقریباً به‌نتیجهٔ مطلوب‌رسیده‌ایم: فرض‌کنیم $r = [r_n] \in \mathbb{R}$. آنگاه با توجه‌به‌تصویر فوق می‌توان انتظار داشت‌که rکوچکترین‌کران بالای مطلوب باشد.

با برهانی ساده، از این حقیقت‌که هر $\hat{r}_m$ یك‌کران بالاست، نتیجه می‌گیریم‌که r هم یك‌کران بالاست. فرض‌کنید r کوچکترین‌کران بالا نباشد، لذا $t < r$ یك‌کران بالای X است. آنگاه $t = [t_n]$،وبنا به‌تعریف ترتیب‌در $\mathbb{R}$ ، $\varepsilon > ۰$، $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ، وجود داردکه‌به‌ازای $n > N$، $r_n - t_n > \varepsilon$. ولی به‌ازای‌مقداری به‌قدرکافی‌بزرگ چون mداریم $۱/۲^m < \varepsilon$، ولذامی‌توانیم، با حفظ‌کران‌بالابودن، r_m را به $r_m - ۱/۲^m$ تقلیل دهیم. ولی‌این امرk_mرا به $k_m - ۱$ تقلیل می‌دهد، کـه متناقض خاصیت معرف k_m است. پس rکوچکترین‌کران بالاست، و $\mathbb{R}$ کامل است. □

مانند قبل، در واقع $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ نیست، ولی البته یك یکریختی ترتیبی وجود داردکه طبق آن می‌توانیم عضو q از $\mathbb{Q}$ را به‌جای $\hat{q}$ از $\mathbb{R}$ اختیارکنیم وبدین ترتیب $\mathbb{Q}$ را بـه زیرمجموعه‌ای واقعی از $\mathbb{R}$ تبدیل نماییم. پس همان‌طورکه می‌خواستیم سرانجام زنجیری از دستگاههای اعداد به‌دست آوردیم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_۰ \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

تمرین

۱. ابتدا مطالب اثبات نشدهٔ این فصل:
(الف) اثبات‌کامل قضیهٔ ۶، شامل خواص حساب فرض شدهٔ در آن مبحث، را بنویسید.
(ب) اثبات قضیهٔ ۸ راکامل‌کنید.
(پ) قضیهٔ ۱۵ را ثابت‌کنید.

۲. اگر R یك حلقه باشد، به ازای $x \in R$ و $n \in \mathbb{N}_۰$، عضوهای $x^n \in R$، و $\hat{n}$ را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف‌کنید:

$$\hat{0}=0_R,\ \widehat{n+1}=\hat{n}+1_R,$$
$$x^0=1_R,\ x^{n+1}=x^n x.$$

اگر $\binom{n}{r}=n!/[r!(n-r)!]$ ضریب دوجمله‌ای باشد، ثابت کنید که به‌ازای هر $x, y\in R$، داریم

$$(x+y)^n=x^n+\hat{n}x^{n-1}y+\cdots+\widehat{\binom{n}{r}}x^{n-r}y^r+\cdots+y^n.$$

۳. اگر $p\in\mathbb{N}$ اول و $\hat{p}=0_R$ در R باشد (همچنانکه مثلاً در $\mathbb{Z}_p$ چنین است)، نشان دهید که

$$(x+y)^p=x^p+y^p.$$

مثالی از حلقه‌ای چون R ذکر کنید که $\hat{n}=0_R$، ولی $(x+y)^n\neq x^n+y^n$.

۴. اگر R حلقهٔ مرتبی باشد، نشان دهید:

$$x^2-\hat{5}x+\hat{6}\geqslant 0_R$$

اگر و فقط اگر $x\geqslant\hat{3}$ یا $x\leqslant\hat{2}$.

۵. با استفاده از الگوریتم اقلیدسی، ثابت کنید که اگر $m, n\in\mathbb{N}$ متباین باشند، آنگاه اعضایی چون $a, b\in\mathbb{N}$ وجود دارند که

$$am+bn=1.$$

هرگاه $m=1008$ و $n=1375$، مطلوب است a و b.

۶. به‌طور صوری ثابت کنید که هر عدد گویای مثبت را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت m/n، که در آن $m, n\in\mathbb{N}$ متباین هستند، نوشت. این عمل را «نوشتن کسر به‌ساده‌ترین صورت» می‌نامند. اگر دو عدد گویای p/q و r/s به‌ساده‌ترین صورت باشند، آیا $(ps+qr)/(qs)$ نیز چنین است؟ $(pr)/(qs)$ چطور؟
نشان دهید که اگر p/q به ساده‌ترین صورت باشد، p^2/q^2 نیز چنین است. با استفاده از یکتایی کسرهای به‌ساده‌ترین صورت، اثباتی محکم برای اصم بودن $\sqrt{2}$ ارائه دهید.

۷. احکام زیر را در مورد هرمیدان مرتب (که فرض می‌کنیم $\mathbb{Q}$ را شامل می‌شود) اثبات کنید:

(الف) $a\leqslant b\iff -b\leqslant -a$،
(ب) $a<b\iff -b<-a$،

(پ) $-۱ < ۰ < ۱$،
(ت) اگر $a \neq ۰$، آنگاه $a^۲ > ۰$،
(ث) $۰ < a \leqslant b \Rightarrow ۰ < b^{-۱} \leqslant a^{-۱}$،
(ج) اگر $a < ۰$ و $b < ۰$، آنگاه $ab > ۰$.

۸. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ ناتهی متناهی چون X از هر میدان مرتب، دارای کوچکترین عضو و بزرگترین عضو است. (کوچکترین عضو، عضوی چون $x \in X$ است که به‌ازای هر $y \in X$، $x \leqslant y$؛ بزرگترین عضو نیز به همین نحو تعریف می‌شود). آیا اگر شرط متناهی بودن X را حذف کنیم حکم فوق هنوز هم صادق است؟

۹. در تعریف رابطهٔ ترتیبی برای $\mathbb{R}$، چرا مناسب نیست تعریف کنیم که $[a_n] \geqslant ۰$ اگر $N \in \mathbb{R}$ی وجود داشته باشد که به‌ازای هر $n > N$، $a_n \geqslant ۰$؟

۱۰. فرض کنید $a_n = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} + \ldots + (-۱)^{n+۱}/(n+۱)!$. ثابت کنید (a_n) کشی است، و لذا به‌حدی چون l میل می‌کند. ثابت کنید که همهٔ a_nها گویا هستند، ولی l گویا نیست.

۱۰

اعداد حقیقی به عنوان یك میدان مرتب کامل

در این فصل نشان می‌دهیم کـه روند فصل قبل را چگونه می‌توان وارونه کـرد. در آنجا وجود مجموعه‌ای با خواص بنیادی (ط ۱)ـ(ط ۳) اعداد طبیعی به عنوان اصل موضوع پذیرفته، و سرانجام مجموعه‌ای چون $\mathbf{R}$ ساخته شد که یك میدان مرتب کامل بود. دراینجا بـا قبول اصل موضوع وجود یك میدان مرتب کامل، آغاز و وارونـه عمل می‌کنیم تـا به مجموعهٔ اعـداد طبیعی برسیم. این فـرایند ازنظر تکنیکی ساده‌تر است (مثلاً، زنجیر $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ را واقعاً، بدون یکریختی‌های ساختگی، به دست می‌آوریم.)

این بحث را با ذکـر چند مثال ازمیدان، حلقه، میدان مرتب، وحلقهٔ مرتب شروع می‌کنیم، تا نشان دهیم که گونه‌های وسیعی ازاین نوع دستگاهها وجود دارند. هردستگاهی که ازمجموعه‌ای صوری ازاصول موضوع تبعیت کند یك الگوی آن اصول موضوع نامیده می‌شود، وبرتری روش اصل موضوعی دراین است که هراستنتاجی ازاصول موضوع درهر الگوی آن اصول نیز صادق است. بنابراین هرنتیجهٔ درستی راکه ازاصول موضوع یك میدان مرتب استنتاج کنیم درالگوهای $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ هم که درفصل قبل ساخته شدند ـ و درواقع در هر دستگاهی که این اصول را ارضا کند ـ برقرار است. بنابراین تنها کافی است نتایج را یکبار استنتاج کنیم، ونه اینکه برای هرالگو آن را تکرار نماییم.

روش اصل موضوعی برتری دیگری نیز دارد: برتری انتخاب الگویی یکتا (تا حد یکریختی). مثلاً، درمورد اصول (ط ۱)ـ(ط ۳) این اتفاق افتاد: دستگاههایی که دراین اصول صدق می‌کنند یکریخت ترتیبی یکدیگرند ولذا ازهر نظر یکی هستند. خواهیم دید

که همین مطلب درمورد اصول موضوع میدان مرتب کامل نیز درست است: این اصول، دستگاهی یکتا، تا حد یکریختی، تعریف می‌کنند. بنابراین می‌توانیم چنین دستگاهی را همان مجموعهٔ اعداد حقیقی بنامیم. این پایان طرح کار است: با ایده‌های شهودی نقاط روی یك خط وبسطهای اعشاری شروع کردیم ومجموعه‌ای ازاصول موضوع راکه دستگاه مطلوب را به‌طور یکتا تعریف می‌کند فرمول‌بندی نمودیم. (ومی‌توانیم به‌طور همزمان توصیفی به‌همان سادگی برای‌اعداد صحیح وهمچنین برای اعدادگویا هم به‌دست‌آوریم.)

چند مثال ازحلقه ومیدان

این مطلب درست نیست‌که هردستگاهی ازاصول موضوع ساختی یکتا، حتی تا حد یکریختی، تعریف می‌کند. مثلاً $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ هردوحلقه هستند، ولی یکریخت نیستند زیرا $\mathbb{Q}$ میدان است و $\mathbb{Z}$ نیست. برای اینکه بدوسیلهٔ وضع اصول موضوع اضافی امکانات را محدودکنیم به‌معرفی چند مثال تازه می‌پردازیم.

مثال ۱۰. $\mathbb{Z}_n$، حلقهٔ اعداد به‌سنج n. فرض‌کنیم n یك عدد صحیح بزرگتر از صفر باشد. و $r, s \in \mathbb{Z}$. رابطهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$r \sim s \iff r - s = kn \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$$

به‌ازای عضوی چون

به‌آسانی ثابت می‌شودکه این رابطه، رابطه‌ای هم‌ارزی‌است، ومجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی آن را $\mathbb{Z}_n$ می‌نامیم. ردهٔ شامل m را با m_n نشان می‌دهیم. با تعمیم‌الگوریتم تقسیم، حکم زیر به‌دست می‌آید: اگر $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n > 0$ آنگاه اعدادی چون $q, r \in \mathbb{Z}$ با شرط $0 \leqslant r < n$ وجود دارندکه $m = qn + r$. پس $m - r = qn$، و لذا هرعدد صحیح هم‌ارز عدد صحیحی چون r است‌که $0 \leqslant r < n$. اعضای $\mathbb{Z}_n$ عبارتند از 0_n، 1_n، ...، $(n-1)_n$. نظیر فصل ۳ (که درآن مورد خاص $n = 3$ بحث شد) می‌توانیم روی رده‌های هم‌ارزی اعمالی به‌شرح زیر تعریف کنیم:

$$r_n + k_n = (r+k)_n \text{ ،}$$

$$r_n k_n = (rk)_n \text{ .}$$

این عملها خوش‌تعریف هستند و دراصول موضوع یك حلقه صدق می‌کنندکه عضو صفرش 0_n وعضو یکه‌اش 1_n است.

اگر n اول نباشد، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ میدان نیست. زیرا اگر با شرایط $0 < r < n$، $0 < k < n$، $n = rk$ آنگاه

$$r_n k_n = n_n = 0_n \text{ .}$$

می‌گوییم عضوی چون x ازیك حلقه مقسوم‌علیه صفر است اگر $x \neq 0$، ولی، به‌ازای عضوی چون $y \neq 0$ درآن حلقه، $xy = 0$. پس r_n و k_n مقسوم‌علیه‌های صفر هستند.

ولی میدان مقسوم‌علیه صفر ندارد، زیرا اگر درمیدانی $xy=0$ ، $y\neq 0$ ، آنگاه داریم $x=xyy^{-1}=0y^{-1}=0$. پس $\mathbf{Z}_n$ ، به‌ازای nهای غیراول، میدان نیست.

مثلاً، در $\mathbf{Z}_6$ داریم $2_6 3_6=0_6$، ولی $2_6\neq 0_6$ و $3_6\neq 0_6$. این اعضا در $\mathbf{Z}_6$ وارون ضربی ندارند؛ زیرا می‌توانیم مستقیماً هم هرشش عضو را امتحان کنیم و این نکته را ببینیم. بنابراین $0_6=0_6 2_6$ ، $2_6=1_6 2_6$ ، $4_6=2_6 2_6$ ، $0_6=3_6 2_6$ ، $2_6=4_6 2_6$ ، $4_6=5_6 2_6$. درهیچکدام جواب 1_6 به دست نمی‌آید.

اما، اگر n اول باشد، آنگاه $\mathbf{Z}_n$ یك میدان است. طرق متعددی برای اثبات این مطلب وجود دارد، از آن میان روش زیر هرچند پیشرفته‌ترین نیست ولی مستقیم‌ترین هست. اگر $r_n\neq 0_n$ مفروض باشد، با محاسبهٔ حاصلضربهای

$$r_n 0_n=0_n\ ,\ r_n 1_n=r_n\ ,\ \cdots\ ,\ r_n(n-1)_n=?.$$

وارونی برای آن پیدا می‌کنیم. همهٔ این عضوها متفاوت هستند، زیرا اگر

$$r_n k_n=r_n l_n$$

و $0\leqslant k<l<n$ ، آنگاه

$$r_n(l-k)_n=0_n$$

پس n عدد $r(l-k)$ را بخش می‌کند. ولی هردو عامل بین 0 و n قرار دارند، وچون n اول است به‌تناقض می‌رسیم.

حال این فهرست ازحاصلضربها، دقیقاً شامل n عضو است که همه متفاوت هستند؛ و ازآنجاکه $\mathbf{Z}_n$ فقط n عضو دارد، هرکدام باید دقیقاً یکباردرفهرست ظاهر بشوند به‌خصوص 1_n هم باید درجایی، فرضاً در $r_n k_n=1_n$ ، ظاهر گردد؛ ولذا k_n وارون موردنظر است. ازاین‌رو، اگر n اول باشد، $\mathbf{Z}_n$ یك میدان است.

مثلاً، در $\mathbf{Z}_5$ ، وارون 3_5 را با محاسبهٔ حاصلضربهای $0_5=5_5 0_5$، $3_5=5_5 3_5$، $1_5=2_5 3_5$، $4_5=3_5 3_5$، $2_5=4_5 3_5$، به دست می‌آوریم؛ این حاصلضربها، به ترتیب 0_5، 3_5، 1_5، 4_5، 2_5 دقیقاً همان اعضای $\mathbf{Z}_5$ هستند. 1_5 هم درمیان آنها هست، و وارون 3_5، 2_5 است.

مثال ۲. $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\in\mathbf{R}\,|\,a,\,b\in\mathbf{Q}\}$. این دستگاه میدانی است که عضو صفرش $0+0\sqrt{2}$ و عضو یکه‌اش $1+0\sqrt{2}$ است. وارون جمعی $a+b\sqrt{2}$، $-a-b\sqrt{2}$ است، واگر $a+b\sqrt{2}\neq 0$ ، وارون ضربیش

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{(-b)}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

است. (به‌آسانی ثابت می‌شود که اگر یکی از a و b صفر نباشند، آنگاه $a^2-2b^2\neq 0$؛

درحقیقت اثبات نظیر اثبات گنگ‌بودن $\sqrt{۲}$ است.)

مثال ۳. این مثال بعداً به‌عنوان مثال نقیض به‌کار خواهد رفت. مثال این است: میدان $\mathbb{R}(t)$ متشکل از توابع گویا با مجهولی چون t. هرعضو $\mathbb{R}(t)$ را می‌توانیم به راحت‌ترین‌وجه به‌صورت خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای

$$\frac{a_n t^n+\cdots+a_0}{b_m t^m+\cdots+b_0}$$

توصیف کنیم، که در آن $a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$ وهمهٔ b_iها هم صفر نیستند. هر کسر نظیر فوق، تابعی چون $f: D \to \mathbb{R}$ را به دست می‌دهد که در آن

$$D=\{\alpha \in \mathbb{R} \mid b_m\alpha^m+\cdots+b_0 \neq 0\}$$

و

$$f(\alpha)=\frac{a_n\alpha^n+\cdots+a_0}{b_m\alpha^m+\cdots+b_0}.$$

این‌عبارت، خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای‌است، به‌همان نحوی که‌هرعدد گویا هم‌خارج‌قسمت دوعددصحیح است، ولذا نام «تابع گویا».[۱]

مجموع وحاصلضرب توابع گویا به‌همان صورت متداول تعریف می‌شوند، و دستگاه حاصل یك میدان است. $\mathbb{R}$ را می‌توانیم با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}(t)$ متشکل از توابع

---

۱. تعریفی صوری از $\mathbb{R}(t)$ به‌صورت زیر است. نخست، چون هرچندجمله‌ای با ضرایبش، $a_0, \cdots, a_n$، مشخص می‌شود، هر چندجمله‌ای صوری را به صورت دنباله‌ای چون $s: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که به ازای $n \in \mathbb{N}_0$، برای تمام $m > n$ داشته باشیم $s(m)=0$. می‌نویسیم $s(m)=s_m$ و s را با دنبالهٔ $(s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)$ نمایش می‌دهیم، منتها با این تفاهم که ازنقطه‌ای به‌بعد داریم $s_m=0$. جمع وضرب را به‌صورت

$$(s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)+(p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots)=(s_0+p_0, s_1+p_1, \cdots, s_n+p_n, \cdots)$$

$$(s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)(p_0, p_1, \cdots p_n, \cdots)=(s_0p_0, s_0p_1+s_1p_0, \cdots, q_n, \cdots)$$

که در آن $q_n=s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0$، تعریف می‌کنیم

دنبالهٔ $(0, 1, 0, 0, \cdots)$ را t می‌نامیم، آنگاه داریم

$$(s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots)=s_0+s_1t+\cdots+s_nt^n+\cdots,$$

ولذا اگر هر $r \in \mathbb{R}$ را با $(r, 0, 0, \cdots)$ یکی بگیریم، به نمادگذاری معمولی چندجمله‌ایها بازمی‌گردیم. چندجمله‌ایهای صوری، یك حلقه تشکیل می‌دهند با استفاده از رده‌های هم‌ارزی زوجهای مرتب، دقیقاً به‌همان‌نحوی که $\mathbb{Q}$ را از $\mathbb{Z}$ ساختیم، $\mathbb{R}(t)$ را هم‌ازحلقهٔ چندجمله‌ایهای صوری می‌سازیم.

$a_0 / 1$، که در آن $a_0 \in \mathbb{R}$، یکی بگیریم.

می‌توانیم مثالهای جالب دیگری هم برای حلقه و میدان عرضه کنیم: ولی، مثالهای فوق به‌خصوص مناسب این فصل هستند.

چند مثال از حلقه و میدان مرتب

حال به‌معرفی ترتیب می‌پردازیم. وقتی که آن را درمورد مثالهای فوق به‌کار ببندیم به‌نتایج جالبی دست می‌یابیم.

مثال ۱. $\mathbb{Z}_n$ را نمی‌توانیم طوری مرتب کنیم که به‌حلقه‌ای مرتب تبدیل شود. (البته می‌توانیم آن را به نحوی مرتب کنیم، ولی با حساب هماهنگ نمی‌شود، مثلاً

$$0_n < 1_n < 2_n < \cdots < (n-1)_n .$$

ولی از این ترتیب یک حلقهٔ مرتب حاصل نمی‌شود، زیرا در آن صورت از $0_n < 1_n$، $0_n < (n-1)_n$ نتیجه می‌گیریم که $0_n < 0_n$ $1_n + (n-1)_n = 0_n$ که بی‌معنی است.)

کلی‌تر بگوییم، فرض کنیم بتوانیم رابطه‌ای ترتیبی روی $\mathbb{Z}_n$ تعریف کنیم که آن را به حلقه‌ای مرتب تبدیل کند. آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{Z}_n^+$ متشکل از اعداد مثبت وجود خواهد داشت که اصول موضوع (ت ۱)-(ت ۳) را ارضا می‌کند. بنا به (ت ۲)، یا $1_n \in \mathbb{Z}_n^+$ یا $-1_n \in \mathbb{Z}_n^+$. از آنجا که $1_n = (-1_n)(-1_n) \cdot 1_n = 1_n$، هریک ازاین دوحالت، بنابه (ت ۱)، ایجاب می‌کند که $1_n \in \mathbb{Z}_n^+$. با استفاده از (ت ۱) واستقرا داریم $2_n = 1_n + 1_n \in \mathbb{Z}_n^+$، $3_n \in \mathbb{Z}_n^+$، ...، $(n-1)_n \in \mathbb{Z}_n^+$. ولی این به‌همان تناقض قبلی منجر می‌شود. ازاین‌رو $\mathbb{Z}_n$ را نمی‌توان به حلقه‌ای مرتب تبدیل کرد.

مثال ۲. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ را به دوطریق می‌توان به‌میدانی مرتب تبدیل کرد!

روش اول این است که چون $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$، رابطهٔ ترتیبی معمولی $\mathbb{R}$ را به $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ محدود کنیم: بدیهی است که این ترتیب، $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ را به یک میدان مرتب تبدیل می‌سازد.

روش دوم پیچیده‌تر است. تابعی چون $\theta : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ با تعریف

$$\theta(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

وجود دارد. حال θ یک یکریختی از $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ به‌خودش است (که معمولاً یک خودریختی نامیده می‌شود)، یعنی θ یک دوسویی با این خواص است که به ازای هر $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$$

$$\theta(xy)=\theta(x)\theta(y)\ .$$

(مطلب فوق را بررسی کنید!) اگر رابطهٔ ترتیبی راکه در بالا تعریف شد بـا $\geqslant$ نمایش دهیم، رابطه‌ای جدید به‌نمایش $\geqslant$ چنین تعریف می‌شود:

$$x\geqslant y \Longleftrightarrow \theta(x)\geqslant\theta(y)\ .$$

خواننده خود باید بررسی کندکه این ترتیب نیز $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ را به یك میدان مرتب تبدیل می‌سازد. مثلاً، اگر $x, y \geqslant ۰$ آنگاه $\theta(x), \theta(y) \geqslant \theta(۰)=۰$، پس $\theta(x)\theta(y)\geqslant ۰$، لذا $\theta(xy)\geqslant ۰$، وبنابراین $xy\geqslant ۰$. اصول دیگر نیز بـه همین‌نحو اثبات می‌شونـد. ملاحظه می‌کنیم که دراین ترتیب، $\sqrt{۲} > ۰$.

تذکر. این مثال را باید بـا واقعیت زیر مقایسه‌کرد: $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ را تنها به‌یك طریق می‌توان به‌حلقه‌ای مرتب (یا درمورد $\mathbb{Q}$، به‌میدانی مرتب) تبدیل کرد. دلیل این‌امر به‌طور خلاصـه چنین است. همان طـور کـه درمـورد $\mathbb{Z}_n^+$ بحث شد، همواره $۰ < ۱$، زیـرا $(-۱)^۲=۱^۲=۱$. با استقرا ثابت می‌شود که درهر رابطهٔ ترتیبی روی $\mathbb{Z}$، همهٔ اعـداد طبیعی بایـد مثبت باشند، پس بنا به (ت ۲) اعـداد صحیح منفی معمولی بایـد درترتیب مفروض هم منفی باشند. لذا درمورد $\mathbb{Z}$، تنها همان‌ترتیب معمولی اعتبار دارد. ازآنجاکه هرعضو $\mathbb{Q}$ خارج‌قسمتی ازاعداد صحیح‌است، همین مطلب فوق (باکمی زحمت) برای $\mathbb{Q}$ نیز صادق است.

این مطلب درمورد $\mathbb{R}$ نیز صادق است، ولی برای اثبات به‌این واقعیت نیاز داریم که هرعدد صحیح مثبت جذر دارد، واقعیتی‌که نیازمند اثبات است. اثبات این‌مطلب نتیجهٔ ساده‌ای ازاصل کمال است. اگر $x\in\mathbb{R}$ و $x > ۰$، فرض می‌کنیم

$$L=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y>۰\ \&\ y^۲<x\}\ .$$

آنگاه به‌آسانی دیده می‌شودکـه L ازبالاکراندار وغیرتهی است. بنا بـه اصل کمال، L کوچکترین کران بالایی چون u دارد؛ با برهان خلف به‌آسانی دیده می‌شودکه $u^۲=x$.

حال، با هر رابطه‌ای‌که $\mathbb{R}$ را به‌میدانی مرتب تبدیل کند، همهٔ عضوهای به صورت $y^۲\ (y\in\mathbb{R})$ باید مثبت‌باشند، وهمهٔ عضوهای به‌صورت $y^۲-$ باید منفی‌باشند. بنابه‌مطالبی که هم‌اکنون گفتیم، اعضای مثبت ومنفی $\mathbb{R}$ (به‌معنی معمول) باید نسبت به‌هر رابطهٔ ترتیبی دیگری نیز به ترتیب مثبت ومنفی باشند، زیرا این عضوها دقیقاً به همان صورت موردنظر هستند. پس تنها یك رابطهٔ ترتیبی وجود داردکه $\mathbb{R}$ را به‌یك میدان مرتب تبدیل می‌کند.

مثال ۳. می‌توان رابطه‌ای تـرتیبی بـه میدان توابع گویای $\mathbb{R}(t)$ نسبت دادکـه خواص جالبی هم داشته باشد. (این رابطه مفهومی از اندازه به‌تابع نسبت نمی‌دهد، ولی این امر ما را ازارائهٔ‌ترتیبی‌که اصول موضوع (ت ۱)–(ت ۳) را ارضاکند بازنمی‌دارد. $\mathbb{R}(t)^+$ را با

$$\mathbb{R}(t)^+=\{f(t)\in\mathbb{R}(t)|\exists\,\alpha_\circ\in\mathbb{R}:\alpha\geqslant\alpha_\circ\Rightarrow f(\alpha)\geqslant\circ\}$$

تعریف می‌کنیم، به‌این معنی‌که $f(t)$ را مثبت می‌دانیم اگر وفقط اگر $f(\alpha)$ به‌ازای همهٔ مقادیر به‌قدر کافی بزرگ α، مثبت باشد. (مثلاً با این تعریف $(t^2-17)/(5t^3+4t)$ مثبت است، ولی $(3t-t^2)/(t+1)$ منفی است.) می‌توانیم ثابت‌کنیم که این ترتیب، $\mathbb{R}(t)$ را به‌میدانی مرتب تبدیل می‌کند. اگر $\mathbb{R}$ را با مجموعهٔ توابع ثابت یکی بگیریم، آنگاه همچون گذشته تحدید ترتیب $\mathbb{R}(t)$ روی $\mathbb{R}$ همان ترتیب معمولی $\mathbb{R}$ است.

باکمال تعجب، $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}(t)$ از بالا کراندار است؛ درحقیقت تابع $f(t)=t$ کران بالایی برای آن است. زیرا اگر $\beta\in\mathbb{R}$ آنگاه تابع $g(t)=f(t)-\beta=t-\beta$ دارای این خاصیت است‌که به‌ازای هر $\alpha>\beta$، $g(\alpha)>\circ$، پس $g(t)\in(t)^+$. این امر ثابت می‌کندکه t کران بالایی برای $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}(t)$ است.

بازهم یکریختی

ما قبلاً هم مفهوم «یکریختی» و«یکریختی ترتیبی»را درموارد خاص به‌کار برده‌ایم، وحال برما واجب است‌که آنها را درحالت‌کلی بررسی‌کنیم. یادآوری می‌کنیم‌که اگر R و S دوحلقه باشند آنگاه $\theta:R\to S$ یك یکریختی است اگر دوسویی باشد واگر به‌ازای هر $r,s\in R$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}\theta(r+s)&=\theta(r)+\theta(s)\\ \theta(rs)&=\theta(r)\theta(s).\end{aligned}\qquad(*)$$

ثابت‌کردیم‌که بسیاری ازساختهای اصل موضوعی تا حد یکریختی یکتا هستند. خواننده ممکن است بخواهد بداندکه چرا نمی‌توانیم بهتر ازاین عمل‌کنیم، وآنها را واقعاً یکتا بسازیم. دلیل این امر این است‌که اولاً توقعی بیش ازاندازه است، و درثانی آن‌چنان مزیتی هم‌ندارد. ازاین‌گذشته، هریکریختی‌صرفاً نام اعضا را (از r به $\theta(r)$) عوض‌می‌کند؛ پس اگر R یك حلقه باشد، می‌توانیم، با روشهای متعدد تعویض نام، به‌حلقه‌های یکریخت بسیاری دست یابیم. به‌بیان صوری، فرض‌کنیم S مجموعهٔ دلخواهی باشدکه به‌ازایش یك دوسویی $\theta:R\to S$ وجود داشته باشد (S را یك حلقه فرض نمی‌کنیم) وبا استفاده از (*) به‌طور وارونه عملهای حلقه روی S را با

$$\begin{aligned}\theta(r)+\theta(s)&=\theta(r+s)\\ \theta(r)\theta(s)&=\theta(rs).\end{aligned}$$

تعریف بکنیم. آنگاه S با R یکریخت می‌شود.

چطور می‌دانیم‌که مجموعه‌هایی چون S با دوسویی‌هایی مناسب وجود دارند؟ هر شیء دلخواهی چون t را اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم‌که $S=R\times\{t\}$؛ θ را با

$\theta(r)=(r,t)$ تعریف می‌کنیم. این تابع همیشه یك دوسویی است؛ و t هایی متفاوت، Sهای متفاوتی را به دست می‌دهند. این مطلب نشان می‌دهد که گونه‌های وسیعی از مجموعه‌هایی چون S را می‌توان یافت؛ واین صرفاً یك راه سادهٔ یافتن آنهاست.

از آنجا که عملهای جبری روی حلقه است که مهم‌اند، ونه خود اعضا، حلقه‌های یکریخت به همان خوبی حلقهٔ اول هستند. پس انتظار بسیار محدودکننده‌ای است که دستگاهی جبری را به‌طور یکتا مشخص کنیم؛ وانگهی، یکتایی تا حد یکریختی مطلوبترین حالتی است که به‌آن نیازمندیم.

همین مطلب در مورد یکریختی‌های ترتیبی بین دوحلقهٔ مرتب R و S هم که علاوه بر (*) شرط

$$r\geqslant s\Rightarrow\theta(r)\geqslant\theta(s)$$

را نیز ارضا می‌کنند، صادق است

ازفلسفه‌بافی دست برمی‌داریم و به ذکر نتایجی مفید وساده از (*) می‌پردازیم.

لم ۱. اگر $\theta:R\to S$ یك یکریختی حلقه‌ای باشد، آنگاه به‌ازای هر $r\in R$:

(الف) $\theta(0)=0$،

(ب) $\theta(1)=1$،

(پ) $\theta(-r)=-\theta(r)$،

(ت) $\theta(1/r)=1/\theta(r)$، به‌شرطی که $1/r$ وجود داشته باشد.

اثبات. به‌ازای هر $r\in R$، داریم $r=0+r$. با اعمال θ، داریم

$$\theta(r)=\theta(0+r)=\theta(0)+\theta(r).$$

حال چون θ پوشاست، هرعضو S به‌ازای عضوی چون $r\in R$ به‌صورت $\theta(r)$ است. بنابراین به‌ازای هر $s\in S$

$$s=\theta(0)+s$$

ولذا بنا به قضیهٔ ۱ فصل ۹، $\theta(0)=0$. این مطلب (الف) را ثابت می‌کند، و (ب) هم به‌همین‌نحو اثبات می‌شود. برای اثبات (پ).

$$r+(-r)=0,$$

$$\theta(r)+\theta(-r)=\theta(0)=0.$$

بنا به‌قضیهٔ ۲ فصل ۹، $\theta(-r)=-\theta(r)$. این مطلب (پ) را ثابت می‌کند، و اثبات (ت) هم به‌همین نحو است. □

اگر R یك حلقه باشد، آنگاه هر زیرحلقهٔ R زیرمجموعه‌ای چون S است که:

$$r, s \in S \Rightarrow r+s \in S \quad \text{(یك)}\text{،}$$
$$r, s \in S \Rightarrow rs \in S \quad \text{(دو)}\text{،}$$
$$s \in S \Rightarrow -s \in S \quad \text{(سه)}\text{،}$$
$$1 \in S \quad \text{(چهار)}\text{.}$$

از (چهار)، (سه)، (یك) نتیجه می‌گیریم که $0 = 1 + (-1) \in S$. مثلاً $\mathbf{Z}$ زیرحلقه‌ای از $\mathbf{Q}$، و $\mathbf{Q}$ زیرحلقه‌ای از $\mathbf{R}$ است.

همان‌طورکه درموردیکریختی‌های بین حلقه‌ها بیان شد، اغلب‌کافی‌است زیرحلقه‌ای یکریخت با چیزی بشود، به‌جای اینکه واقعاً خرد آن چیز باشد.

اگر R یك میدان باشد، آنگاه هر زیرمیدان S زیرحلقه‌ای از آن است که خاصیت اضافی

$$s \in S, s \neq 0 \Rightarrow s^{-1} \in S \quad \text{(پنج)}\text{،}$$

را نیز دارا باشد.

مثلاً، $\mathbf{Q}$ زیرمیدانی از $\mathbf{R}$ است.

این ایده‌ها دربخش بعد به درد می‌خورند.

ذکر چند صفت مشخصه

قضیهٔ ۲. هرحلقه‌ای چون R شامل زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$ یا به ازای nی با $\mathbf{Z}_n$.

اثبات. تابع $\theta : \mathbf{Z} \to R$ را (با استفاده ازقضیهٔ بازگشتی!) به‌وسیلهٔ $\theta(0) = 0$، $\theta(1) = 1$، و به‌ازای $n > 0$، $\theta(n+1) = \theta(n) + 1$، تعریف می‌کنیم، آنگاه به‌ازای هر $n > 0$ می‌نویسیم، $\theta(-n) = -(\theta(n))$. با برهانی استقرایی ثابت می‌شودکه:

$$\theta(m+n) = \theta(m) + \theta(n)\text{،}$$
$$\theta(mn) = \theta(m)\theta(n)\text{.}$$

اگر θ یك به‌یك باشد، قضیه تمام است، زیرا درآن صورت $\theta(\mathbf{Z})$، نگارهٔ $\mathbf{Z}$ تحت θ، زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$. متأسفانه θ ممکن است یك به‌یك نباشد، دراین صورت به روش زیر استدلال می‌کنیم.

اعضایی چون $r > s \in \mathbf{Z}$ وجود دارندکه $\theta(r) = \theta(s)$. بنابراین $\theta(r-s) = \theta(r) - \theta(s) = 0$. با استفاده از خاصیت خوش‌ترتیبی، فرض می‌کنیم n کوچکترین عدد طبیعی باشدکه $n \neq 0$، $\theta(n) = 0$. ازاین مطلب نتیجه می‌گیریم که اعداد $\theta(0)$، $\theta(1)$، ...، $\theta(n-1)$ همه متفاوت هستند، زیرا اگر $\theta(r) = \theta(s)$ و $0 < r < s < n$، آنگاه $\theta(s-r) = 0$ که متناقض تعریف n است. همچنین، اگر

$(u, v, q \in \mathbb{Z})$ $u-v=qn$، آنگاه،

$$\theta(u)-\theta(v)=\theta(u-v)=\theta(qn)=\theta(q)\theta(n)=\theta(q)\circ=\circ.$$

ازاین‌رو، با توجه بـه نمادگذاری $\mathbb{Z}_n$ ، اگر $u_n=v_n$ ، آنگاه $\theta(u)=\theta(v)$. بنابـراین می‌توانیم به‌وسیلهٔ $\phi(u_n)=\theta(n)$ تابعی چون $\phi : \mathbb{Z}_n \to R$ تعریف کنیم. یادآوری فوق نشان می‌دهدکه ϕ خوش‌تعریف است. حال داریم

$$\phi(u_n+v_n)=\phi((u+v)_n)=\theta(u+v)=\theta(u)+\theta(v)=\phi(u_n)+\phi(v_n),$$

$$\phi(u_nv_n)=\phi((uv)_n)=\theta(uv)=\theta(u)\theta(v)=\phi(u_n)\phi(v_n).$$

ازآنجاکـه $\theta(\circ)$ ، . . . ، $\theta(n-1)$ همـه متفاوت هستند، $\phi(\circ_n)$ ، . . . ، $\phi((n-1)_n)$ نیز همه متفاوتند، پس ϕ یك‌به‌یك است. بنابراین $\phi(\mathbb{Z}_n)$ زیرحلقه‌ای است از R یکریخت با $\mathbb{Z}_n$. □

قضیهٔ ۳. هرمیدان F شامل زیرمیدانی است یکریخت با $\mathbb{Q}$ یا با $\mathbb{Z}_p$ (p اول).

اثبات. با توجه به قضیهٔ ۲ ، F شامل زیرحلقه‌ای است چون S یکریخت با $\mathbb{Z}$ یا با $\mathbb{Z}_n$.

فرض‌کنیم S یکریخت با $\mathbb{Z}$ ، و $\theta : \mathbb{Z} \to S$ یکریختی نظیرش باشد. $\phi : \mathbb{Q} \to F$ را با

$$\phi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{\theta(m)}{\theta(n)}, \quad (m, n \in \mathbb{Q}, n \neq \circ)$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که $n \neq \circ \Rightarrow \theta(n) \neq \circ$ ، زیـرا θ یك به‌یك است، و لذا طـرف راست تساوی فـوق بـا معنی است. حال ϕ یك بـه‌یك است، زیـرا اگـر $\phi(m/n)=\phi(r/s)$ آنگاه

$$\frac{\theta(m)}{\theta(n)}=\frac{\theta(r)}{\theta(s)}.$$

ازاینجا

$$\theta(ms)=\theta(m)\theta(s)=\theta(r)\theta(n)=\theta(rn).$$

پس

$$ms=rn,$$

وبنابراین

$$\frac{m}{n}=\frac{r}{s}.$$

اکنون به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\phi(\mathbf{Q})$ زیرمیدانی است یکریخت با $\mathbf{Q}$.

حال فرض کنیم S یکریخت با $\mathbf{Z}_n$ باشد. اگر n مرکب، یعنی $n=qr$ باشد، آنگاه $\phi(q_n)$ و $\phi(r_n)$ در F مقسوم‌علیه صفر هستند. ولی‌میدانی چون F مقسوم‌علیه صفر ندارد $(xy=0,\ y\neq 0 \Rightarrow x=xyy^{-1}=0y^{-1}=0)$. بنابراین n اول است، مثلاً $n=p$؛ وازآنجاکه $\mathbf{Z}_p$ میدان است، زیرمیدانی از F پیداکردیم که با $\mathbf{Z}_p$ یکریخت است. □

اکنون رابطهٔ ترتیب را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. هرحلقهٔ مرتب شامل زیرحلقه‌ای است که با $\mathbf{Z}$ یکریخت ترتیبی است.

اثبات. بنا به‌قضیهٔ ۲، هرحلقهٔ مرتب شامل زیرحلقه‌ای است یکریخت با $\mathbf{Z}$ یا با $\mathbf{Z}_n$. اثبات این مطلب که $\mathbf{Z}_n$ نمی‌تواند به حلقه‌ای مرتب تبدیل شود همچنین نشان می‌دهد که $\mathbf{Z}_n$ نمی‌تواند زیرحلقهٔ مرتبی باشد. اثبات این مطلب که رابطهٔ ترتیبی روی $\mathbf{Z}$ یکتاست نشان می‌دهد که زیرحلقهٔ یکریخت با $\mathbf{Z}$، یکریخت ترتیبی با $\mathbf{Z}$ نیز هست. □

همچنین داریم:

قضیهٔ ۵. هرمیدان مرتب، شامل زیرمیدانی است یکریخت ترتیبی با $\mathbf{Q}$.

اثبات. نظیر اثبات قضیهٔ ۴ احتمال وقوع $\mathbf{Z}_p$ را طرد، وسپس از یکتایی ترتیب روی $\mathbf{Q}$ استفاده کنید. □

این دوقضیه، $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را به‌صورت اصل موضوعی ساده‌ای مشخص می‌کنند:
$\mathbf{Z}$ حلقهٔ مرتب مینیمالی است،
(یعنی، $\mathbf{Z}$ حلقهٔ مرتبی است که هیچ زیرحلقهٔ سره‌ای ندارد)؛
$\mathbf{Q}$ میدان مرتب مینیمالی است،
(یعنی، $\mathbf{Q}$ میدان مرتبی است که هیچ زیرمیدان سره‌ای ندارد).

این مطالب $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Q}$ را تا حد یکریختی به‌طور یکتا تعریف می‌کنند زیرا بنا به‌قضیهٔ ۴، هرحلقهٔ مرتب مینیمالی باید با $\mathbf{Z}$ یکریخت باشد؛ وبنا به‌قضیهٔ ۵، هرمیدان مرتب مینیمالی باید یکریخت با $\mathbf{Q}$ باشد.

درپایان می‌پردازیم به میدانهای مرتب‌کامل. برای بررسی این میدانها باید مفاهیم دیگری چون «حد» و «دنباله‌های کشی» را نیز مطرح کنیم. پس فرض می‌کنیم F میدان مرتبی باشد. بنابه‌قضیه ۵، این میدان شامل زیرمیدانی است که با $\mathbf{Q}$ یکریخت ترتیبی است، وبا تعویض نمادگذاری می‌توانیم، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم که این میدان همان $\mathbf{Q}$ باشد. می‌گوییم که دنباله‌ای چون (a_n) ازاعضای F کشی است اگر:
به‌ازای هر $\varepsilon>0$، $\varepsilon\in F$، $N\in\mathbf{N}_0$ی وجود داشته باشد که به‌ازای هر $m,n>N$،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon .$$

دنبالهٔ (a_n) به‌یك حد $\lambda \in F$ میل می‌کند اگر به‌ازای $\varepsilon > 0$، $\varepsilon \in F$، بتوان $N \in \mathbb{N}_0$ی پیدا کرد که به‌ازای هر $n > N$،

$$|a_n - \lambda| < \varepsilon .$$

مانند قبل می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lambda \text{ ، یا } \lim a_n = \lambda .$$

نتیجهٔ کلیدی به شرح زیر است:

لم ۶. درهرمیدان مرتب‌کاملی، هردنبالهٔ‌کشی حدی دارد.

اثبات. فرض‌کنیم (a_n) یك دنبالهٔ‌کشی در F باشد. طبق برهان لم ۱۲ فصل ۹ (برحسب F) این دنباله‌کراندار است. لذا هرمجموعه‌ای ازعضوهای این دنباله‌کراندار است. فرض‌کنیم

$$b_N = \{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$$.کوچکترین کران بالای

این عضو، بنابه‌کامل بودن F ، وجود دارد. بدیهی است‌که

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots$$

و دنبالهٔ (b_n) ازپایین‌کراندار است (مثلاً به‌وسیلهٔ هرکران پایین (a_n)). ازاین‌رو می‌توانیم فرض‌کنیم‌که

$$c = (b_n)$$. بزرگترین‌کران پایین

ادعا می‌کنیم‌که c حد دنبالهٔ اولیه یعنی (a_n) است.

برای اثبات این ادعا، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$. فرض‌کنیدکه فقط تعدادی متناهی از مقادیر n دارای خاصیت

$$c - \frac{1}{2}\varepsilon < a_n < c + \frac{1}{2}\varepsilon$$

باشند. آنگاه Nی انتخاب می‌کنیم‌که به‌ازای هر $n > N$،

$$a_n \geqslant c + \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{یا} \quad a_n \leqslant c - \frac{1}{2}\varepsilon .$$

ازطرفی $N_1 > N$ی وجود داردکه اگر $m, n > N_1$ آنگاه $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. پس

$$a_n \leqslant c - \frac{1}{2}\varepsilon \text{ ، } n > N_1 \text{ به‌ازای هر}$$

یا

$$a_n \geqslant c + \frac{1}{2}\varepsilon \text{ ، } n > N_1 \text{ به‌ازای هر}.$$

شرط دوم ایجاب می‌کند sm وجود داشته باشد که به‌ازای هر $n > N_1$ ، $a_n > b_m$ ، که تعریف b_m نقض می‌شود. همچنین، شرط اول ایجاب می‌کند که بتوانیم b_{N_1} را با $b_{N_1} - \frac{1}{2}\varepsilon$ عوض کنیم، که این نیز تعریف b_{N_1} را نقض می‌کند.

نتیجه اینکه به‌ازای هر M ، $sm > M$ وجود دارد که

$$c - \frac{1}{2}\varepsilon < a_m < c + \frac{1}{2}\varepsilon .$$

از آنجا که (a_n) کشی است، $sM_1 > M$ وجود دارد که به‌ازای هر $m, n > M_1$ ، $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$. بنابراین به‌ازای $n > M_1$ ،

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon .$$

این مطلب طبق ادعا، ایجاب می‌کند که $\lim a_n = c$. □

قدم بعدی این است:

لم ۷. فرض کنیم $F \supseteq \mathbf{Q}$ میدان مرتب کاملی باشد. اگر $x \in F$ ، آنگاه عضوی چون $p \in \mathbf{Z}$ وجود دارد که $p - 1 \leqslant x < p$.

اثبات. فرض کنیم به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}$ ، $n \leqslant x$. آنگاه $\mathbf{Z}$ از بالا به x کراندار است، ولذا بنا به اصل کمال، کوچکترین کران بالایی چون k هم دارد. ازاین‌رو به ازای هر $n \in \mathbf{Z}$ ، $n + 1 \leqslant k$ ، زیرا همچنین $n + 1 \in \mathbf{Z}$. این مطلب ایجاب می‌کند که $n \leqslant k - 1$ ، ولذا $k - 1$ کران بالای کوچکتری برای $\mathbf{Z}$ باشد. این مطلب تعریف k را نقض می‌کند. بنابراین به‌ازای $sn \in \mathbf{Z}$ ی دادیم $n < x$. به همین نحو، به‌ازای $sm \in \mathbf{Z}$ ، $x < m$. از آنجا که تنها تعدادی متناهی عدد صحیح بین m و n وجود دارد، می‌توانیم کوچکترین عدد صحیحی چون p را پیدا کنیم که $x < p$. آنگاه $p - 1 \leqslant x < p$ ، و لم اثبات می‌شود. □

به عنوان آخرین قدم مقدماتی:

لم ۸. فرض می‌کنیم F میدان مرتب کاملی باشد، و (a_n) و (b_n) دو دنبالهٔ به‌ترتیب

با حدود a و b باشند. آنگاه:

(الف) $\lim(a_n+b_n)=a+b$،

(ب) $\lim(a_nb_n)=ab$.

اثبات. برای قسمت (الف) همان‌اثبات نخستین‌قضیهٔ فصل ۷ را دنبال وتنها بررسی کنید که آن اثبات به‌طور صوری نیز بـا معنی است. برای قسمت (ب)، توجـه‌کنیدکه بنابه‌برهان لم ۱۲، فصل ۹، بـه‌ازای هر $n\in\mathbb{N}_0$، وبـه‌ازای A و Bهایی از F، داریم $|a_n|<A$، $|b_n|<B$. حال اگـر $\varepsilon>0$، داریـم $\varepsilon/(A+B)>0$. پس N_1ی وجود داردکه به‌ازای هر $n>N_1$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{A+B},$$

و N_2یی وجود داردکه به‌ازای هر $n>N_2$

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{A+B}.$$

بنابراین به‌ازای هر $n>N=\max(N_1,N_2)$،

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab| &= |(a_n-a)b_n+a(b_n-b)|\\ &< \left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right)B+\frac{A\varepsilon}{A+B}\\ &=\varepsilon.\end{aligned}$$

این مطلب (ب) را ثابت می‌کند.(به‌تشابه این برهان با برهانی‌که بلافاصله قبل ازقضیهٔ ۹ آمده است توجه‌کنید.) □

درمورد $\mathbb{R}$ قضیه‌ای قویتر ازقضیه‌های ۴ و ۵ هم می‌توان به دست آورد.

قضیهٔ ۹. هرمیدان مرتب‌کاملی با $\mathbb{R}$ یکریخت ترتیبی است.

اثبات. فرض‌کنیم F میدان مرتب‌کاملی باشد. بنا به‌قضیهٔ ۵، F زیرمیدانی‌یکریخت با $\mathbb{Q}$ دارد. طبق معمول، بـرای سهولت درنمادگذاری، این زیـرمیدان را بـا $\mathbb{Q}$ یکی می‌گیریم، ولذا بدون از دست دادن‌کلیت داریم $\mathbb{Q}\subseteq F$.

اعضای $\mathbb{R}$ رده‌های هم‌ارزی $[a_n]$ از دنباله‌های‌کشی (a_n) متشکل از اعدادگویا هستند. تابعی چون $\theta:\mathbb{R}\to F$ با

$$\theta([a_n])=\lim_{n\to\infty}a_n$$

را تعریف می‌کنیم. ابتدا باید بررسی‌کنیم‌که این تعریف بامعنی است. پس ثابت می‌کنیم

که (a_n) در F کشی است (این مطلب کاملاً همان چیزی نیست که (a_n) در $\mathbf{Q}$ کشی باشد، زیرا مقادیر بیشتری برای ε وجود دارند.) فرض کنیم $\varepsilon \in F$، $\varepsilon > 0$. ادعا می‌کنیم که عدد گویایی چون ε' وجود دارد که $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. حال $1/\varepsilon \in F$ و، بنا به لم ۷، به ازای عضوی چون $p \in \mathbf{Z}$، $1/\varepsilon < p$، $p > 0$، و $0 < 1/p \in \mathbf{Q}$. آنگاه $\varepsilon' = 1/p \in \mathbf{Q}$ را اختیار می‌کنیم. حال چون (a_n) در $\mathbf{Q}$ کشی است، $N \in \mathbf{N}_0$ی وجود دارد که به ازای هر $m, n > N$،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon' .$$

ازاین‌رو، به‌ازای هر $m, n > N$،

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

و (a_n) در F هم‌کشی است. بنا به لم ۶، $\lim a_n$ در F وجود دارد.

با برهانی شبیه برهان فوق، به‌آسانی دیده می‌شود که θ خوش‌تعریف و یک به یک است؛ لم ۸ ثابت می‌کند که $\theta(\mathbf{R})$ زیرحلقه‌ای است از F و یکریخت با $\mathbf{R}$. به‌آسانی اثبات می‌شود که θ رابطهٔ ترتیب را نیز حفظ می‌کند.

حال باید ثابت کنیم که θ پوشاست. فرض کنید $x \in F$. بنا به لم ۷ عدد صحیحی چون a_0 وجود دارد که $a_0 \leqslant x < a_0 + 1$. با استقرا (و با استفاده از لم ۷) می‌توانیم اعدادی صحیح چون a_i بین ۰ و ۹ پیدا کنیم که

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} .$$

حال اگر $b_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$ داریم

$$|b_n - x| < \frac{1}{10^n}$$

و به‌آسانی (با برهانی شبیه بند دوم این اثبات) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim b_n = x .$$

وچون (b_n) در $\mathbf{Q}$ کشی است، پس $[b_n] \in \mathbf{R}$، و

$$\theta([b_n]) = \lim b_n = x .$$

بنابراین θ پوشاست، وقضیه اثبات می‌شود. □

ارتباط با دستگاههای شهودی

اکنون می‌توانیم ایده‌هایمان را اندکی مرتب‌تر کنیم. برای هردستگاه ازاصول موضوع

فوق‌الذکر، دونوع الگو داریم: الگوهای صوری $\mathbb{N}_0$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$؛ والگوهای غیرصوری $\mathcal{N}_0$، $\mathcal{Z}$، $\mathcal{Q}$، $\mathcal{R}$. برای‌این حقیقت‌که $\mathcal{R}$ میدان مرتب‌کاملی‌است یك‌توضیح موجه شهودی عرضه‌کردیم، لذا به‌همین اساس شهودی، قضیهٔ ۹ بیان می‌کندکه $\mathcal{R}$ و $\mathbb{R}$ یکریخت هستند. به عبارت دیگر، صورتگرایی، مشهوداتمان را به ثبوت می‌رساند، وبا استفاده از آن می‌توانیم همهٔ خواص موجود در $\mathcal{R}$ را توجیه‌کنیم. در واقع، اکنون‌فرق چندانی نمی‌کند که $\mathcal{R}$ غیرصوری را به‌کار ببریم یا $\mathbb{R}$ صوری را: کاری‌که انجام شد هردو را حفاظت می‌کند، واکنون تفاوتی اساسی بین آنها قایل نیستیم.

درحقیقت، این فصل وفصل قبل نشان می‌دهندکه می‌توانیم دستگاههای عددی را به‌یکی از دو روش زیر بسازیم.

(الف) وجود $\mathbb{N}_0$ را اصل‌موضوع فرض‌کنیم‌وبه‌ترتیب $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ رابسازیم؛یا

(ب) وجود $\mathbb{R}$ را اصل موضوع فرض‌کنیم و به‌ترتیب $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{N}_0$ را بسازیم.

بنابراین با تلفیق عاقلانهٔ این دو روش، می‌توانیم با هرکدام ازآنها، مثلاً با $\mathbb{Z}$، یا با $\mathbb{Q}$، شروع‌کنیم و دستگاههای دیگر را، با استفاده ازفصل ۹ روبه‌بالا، یا با به‌کاربردن این‌فصل روبه‌پایین، بسازیم. قضیهٔ یکتایی‌که دراین فصل اثبات شد نشان می‌دهدکه تفاوتی اساسی نمی‌کندکه‌کدام روش را به‌کار ببریم: نتایج همواره یکریخت هستند وبا ایده‌های شهودیمان هماهنگ. دراین صورت محل دقیق‌آغاز کار به‌سلیقه مربوط است و نه به‌الزام. ازهرنقطه‌ای‌که‌شروع‌کنیم می‌توانیم با اعتباری‌یکسان همهٔ دستگاههای‌اعداد را بپرورانیم، وتمام‌نتایج استانداردِ حساب‌مقدماتی را براساس اصل موضوعی بازیابیم.

تمرین

۱. اثبات‌کامل قضیهٔ ۵ را بنویسید.

۲. ثابت‌کنیدکه درهرمیدان مرتب F،

$$a^2+1>0 \text{ ، } a\in F \text{ به‌ازای هر}$$

نتیجه بگیریدکه اگر $x^2+1=0$ در میدانی جوابی داشته باشد، آنگاه آن میدان را نمی‌توان مرتب‌کرد. همهٔ جوابهای $x^2+1=0$ را درمیدانهای $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_3$، و $\mathbb{Z}_5$ پیدا کنید.

۳. با استفاده ازالگوریتم‌اقلیدسی نشان دهیدکه به‌ازای $m, n\in\mathbb{N}$، تکنیکی‌برای محاسبهٔ اعضایی چون $a, b\in\mathbb{Z}$ وجود داردکه $am+bn=h$؛ دراینجا h بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n, m است. نتیجه بگیریدکه اگر m و n متباین باشند، آنگاه اعدادی صحیح چون a و b وجود دارندکه $am+bn=1$. هرگاه $m=1008$ و $n=1375$، a و b را پیداکنید. وارون ضربی 1008_{1375} در $\mathbb{Z}_{1375}$ را پیداکنید.

نشان دهید که m_n در $\mathbf{Z}_n$ یك وارون ضربی دارد اگر و فقط اگر m و n متباین باشند.

۴. در هر حلقهٔ مرتب، ثابت کنید که به‌ازای هر x و y

$$||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y| .$$

۵. با استفاده از اصول موضوع میدان مرتب کامل، ثابت کنید که هر عضو مثبت a از $\mathbf{R}$ جذر مثبت یکتایی دارد. (راهنمایی: $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant a\}$ را در نظر بگیرید.)

۶. با استقرا ثابت کنید که در هر حلقهٔ مرتبی چون $\mathbf{Q}$، $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow a^n \leqslant b^n$. به‌ازای $a \in \mathbf{R}$، $a \geqslant 0$، نشان دهید که اگر عضوی چون $r \in \mathbf{R}$ وجود داشته باشد که $r \geqslant 0$ و $r^n = a$، آنگاه این r یکتاست.

۷. نشان دهید که در هر میدان مرتب کامل، هر عضو مثبت دارای ریشهٔ nم یکتاست. ($\{x \mid x^n \leqslant a\}$ را در نظر بگیرید.)

۸. با استفاده از تمرین ۷، برای هر عضو مثبت x متعلق به یك میدان مرتب کامل و برای عدد گویایی چون p/q، $x^{p/q}$ را تعریف کنید.

۹. میدانی چون $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ نظیر $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ را تعریف کنید و نشان دهید که به دو روش متفاوت می‌توان آن را به یك میدان مرتب تبدیل کرد.

۱۰. نشان دهید که دو رابطهٔ ترتیبی مذکور برای $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ تنها رابطه‌های ترتیبی هستند که تحت آنها $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ به یك میدان مرتب تبدیل می‌شود.

۱۱. میدانی با دقیقاً چهار رابطهٔ ترتیبی مختلف پیدا کنید که همه آن‌را به میدانی مرتب تبدیل کنند.

۱۲. فرض کنید $\mathbf{R}[t]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$ با ضرایب حقیقی باشد. رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$p(t) \geqslant q(t) \iff p(0) \geqslant q(0)$$

تعریف کنید. آیا این رابطه $\mathbf{R}[t]$ را به حلقه‌ای مرتب تبدیل می‌کند؟

۱۳. در هر میدان مرتب F، مفهوم حد

$$a_n \to a \quad \text{وقتی} \quad n \to \infty$$

را می‌توان چنین تعریف کرد که اگر $e \in F$، $e > 0$، $N \in \mathbf{N}$ی وجود داشته باشد که

$n > N \Rightarrow |a_n - a| < e$. درمیدان $\mathbf{R}(t)$ مثال ۳، صفحهٔ ۲۱۸، نشان دهیدکه دنبالهٔ $(1/n)$ به‌صفر میل نمی‌کند. (عضوی چون $e \in \mathbf{R}(t)$ پیداکنیدکه به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $1/n > e$.) نشان دهیدکه اگر F یك میدان مرتب کامل باشد، آنگاه $1/n \to 0$.

۱۴. فرض کنید F یك میدان مرتب باشد. نشان دهیدکه F کامل است اگر وفقط اگر هردو شرط زیر برقرار باشند:

(یك) هردنبالهٔ کشی همگرا باشد، (اصل کمال کشی)،

(دو) اگر $e \in F$، $e > 0$، آنگاه به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، $1/10^n < e$، (شرط ارشمیدسی).

۱۵. مبادزه. نشان دهیدکه در یك میدان مرتب، اصل کمال کشی، اصل کمال را ایجاب نمی‌کند.

۱۱

اعداد مختلط وماورای آن

اعداد مختلط هنوز هم درنظر برخی با شك آمیخته با ترس همراه است، ولی درنظر ریاضیدان امروزی این دستگاه صرفاً گسترش مجموعه بنیاد ساده‌ای ازاعداد حقیقی است. دراین فصل نشان می‌دهیم که چطور این اعداد از $\mathbb{R}$ ساخته می‌شوند، و به‌این ترتیب سلسله مراتب استانداردِ دستگاههای عددی، $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ را کامل می‌کنیم. می‌توانستیم با ادامهٔ این روند، گسترشی برای هم بیابیم. همیلتون[1]، ریاضیدان قرن نوزدهم، گسترشی برای $\mathbb{C}$ پیداکرد وآن را چهارگانها نامید؛ ما هم شرح مختصری از آن را ارائه خواهیم داد. ولی ماهیت ریاضیات جدید چنان است که باید دید خود را وسیعترکنیم و به دستگاههایی اصل موضوعی بپردازیم که ساختهای ریاضی مفیدتری را به دست دهند. مفهوم عدد چیزی جز قسمتی ازاین بررسی کلی نیست. جبر جدید با دستگاههایی اصل موضوعی سروکار داردکه، به طورکلی، متشکل ازمجموعه‌هایی است همراه با عملهای مختلفی روی آن مجموعه‌ها. ما قبلاً دوتا ازاین دستگاهها را دیده‌ایم؛ حلقه ومیدان، ولی دستگاههای متعدد دیگری هم وجود دارند. ازآنجاکه این کتاب مربوط به جبر نیست، هیچ یك ازاین دستگاهها را به‌طور مفصل بررسی نمی‌کنیم، ولی بد نیست اهم آنها را برشماریم. اگر بخواهیم پا را از اعداد مختلط فراتر نهیم، مسیر پربار راه چهارگانهای همیلتون نیست، بلکه مسیر ساختهای جبری تعمیم‌یافتهٔ جبر جدید است.

---

1. Hamilton

دورنمای تاریخی

درفصل ۱ مشکلات مربوط به‌پذیرش اعداد مختلط به عنوان مفهومی اصیل را برشمردیم. بدنیست با اندکی درنگ به‌نکات تاریخی بپردازیم، زیرا ممکن است کمکی باشد به‌دور-نگه‌داشتن خواننده ازسوءتفاهمهای احتمالی.

دراوایل قرن شانزدهم اشتیاق زیادی برای حل معادلات جبری وجود داشت، و از آن جمله بود:

پیداکردن دوعددکه مجموعشان ده وحاصلضربشان چهل باشد.

با نمادگذاری امروزی، این مسئله به معادلات زیر منجر می‌شود:

$$x+y=۱۰,$$

$$xy=۴۰.$$

y را ازمعادلهٔ اول پیدا می‌کنیم و درمعادلهٔ دوم می‌گذاریم،

$$x(۱۰-x)=۴۰$$

ولذا

$$x^۲-۱۰x+۴۰=۰$$

که جوابهای

$$x=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۱۶۰}}{۲}=۵\pm\sqrt{-۱۵}$$

را به‌دست می‌دهد. متناظر با $x=۵+\sqrt{-۱۵}$ ، $y=۵-\sqrt{-۱۵}$ است‌وبرعکس، پس جواب مسئله دو عبارت $۵+\sqrt{-۱۵}$ و $۵-\sqrt{-۱۵}$ است. ریاضیدانان قرن شانزدهم دریافتندکه این اعداد، حقیقی نیستند. مربع هرعدد حقیقی عددی مثبت است، پس ۱۵ — مربع عددی حقیقی نیست، ولذا $\sqrt{-۱۵}$ نمی‌تواند حقیقی باشد. با این‌حال، بدون توجه به ماهیت $\sqrt{-۱۵}$، وقتی این جوابها را با هم جمع کنیم، جمله‌های $\pm\sqrt{-۱۵}$ حذف می‌شوند و

$$(۵+\sqrt{-۱۵})+(۵-\sqrt{-۱۵})=۱۰$$

به‌دست می‌آید و وقتی آنها را درهم ضرب کنیم،

$$(۵+\sqrt{-۱۵})(۵-\sqrt{-۱۵})=۵^۲-(\sqrt{-۱۵})^۲$$
$$=۲۵-(-۱۵)$$
$$=۴۰$$

حاصل می‌شود. صرفاً اگر $\sqrt{-۱۵}$ را عددی «موهومی» بینگاریم وبا این تصورکه مربعش ۱۵ − است عملیات جبری مربوط را انجام دهیم، عبارات $۵+\sqrt{-۱۵}$ و $۵-\sqrt{-۱۵}$ جواب مسئله خواهند بود. می‌دانیم، هرعدد حقیقی مثبت a دارای جذر مثبت $\sqrt{a}$ است. جذر هرعدد حقیقی منفی $a-$ $(a>۰)$ را، درصورت وجود، می‌توان به‌صورت $\sqrt{-a}=\sqrt{-۱}\sqrt{a}$ نوشت. اویلر[1]، ریاضیدان‌قرن هیجدهم نماد[2] i را برای $\sqrt{-۱}$ معرفی کرد،ولذا $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$. هرعبارت به‌صورت $x+iy$ راکه $x, y\in\mathbb{R}$ یك عدد مختلط نامیدند، البته هنوز هم ماهیت اصلی چنین عبارتی برایشان روشن نبود. به‌این‌ترتیب، هرمعادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^۲+bx+c=۰, \quad (a, b, c\in\mathbb{R})$$

جوابی چون

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad (\text{اگر } b^۲\geqslant ۴ac)$$

و

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{۴ac-b^۲}}{۲a} \quad (\text{اگر } b^۲<۴ac)$$

دارد. به عبارت دیگر، اگر $b^۲\geqslant ۴ac$ آنگاه معادله جوابهای حقیقی دارد، و اگر $b^۲<۴ac$، معادله اصلاً جواب حقیقی ندارد ولی جوابهای مختلط دارد.

این امر، درنظر ریاضیدانان آن زمان یك دوگانگی بین جوابهای حقیقی (به معنی واقعی) وموهومی (به‌معنی عدم وجود) معادلات ایجادکرد. در واقع اعداد مختلط با اثر روانی مربوط به واژه‌های «مختلط» و «موهومی» مواجه شدند.

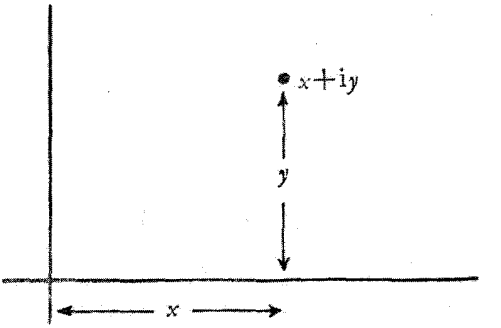
در ۱۸۰۶، آرگان[3]، ریاضیدان فرانسوی، هرعدد مختلط $x+iy$ را به عنوان نقطه‌ای ازصفحه توصیف کرد:

---

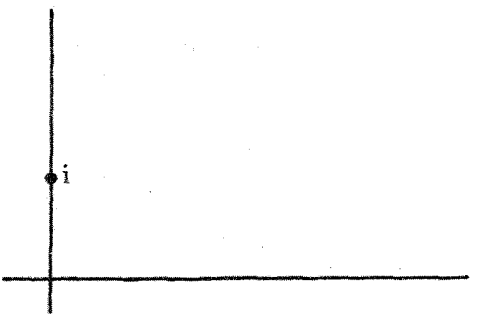
1. Euler

۲. اخیراً مهندسین جدید وبرخی از ریاضیدانان نماد j را برای $\sqrt{-۱}$ به‌کار می‌برند.

3. Argand



محور افقی به‌عنوان محور حقیقی، ومحور عمودی به‌عنوان محور موهومی درنظر گرفته شد؛ وعدد i به‌صورت نقطهٔ به‌فاصلهٔ یك واحد بالای محور موهومی درآمد.



این توصیف اعداد مختلط را «دیاگرام آرگان» نامیدند وامروزه غالباً تصاویر اعداد مختلط به‌عنوان نقاط صفحه به‌آن نام‌معروفند؛ اگرچه این‌ایده قبلاً (۱۷۹۹) هم در تز دکترای گاوس[1]، ریاضیدان بزرگ آلمانی، مطرح شده بود وحتی این در اثر نه‌چندان معروف وسل[2] (۱۷۹۷) نقشه‌بردار دانمارکی هم منعکس‌است ـ اینها رویدادهای تاریخی این مفهوم هستند. گرچه هم‌اکنون اعداد مختلط را به طور ملموس به عنوان نقاط صفحه توصیف کردیم، ولی ابهامات دورانهای قبل هنوز هم آنها را احاطه‌کرده‌اند. گاوس هر عدد مختلط را به‌طور صریح زوجی چون (x, y) از اعداد حقیقی می‌پنداشت. در دههٔ ۱۸۳۰ همیلتون ریاضیدان ایرلندی رسماً آنها را «جفتهای اعداد حقیقی» (او به‌هر زوج مرتب جفت اطلاق می‌کرد) نامید. این قلب مطلب‌است و راهنمای توصیف جدید: هرنقطه ازصفحه زوج مرتبی چون (x, y) است ونماد $x+iy$ صرفاً نام دیگری است برای آن. عبارت مرموز i چیزی جز زوج مرتب $(0, 1)$ نیست.

---

1. Gauss 2. Wessell

نحوهٔ ساختن اعداد مختلط

فرض کنیم $\mathbb{C}$ نام دیگری[۱] برای $\mathbb{R}^2$، مجموعهٔ زوجهای مرتب (x, y) به‌ازای $x, y \in \mathbb{R}$، باشد. جمع وضرب را روی $\mathbb{C}$ با:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2), \qquad (1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1) \qquad (2)$$

تعریف می‌کنیم. به‌آسانی ثابت می‌شود که $\mathbb{C}$ تحت این عملها میدانی است که $(0, 0)$ صفر آن و $(1, 0)$ یکهٔ آن است. قرینهٔ (x, y)، $(-x, -y)$ و اگر $(x, y) \neq (0, 0)$، وارون ضربی (x, y)

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

است.

تابع $f : \mathbb{R} \to$ را با $f(x)=(x, 0)$ تعریف می‌کنیم، آنگاه

$$f(x_1+x_2)=(x_1+x_2, 0)=(x_1, 0)+(x_2, 0)=f(x_1)+f(x_2).$$

و

$$f(x_1x_2)=(x_1x_2, 0)=(x_1, 0)(x_2, 0)=f(x_1)f(x_2).$$

تابع f به‌وضوح یك به‌یك است ولذا یك یکریختی میدانهاست؛ از $\mathbb{R}$ بر روی زیرمیدان $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$. این زیرمیدان $f(\mathbb{R})$ چیزی جز «محور حقیقی» توصیف آرگان نیست.

طبق معمول، $\mathbb{R}$ را، با توجه به‌یکریختی فوق، به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تلقی می‌کنیم، بدین‌معنی که اعداد حقیقی را به‌عنوان محور حقیقی صفحهٔ مختلط در نظر می‌گیریم ونماد x را به‌جای $(x, 0)$ به‌کار می‌بریم.

i را زوج مرتب $(0, 1)$ تعریف می‌کنیم، ولذا، با استفاده از (۲)، داریم

$$\mathrm{i}^2=(0, 1)^2=(-1, 0).$$

بنابراین، با درنظرگرفتن $(-1, 0)$ به‌عنوان عدد حقیقی -1 داریم $\mathrm{i}^2=-1$.

به‌طور کلی، با استفاده از (۱) و (۲)، داریم

$$(x, 0)+(0, 1)(y, 0)=(x, 0)+(0, y)=(x, y).$$

اگر $(x, 0)$ و $(y, 0)$ را به‌ترتیب با x و y از $\mathbb{R}$ عوض کنیم، عبارت فوق بیان می‌کند که

---

۱. ما اغلب $\mathbb{C}$ را، به‌دلیل توصیف آرگان، صفحهٔ مختلط می‌نامیم، ولی اکنون می‌بینیم که به‌عنوان مجموعه، $\mathbb{C}$ دقیقاً با $\mathbb{R}^2$ یکی است. لذا، به‌عنوان مجموعه، صفحهٔ مختلط وصفحهٔ حقیقی هردو مبین یك چیزند!

$$x+iy=(x, y).$$

«عدد مختلط»[۱] $x+iy$ نام دیگری برای زوج مرتب (x, y) است.

جهت توجه، به‌تعاریف جمع و ضرب (۱) و (۲) برحسب نماد اخیر بازمی‌گردیم و درمی‌یابیم که

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

به‌این‌ترتیب هم جمع وهم ضرب معمولی اعداد مختلط را بازمی‌یابیم (در واقع علت تنظیم تعاریف (۱) و (۲) به‌شکلی‌که دیدیم نیز همین بود!)

ازنظر تاریخی x درعبارت $x+iy$ را «جزء حقیقی» و y را «جزء موهومی» می‌نامیم. به‌عنوان مختصات‌اول و دوم زوج مرتب $(x, y)\in\mathbf{R}^2$، هردوعدد x و y حقیقی هستند. اگر

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

آنگاه

$$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)$$

وبنابه‌خواص معمول زوجهای مرتب،

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2.$$

درقدیم چنین استنتاجی را «مقایسه‌کردن جزءهای حقیقی وموهومی» می‌نامیدند. و حال آن‌را به‌عنوان‌کاربردی ازتعریف مجموعه بنیاد زوجهای مرتب می‌دانیم.

امروزه چنین تفسیر می‌کنندکه معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-10x+40=0$ در $\mathbf{R}$ جوابی ندارد، ولی اگر آن‌را به‌عنوان معادله‌ای در $\mathbf{C}$ درنظر بگیریم، دارای دوجواب $5\pm i\sqrt{15}$ است. این توضیح «پیچیده»تر از این مورد نیست‌که معادلهٔ $2x=1$ را در $\mathbf{N}$ درنظر بگیریم یا در $\mathbf{Q}$. معادلهٔ $2x=1$ هیچ جوابی در $\mathbf{N}$ ندارد، ولی در $\mathbf{Q}$ جواب $x=\frac{1}{2}$ است.

اغلب در ریاضیات به‌مسائلی برمی‌خوردیم‌که در زمینهٔ مفروضی جواب ندارند، ولی اگر در زمینهٔ وسیعتری تعبیر شوند، پیداکردن جواب میسر است. ازاین پدیده تعجب نکنید وبه‌آن بی‌جهت پربها ندهید.

---

۱. برخی به غلط چنین تصور می‌کنندکه هرعدد مختلط عبارتی چون $x+iy$ است‌که درآن x و y حقیقی باشند و $y\neq 0$، وعبارت $x+iy$ راکه درآن $y=0$ «عددی حقیقی» می‌نامند. ریاضیدانان هر عبارت به‌صورت $x+iy$ $(x, y\in\mathbf{R})$ را که شامل اعداد حقیقی نیز هست یك عدد مختلط می‌نامند.

مزدوج

هرعدد مختلط $x+iy$ را می‌توانیم با تک‌نمادی چون z (یا با هرحرف مناسب دیگری) نمایش دهیم. هرگاه بنویسیم $z=x+iy$، همواره فرض می‌کنیم که $x, y \in \mathbf{R}$، مگر اینکه چیزی برخلاف آن ذکر کرده باشیم. با این وضعیت مزدوج $z=x+iy$ را با

$$\bar{z}=x-iy$$

تعریف می‌کنیم. مثلاً، $\overline{۳+۲i}=۳-۲i$، $\overline{۱-۲i}=۱+۲i$، والی آخر. مزدوج‌گیری دارای خواص مقدماتی معینی است که آنها را درقضیهٔ زیر می‌آوریم:

قضیهٔ ۱.

(الف) $\overline{z_۱+z_۲}=\bar{z}_۱+\bar{z}_۲$،

(ب) $\overline{z_۱z_۲}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲$،

(پ) $\bar{\bar{z}}=z$،

(ت) $z=\bar{z} \iff z \in \mathbf{R}$.

اثبات. بررسی ابتدایی تعاریف. □

اگر $c: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ را با $c(z)=\bar{z}$ تعریف کنیم، آنگاه قضیهٔ ۱ بیان می‌کندکه c یك خودریختی ازمیدان $\mathbf{C}$ است وتحدیدش روی $\mathbf{R}$ تابع همانی است.

قدرمطلق

اگر $z=x+iy$، $x, y \in \mathbf{R}$، آنگاه $x^۲+y^۲ \geqslant ۰$. هرعدد حقیقی مثبت جذر مثبت یکتا دارد. قدرمطلق هر z در $\mathbf{C}$ را با

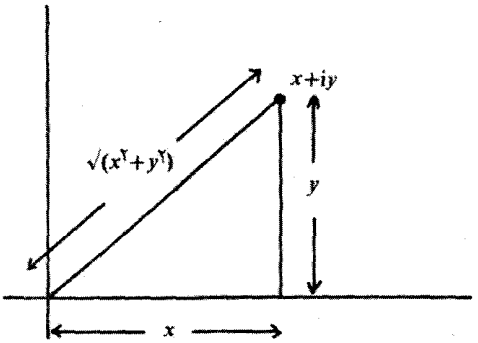
$$|z|=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

تعریف می‌کنیم.

مثلاً $|۳+۲i|=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}$، $|-۵|=\sqrt{۲۵}=۵$. به‌خصوص، به‌ازای هرعدد حقیقی x، $|x|=\sqrt{x^۲}$، و ازآنجاکه جذر مثبت انتخاب می‌شود، این امر درمورد اعداد حقیقی به‌تعریف معمولی قدرمطلق تحویل می‌یابد؛ یعنی به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{اگر } x \geqslant ۰ \text{،} \\ -x & \text{اگر } x < ۰ \text{،} \end{cases}$$

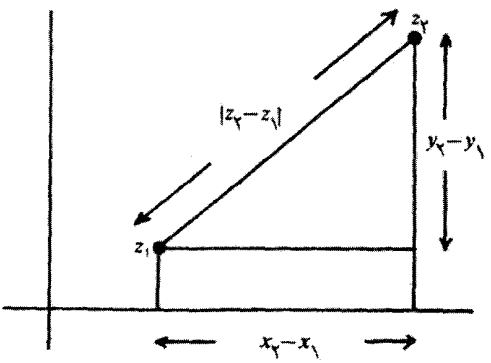
به‌بیان هندسی، قدرمطلق، فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ $x+iy$ درصفحهٔ مختلط است.



اگر $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ ، آنگاه

$$|z_2-z_1|=|(x_2-x_1)+i(y_2-y_1)|$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

این مقدار، فاصلهٔ ازنقطهٔ z_1 تا نقطهٔ z_2 درصفحه است:



قضیهٔ ۲.

(الف) به‌ازای هر $z\in\mathbb{C}$ ، $|z|\in\mathbb{R}$ و $|z|\geqslant 0$ ،

(ب) $|z|=0 \iff z=0$ ،

(پ) $|z|^2=z\bar{z}$ ،

(ت) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ ،

(ث) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

اثبات. (الف) و (ب) ساده‌اند.

(پ) ازتعریف نتیجه می‌شود، زیرا اگر $z=x+iy$ ، آنگاه

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2=|z|^2.$$

(ت) از آنجاکه به‌ازای هر $z\in\mathbb{C}$، $|z|\geqslant 0$، کافی است نشان دهیم که

$$|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2.$$

ولی

$$\begin{aligned}|z_1z_2|^2&=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) && \text{بنا به ۲ (پ)،}\\ &=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 && \text{بنا به ۱ (ب)}\\ &=z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2\\ &=|z_1|^2|z_2|^2.\end{aligned}$$

(ث) اثبات مستقیم این نامساوی به‌عملیات جبری بغرنجی منجرمی‌شودکه با زحمت به پایان می‌رسد. بهتر، ولی غیرمستقیم‌تر این است‌که بنویسیم $z_1=x_1+iy_1$، $z_2=x_2+iy_2$ واتحاد

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

را درنظر بگیریم، که بلافاصله نتیجه می‌دهد:

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqslant(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|z_1|^2|z_2|^2.$$

با گرفتن جذر

$$x_1x_2+y_1y_2\leqslant|z_1||z_2|$$

به دست می‌آیدکه درصورت منفی‌بودن $x_1x_2+y_1y_2$، بازهم درست است. بنابراین

$$2(x_1x_2+y_1y_2)\leqslant 2|z_1||z_2|$$

که آنگاه

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2\leqslant x_1^2+y_1^2+2|z_1||z_2|+x_2^2+y_2^2.$$

این عبارت به‌صورت

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\leqslant|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2$$

یا

$$|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2$$

درمی‌آید. ازآنجاکه قدرمطلق همیشه مثبت است، با جذرگرفتن ازطرفین داریم

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.\ \square$$

قسمت (پ) قضیهٔ‌فوق‌توصیف جالبی برای وارون $z=x+iy$، با فرض $z\neq 0$،

است، زیرا داریم $|z|^2 = x^2 + y^2 \neq 0$ ، واز اینجا معادلهٔ $z\bar{z} = |z|^2$ ایجاب می‌کند که

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

ولذا

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

بد نیست تأکید کنیم که، گـرچه قسمت (ت) قضیه صحبت از یك نامساوی می‌کند، این نامساوی بین دوعدد حقیقی $|z_1 + z_2|$ و $|z_1| + |z_2|$ است. علی‌رغم اینکه زیرمیدان $\mathbb{R}$ از $\mathbb{C}$ میدان مـرتبی است، خود $\mathbb{C}$ چنین نیست. این، به‌این معنی نیست که نمی‌توانیم $\mathbb{C}$ را به‌تعبیر فصل ۴ مرتب کنیم. مسلماً می‌توانیم. مثلاً، می‌توانیم رابطهٔ $\geqslant$ را با

$$x_1 + iy_1 \geqslant x_2 + iy_2 \Longleftrightarrow x_1 \geqslant x_2 \text{ یا } (x_1 = x_2 \text{ و } y_1 \geqslant y_2)$$

تعریف کنیم. این رابطه یقیناً رابطه‌ای ترتیبی‌است. ولی با حساب به‌طور مطلوب هماهنگ نیست: مثلاً داریم

$$z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0 \not\Rightarrow z_1 z_2 \geqslant 0$$

زیرا مثال زیر نشان می‌دهد که

$$i \geqslant 0 \text{ ، ولی } i^2 = -1 \geqslant 0.$$

به‌هیچ‌وجه نمی‌توانیم ترتیبی در $\mathbb{C}$ تعریف کنیم که با حساب $\mathbb{C}$ هماهنگ باشد یعنی $\mathbb{C}$ ، به تعبیر فصل ۹، به میدانی مرتب تبدیل شود. زیرا باید زیرمجموعه‌ای چون $\mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C}$ پیدا شود که:

(یك) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{C}^+,\ z_1 z_2 \in \mathbb{C}^+$ ،

(دو) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \in \mathbb{C}^+$ یا $-z \in \mathbb{C}^+$ ،

(سه) $z \in \mathbb{C}^+,\ -z \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow z = 0$.

ولی (دو) ایجاب می‌کند که $i \in \mathbb{C}^+$ یا $-i \in \mathbb{C}^+$ ؛ درحالت اول، (یك) ایجاب می‌کند که $i^2 \in \mathbb{C}^+$ ، و درحالت دوم $(-i)^2 \in \mathbb{C}^+$)، پس درهر دوحالت $-1 \in \mathbb{C}^+$. بااستفادهٔ مجدد از (یك) داریم $(-1)^2 \in \mathbb{C}^+$)، پس $1 \in \mathbb{C}^+$. این امر متناقض با (سه) است، زیرا $-1 \in \mathbb{C}^+$ ، ولی $1 \neq 0$. بـه دلیل عـدم وجود ترتیب در $\mathbb{C}$ ، نامساویهایـی چون $z_1 > z_2$ بین اعداد مختلط بی‌معنی هستند مگر اینکه این اعداد حقیقی باشند. فرمولهایی نظیر $|z_1| > |z_2|$ کاملاً امکان‌پذیـر است، زیرا $|z_1|,\ |z_2| \in \mathbb{R}$ واعداد حقیقی میدانی است مرتب.

چهارگانهای همیلتون

می‌توانیم بازهم بـه توسعهٔ دستگاههای عددی $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ بپردازیم و در جستجوی گسترشی برای $\mathbf{C}$ باشیم. در قـرن گذشته همیلتون، ریاضیدان ایرلندی، بـرای سالیان متمادی متعاقب تصورش از اعداد مختلط به‌عنوان جفتهای مـرتب (x, y) اعداد حقیقی، درجستجوی دستگاهی متشکل از سه تایی‌های (x_1, x_2, x_3) یـا چهارتایی‌های (x_1, x_2, x_3, x_4) بودکه گسترشی‌ازاعداد مختلط هم باشند. در ۱۸۴۳ دستگاهی متشکل ازچهارتایی‌ها پیدا کردکه «تقریباً» یك میدان‌است، دقیقاً به‌این معنی‌که همهٔ اصول موضوع میدان را ارضا می‌کند مگر جابه‌جایی ضرب را.

حلقهٔ بخشی دستگاهی جبری است متشکل ازمجموعه‌ای چون D و دوعمل دوتایی $+$ و $\cdot$ روی D به‌طوری‌که به‌ازای هر $a, b, c \in D$،

(ج ۱) $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(ج ۲) عضوی‌چون $0 \in D$ وجود داردکه‌به‌ازای هر $a \in D$، $a+0 = 0+a = a$.

(ج ۳) اگر $a \in D$، عضوی چون $-a \in D$ وجود داردکه

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

(ج ۴) $a+b = b+a$.

(ض ۱)[1] $(ab)c = a(bc)$.

(ض ۲) عضوی چون $1 \in D$، $1 \neq 0$، وجود داردکـه بـه‌ازای هر $a \in D$،

$$a1 = 1a = a.$$

(ض ۳) اگـر $a \in D$، $a \neq 0$، عضوی چـون $a^{-1} \in D$ وجـود دارد کـه

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

(پ) $a(b+c) = ab+ac$، $(b+c)a = ba+ca$.

چهارگانهای همیلتون، نامی‌که او بردستگاه چهارتایی‌هایش گذاشت، مثالی ازحلقهٔ بخشی است. ضرب آن جابه‌جایی نیست بـه‌این معنی‌کـه به ازای a و bهای مشخصی داریم $ab \neq ba$.

کشف او را می‌توان برحسب سه نماد i، j، k کـه طبق قاعدهٔ زیـر درهم ضرب می‌شوند تشریح کرد:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$$

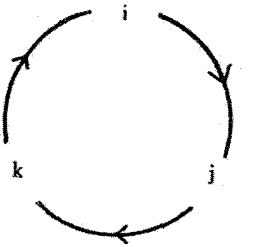
$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

شش تساوی آخر را می‌توان با نوشتن نمادهای i، j، k روی دایره‌ای درجهت حرکت

---

۱. طبق معمول به‌جای $a \cdot b$ می‌نویسیم ab.

عقربه‌های ساعت به شرح زیر توصیف کرد:



حاصلضرب هر دوتا ازاین نمادها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، سومین نماد است و درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، منفی سومین نماد است.

همیلتون هرچهارتایی اعداد حقیقی (x_1, x_2, x_3, x_4) را به‌صورت $x_1+ix_2+jx_3+kx_4$ درنظر می‌گرفت. او آنها را به‌صورت‌بدیهی زیرجمع می‌کرد:

$$(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)+(y_1+iy_2+jy_3+ky_4)$$
$$=(x_1+y_1)+i(x_2+y_2)+j(x_3+y_3)+k(x_4+y_4),$$

وحاصلضرب آنها را با استفاده ازقاعدهٔ فوق برای ضرب i ، j ، k به‌دست می‌آورد.

اگر ضرب را به‌طورکامل بنویسیم، داریم:

$$(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)(y_1+iy_2+jy_3+ky_4)$$
$$=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$
$$+i(x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+j(x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2)$$
$$+k(x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1).$$

این عبارت را می‌توان به طور بدیهی، با قراردادن (a_1, a_2, a_3, a_4) به جای $a_1+ia_2+ja_3+ka_4$، برحسب چهارتایی‌های مرتب هم نوشت.

به‌بیان صوری، جمع وضرب این چهارتایی‌ها چنین‌اند:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)+(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+x_3, x_4+y_4),$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)=(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

که درآن

$$a_1=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$$
$$a_2=x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3$$

$$a_۳ = x_۱y_۳ - x_۲y_۴ + x_۳y_۱ + x_۴y_۲$$

$$a_۴ = x_۱y_۴ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۴y_۱$$

مجموعهٔ همهٔ چهارتاییها را با $\mathbf{H}$ (به خاطر همیلتون) نمایش میدهیم. این چهارتاییها را چهارگانها یا اعداد فوق مختلط نیز مینامند.

قضیهٔ ۳. چهارگانهای $\mathbf{H}$ یك حلقهٔ بخشی تشکیل میدهند.

اثبات. صرفاً باید درمورد $\mathbf{H}$ اصول موضوع (ج ۱) ـ (ج ۴)، (ض ۱) ـ (ض ۳)، و (پ) را بررسی کرد. همهٔ این اصول به‌آسانی اثبات میشوند، البته، ما اولین کسی خواهیم بود که اثبات شرکت‌پذیری ضرب (ض ۱) را حداقل کسل‌کننده میدانیم. عضو صفر در (ج ۲)، $(۰, ۰, ۰, ۰)$ است، قرینهٔ $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ در (ج ۳)، $(-x_۱, -x_۲, -x_۳, -x_۴)$ است، عضو یکه در (ض ۲)، $(۱, ۰, ۰, ۰)$ است و وارون $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) \neq (۰, ۰, ۰, ۰)$ در (ض ۳)،

$$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)^{-۱} = \left(\frac{x_۱}{a}, -\frac{x_۲}{a}, -\frac{x_۳}{a}, -\frac{x_۴}{a}\right)$$

است که در آن $a = x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + x_۴^۲$. □

ضرب در $\mathbf{H}$ به‌طور کلی جابه‌جایی نیست، مثلاً

$$(۰, ۱, ۰, ۰)(۰, ۰, ۱, ۰) = (۰, ۰, ۰, ۱),$$

ولی

$$(۰, ۰, ۱, ۰)(۰, ۱, ۰, ۰) = (۰, ۰, ۰, -۱).$$

اگر بنویسیم $\mathbf{i} = (۰, ۱, ۰, ۰)$، $\mathbf{j} = (۰, ۰, ۱, ۰)$، $\mathbf{k} = (۰, ۰, ۰, ۱)$، آنگاه، همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد، داریم $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$. $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$، قواعد دیگر همیلتون برای ضرب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$ نیز به‌همین‌نحو به‌نتیجه می‌رسند، دلیل هم صرفاً این است که قاعدهٔ ضرب را طوری تعریف کردیم که چنین بشود.

اگر زیرمجموعهٔ $C = \{(x, y, ۰, ۰) \in \mathbf{H} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ را درنظر بگیریم، آنگاه ضرب در C به

$$(x_۱, y_۱, ۰, ۰)(x_۲, y_۲, ۰, ۰) = (x_۱x_۲ - y_۱y_۲, x_۱y_۲ + x_۲y_۱, ۰, ۰)$$

بدل میشود، و لذا این ضرب جابه‌جایی است. به‌آسانی می‌بینیم که تابع $f : \mathbb{C} \to \mathbf{H}$ به‌تعریف $f(x+\mathrm{i}y) = (x, y, ۰, ۰)$ یك یکریختی بین میدانهای $\mathbb{C}$ و C است. با توجه به‌این یکریختی $\mathbb{C}$ را میتوانیم زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{H}$ بدانیم. اگر $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ را به صورت $x_۱ + \mathrm{i}x_۲ + \mathrm{j}x_۳ + \mathrm{k}x_۴$ بنویسیم، تابع $f : \mathbb{C} \to \mathbf{H}$ به‌صورت سادهٔ زیر

درمی‌آید:

$$f(x+iy)=x+iy+j0+k0.$$

پس با پنداشتن عدد مختلط $x+iy$ به عنوان چهارگان $x+iy+j0+k0$ شمول $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{H}$ به دست می‌آید.

به طرق متعددی خواص $\mathbf{C}$ را می‌توان به $\mathbf{H}$ تعمیم داد (وازاینجا نام «اعداد فوق مختلط»). مثلاً مزدوج چهارگانی چون $q=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$ را می‌توانیم با

$$\bar{q}=x_1-ix_2-jx_3-kx_4$$

تعریف کنیم: این تعریف برخی ازخواص مزدوج مختلط را دارد، ولی نه همهٔ آنها را. به‌خصوص

$$\overline{q_1+q_2}=\bar{q}_1+\bar{q}_2$$

$$\bar{\bar{q}}=q$$

$$q=\bar{q}\iff q\in\mathbf{R}.$$

قاعدهٔ مزدوج حاصلضرب به صورت

$$\overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1$$

درمی‌آید، که خواننده می‌تواند صحت آن را با محاسبهٔ صریح بررسی کند. ازآنجاکه ضرب جابه‌جایی نیست، در رابطهٔ فوق ترتیب q_2 و q_1 را نمی‌توان عوض کرد.

همچنین می‌توانیم قدرمطلق چهارگانی چون $q=x_1+ix_2+jx_3+kx_4$ را با

$$|q|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

تعریف کنیم. دراین مورد، داریم:

به‌ازای هر $q\in\mathbf{H}$، $|q|\in\mathbf{R}$ و $|q|\geqslant 0$،

$$|q|=0\iff q=0,$$

$$q\bar{q}=|q|^2,$$

$$|q_1q_2|=|q_1||q_2|,$$

$$|q_1+q_2|\leqslant|q_1|+|q_2|.$$

از اثبات این مطالب که برخی آسان و برخی مشکلتر هستند صرفنظر می‌کنیم. (اثباتها مشابهٔ حالات مختلط هستند، البته باید غیرجابه‌جایی بودن $\mathbf{H}$ را درنظرگرفت.)

نظیر اعداد مختلط، به‌ازای $q\in\mathbf{H}$، $q\neq 0$، داریم $q\bar{q}=|q|^2$ که درآن

$|q|^۲ \neq ۰$ ، پس

$$\frac{qq}{|q|^۲}=۱$$

و

$$q^{-۱}=\frac{q}{|q|^۲}.$$

بدون مبالغه برخی از خواص چهارگانها شگفت‌انگیزند. مثلاً، می‌دانیم $i^۲=j^۲=k^۲=(-i)^۲=(-j)^۲=(-k)^۲=-۱$ ، لذا معادلهٔ

$$x^۲+۱=۰$$

در $\mathbf{H}$ حداقل شش جواب دارد، یعنی $\pm i$ ، $\pm j$ ، و $\pm k$.

درحقیقت $(ib+jc+kd)^۲=-b^۲-c^۲-d^۲$ ، پس هرچهارگانی چون $ib+jc+kd$ با شرط $b^۲+c^۲+d^۲=۱$ جوابی برای $x^۲+۱=۰$ است. این معادله در $\mathbf{H}$ دارای بینهایت جواب است.

معادلهٔ $x^۲+۱=۰$ در $\mathbf{Q}$ هیچ جوابی ندارد، در $\mathbf{C}$ دوجواب دارد. هرمعادلهٔ درجهٔ دوم حداکثر دوجواب در $\mathbf{C}$ دارد، ولی وقتی $\mathbf{H}$ را درنظر می‌گیریم وخاصیت جابه‌جایی ضرب را از دست می‌دهیم، این خاصیت را نیز از دست می‌دهیم.

چهارگانها دستگاه جبری جالبی هستند وفی‌نفسه ارزش مطالعه را دارند، ولی‌اهمیت تاریخی آنها به خاصیت غیرجابه‌جایی بودن ضرب مربوط می‌شود. این، ریاضیات را از حصار خاصیت جابه‌جایی، که به موجب آن جابه‌جایی ضرب اعداد را قانونی از پیش تعیین شده و تغییرناپذیر می‌دانستند، نجات داد. ازآن پس بررسی دستگاهی‌که درآن لزوماً «a برابر b» مساوی «b برابر a» نباشد نیز منطقی شد، واین امر به بسیاری از ساختهای جبری تعمیمی ممکن‌که در ریاضیات جدید مورد مطالعه قرار می‌گیرند انجامید. امروزه هرساخت جبری را به‌عنوان مجموعه‌ای توأم با عملهایی دوتایی روی‌آن می‌پنداریم که خواص گوناگونی را ارضا سازند. اینك نگاهی گذرا به‌برخی ازآنها می‌اندازیم، تا اینکه خواننده قسمتی ازطیف وسیع دستگاههای موجود درجبر امروزی را ببیند.

نیم‌گروه و گروه

با مجموعه‌ای چون X وعملی دوتایی چون $\circ$ روی X آغاز می‌کنیم.

(۱) اگر به‌ازای هر a ، b ، c در X ، $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ ، آنگاه $\circ$ را شرکت‌پذیر می‌نامیم.

(۲) عضوی‌چون e در X راکه‌به‌ازای‌هر $a\in X$ دارای‌خاصیت $a\circ e=e\circ a=a$ باشد یك همانی می‌نامیم.

(۳) اگر عضوی همانی چون e وجود داشته باشد، آنگاه بـه ازای هـر $a \in X$، عضوی چون $b \in X$ را وارون a می‌نامیم اگر $a \circ b = b \circ a = e$.

(۴) اگر به‌ازای هر a و b در X، $a \circ b = b \circ a$، آنگاه $\circ$ را جابه‌جایی می‌نامیم.

هرمجموعه‌ای چون X با یك عمل دوتایی با شرایط (۱) و (۲) یك نیم‌گروه[۱] نامیده می‌شود؛ اگر (۳) نیز برآورده شود، آن را یك گروه، واگر همهٔ شرایط (۱)ـ(۴) برقرار باشند آنگاه آن را یك گروه جابه‌جایی، یا یك گروه‌آبلی می‌نامیم.

چند مثال

(۱) $\mathbb{N}_0$ تحت عمل دوتایی $+$ یك نیم‌گروه با همانی 0 است.

(۲) $\mathbb{N}_0$ تحت ضرب یك نیم‌گروه با همانی 1 است.

(۳) $\mathbb{Z}$ تحت ضرب یـك نیم‌گروه است.

(۴) $\mathbb{Z}$ تحت جمع یك‌گروه است. همانی آن صفر، و وارون $n \in \mathbb{Z}$، $-n$ است، زیرا $n+0=0+n=n$ و $n+(-n)=(-n)+n=0$.

(۵) اعضای غیرصفـر $\mathbb{H}$ تحت ضرب یـك گـروه است. همانی آن ۱، و وارون $q \in \mathbb{H}-\{0\}$، $\bar{q}/|q|^2$ است.

مثالهای (۱)ـ(۴) جابه‌جایی هستند، ومثال (۵) غیر جابه‌جایی است.

گروهها ونیم‌گروهها در ریاضیات در موارد گوناگون زیادی پیش می‌آیند. مثلاً اگر A یك مجموعه‌باشد، مجموعهٔ X متشکل ازهمهٔ توابع از A به A تحت ترکیب توابع یك نیم‌گروه است. پس $f \in X$ بـه این معنی است‌که $f : A \to A$، واگر $f, g \in X$، آنگاه ترکیب f، g که به‌صورت gf نوشته می‌شود، همان ترکیب معمولی توابع، یعنی $gf : A \to A$ با تعریف،

$$gf(a) = g(f(a)) \text{، به‌ازای هر } a \in A$$

است. عضو همانی X تابع همانی $i_A : A \to A$، $i_A(a) = a$، است. عضوی چون $f \in X$ وارون دارد اگر و فقط اگر دوسویی باشد، و آنگاه وارون آن همان وارون مجموعهٔ بنیاد است. فرض کنیم $B(A)$ مجموعهٔ همهٔ دوسویی‌های از A به A باشد، پس $f \in B(A)$ به‌این معناست‌که «$f : A \to A$ دوسویی است». آنگاه $B(A)$ یك‌گروه است. اگر A حداقل سه عضو داشته باشد، آنگاه $B(A)$ جابه‌جایی نیست. فرض‌کنیم a، b، c سه عضو متمایز A باشند و $\theta, \phi \in B(A)$ چنین تعریف شوند:

$$\theta(a)=b \text{، } \theta(b)=a \text{، } \theta(c)=c \text{، وبه‌ازای هر } x \text{ دیگر از } A \text{، } \theta(x)=x \text{؛}$$

$$\phi(a)=c \text{، } \phi(b)=b \text{، } \phi(c)=a \text{، وبه‌ازای هر } x \text{ دیگر از } A \text{، } \phi(x)=x.$$

---

۱. اصطلاح «نیم‌گروه» معمولاً به دستگاهی اطلاق می‌شودکه شرط (۱) را ارضا سازد؛ و اگر (۲) نیز برآورده شود آن را نیم‌گروه باهمانی، یا تکواره، می‌نامند. ـم.

هر دو تابع θ و ϕ دوسویی هستند و $\phi\theta \neq \theta\phi$ زیرا

$$\phi\theta(a) = \phi(b) = b$$

در حالی که

$$\theta\phi(a) = \theta(c) = c .$$

مطالعهٔ گروهها درجبر جدید بسیارمهم است وهنوزهم بخش بسیار فعالی ازپژوهش ریاضی است.

حلقه ومیدان

ما قبلاً درفصل ۹ به حلقه ومیدان اشاره کرده‌ایم. این مفاهیم را می‌توانیم بـا استفاده از مفهوم گروه ونیم گروه به‌طور مختصرتری هم توصیف کنیم.

هر حلقه متشکل است از یك مجموعه چون R و دوعمل دوتایی $+$ و $\cdot$، به طوری که R تحت $+$ گروهی جابه‌جایی باشد، و تحت. نیم گروه باشد، واین دوعمل با قوانین پخش‌پذیری:

$$a(b+c) = ab+ac \text{ ، } (b+c)a = ba+ca \text{ ، به‌ازای هر } a, b, c \in R$$

با هم در رابطه باشند. اگـر ضرب جابه‌جایی بـاشد آنگاه R را یك حلقهٔ جابه‌جایی می‌نامیم. پس $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، و $\mathbb{C}$ حلقه‌هایی جابه‌جایی هستند و $\mathbb{H}$ حلقه‌ای (غیرجابه‌جایی) است. هرمیدان مجموعه‌ای چون F با دو عمل جابه‌جایی $+$ و $\cdot$ است که F تحت $+$ یك گروه با همانی ۰ باشد، $F - \{0\}$ تحت ضرب یك‌گروه (با همانی ۱) باشد واین دوعمل با قانون پخش‌پذیری:

$$a(b+c) = ab+ac \text{ ، به‌ازای هر } a, b, c \in F \text{ ،}$$

با هم در رابطه باشند. مثالهای آن شامل $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، و $\mathbb{C}$ است ولی $\mathbb{Z}$ (چون عضوهـای غیرصفر بدون وارون ضربی هم وجود دارند) یـا $\mathbb{H}$ (چون ضرب غیر جابه‌جایی است) میدان نیستند. قبلاً مفهوم حلقهٔ بخشی D را معرفی کردیم که مجموعه‌ای با عملهای $+$ و $\cdot$ را توصیف می‌کند که D تحت $+$ گروهی جابه‌جایی با همانی ۰، $D - \{0\}$ تحت. گروهی (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد وقوانین پخش‌پذیری هم برقرار باشند:

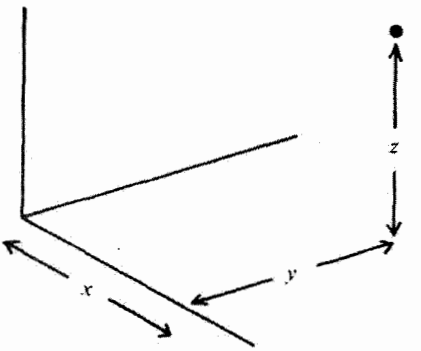
$$a(b+c) = ab+ac \text{ ، } (b+c)a = ba+ca . \text{ به‌ازای هر } a, b, c \in D$$

مثالهای آن شامل $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ ، و $\mathbb{H}$ است.

فضای برداری

نقاط درفضای سه‌بعدی را می‌توانیم با انتخاب سه محور ونمایش هرنقطه با مختصات x ،

y ، z ، توصیف کنیم.



هر نقطه در فضای سه‌بعدی چیزی جز سه‌تایی مرتب اعداد حقیقی (x, y, z) نیست. فضا را می‌توانیم به عنوان مجموعهٔ $\mathbb{R}^3$ متشکل از سه‌تایی‌های مرتب اعداد حقیقی در نظر بگیریم. با استفاده از قاعدهٔ بدیهی زیر می‌توانیم این سه‌تایی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

جمع شرکت‌پذیر وجابه‌جایی است، سه‌تایی $(0, 0, 0)$ نقش همانی را دارد، و وارون (x, y, z)، $(-x, -y, -z)$ است. پس $\mathbb{R}^3$ تحت این عمل جمع، گروهی جابه‌جایی است.

همچنین می‌توانیم هر سه‌تایی (x, y, z) را درهرعضو a از $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر ضرب کنیم:

$$a(x, y, z)=(ax, ay, az).$$

این عمل طبق قواعد زیر با جمع وضرب روی $\mathbb{R}$ در رابطه است:

$$(a+b)(x, y, z)=a(x, y, z)+b(x, y, z),$$

$$(ab)(x, y, z)=a(b(x, y, z)),$$

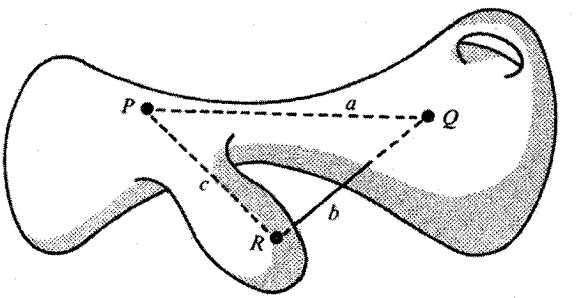
$$1(x, y, z)=(x, y, z)$$

وبا جمع بردارها به‌صورت زیر:

$$a\{(x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)\}=a(x_1, y_1, z_1)+a(x_2, y_2, z_2).$$

ازآنجاکه درفضای سه‌بعدی زندگی می‌کنیم، صحبت ازفضاهای با بعدهای بیشتر عجیب به‌نظر می‌آید. نظریهٔ نسبیت انیشتاین زمان را به‌عنوان متغیر چهارم به‌کار می‌گیرد، یعنی نقطهٔ (x, y, z) در زمان t را با چهارتایی (x, y, z, t) نمایش می‌دهد. بعد پنجم

چیست؟ جواب این سؤال این است که این روند، انحرافی است از جریان اصلی ریاضیات. مسلماً ما جبراً در فضای سه‌بعدی با زمان به عنوان نوعی بعد چهارم زندگی می‌کنیم، ولی در ریاضیات بعدهای بالاتر هم دارای ارزش معتبری هستند. مثلاً، برای توصیف موقعیت دو نقطهٔ مستقل (x_1, y_1, z_1)، و (x_2, y_2, z_2)، در فضا بـه شش عدد حقیقی نیاز داریم. این اعـداد را می‌توانیم به‌ترتیب بـه صورت یك شش‌تایی $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ درنظر بگیریم که مکان هر دو نقطه را نشان می‌دهد. اگر جسم صلبی را در فضا درنظر بگیریم، مکان آن را می‌توانیم بـا تعیین موقعیت سه نقطهٔ غیرهمخط P، Q، و R از جسم دقیقاً مشخص کنیم.



فرض کنیم فاصله‌های PQ، QR، RP، به‌ترتیب برابر a، b، c باشند، آنگاه می‌توانیم P را در نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) قرار دهیم؛ Q را به هر نقطه‌ای چون (x_2, y_2, z_2) حرکت دهیم، تنها تحت این شرط که فاصلهٔ (x_1, y_1, z_1) از (x_2, y_2, z_2) برابر a بماند؛ پس[1]:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=a^2. \qquad (1)$$

سرانجام می‌توانیم این جسم را حول محور PQ چنان دوران دهیم که R در نقطه‌ای چون (x_3, y_3, z_3) قرار گیرد، البته تنها با محدودیتهای $QR=b$ و $RP=c$:

$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=b^2 \qquad (2)$$

$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=c^2. \qquad (3)$$

مکان این جسم صلب بـا نـه مختص x_1، y_1، z_1، x_2، y_2، z_2، x_3، y_3، و z_3 تحت شرایط معادلات (۱)، (۲)، و (۳) تعیین می‌شود. می‌توانیم، و به هیچ‌وجه عجیب هم نیست که، این جسم را بـه عنوان نه‌تایی $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$ در $\mathbf{R}^9$

---

۱. همان‌طور که فاصلهٔ بین (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در $\mathbf{R}^2$ برابر با $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ است، فاصلهٔ بین (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) در $\mathbf{R}^3$ هم برابر با

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

است.

درنظر بگیریم، ولذا مکان جسم صلب با نقطه‌ای در $\mathbb{R}^9$، تنها تحت شرایط معادلات (۱)، (۲)، و (۳)، به‌دست می‌آید. مثالهایی ازاین قبیل در ریاضیات فراوانند. به‌هیچ‌وجه خود را به $\mathbb{R}^3$ محدود نمی‌کنیم و $\mathbb{R}^n$ را، به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، که مسلماً برآن برتری دارد درنظر می‌گیریم.

نظیر $\mathbb{R}^3$، می‌توانیم جمع در $\mathbb{R}^n$ وضرب دراعداد حقیقی را به‌صورت زیرتعریف کنیم:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)+(y_1, y_2, \cdots, y_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$$a(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(ax_1, ax_2, \cdots, ax_n).$$

این عملها دارای همان خواص نظیر در $\mathbb{R}^3$ هستند. برای سهولت امر می‌نویسیم $w=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $v=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$، آنگاه داریم:

$$(a+b)v=av+bv,$$

$$a(bv)=(ab)v,$$

$$1v=v,$$

$$a(v+w)=av+aw \quad \text{به‌ازای هر } a, b \in \mathbb{R} \text{ و } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

به‌این‌ترتیب ایدهٔ فضای برداری تکوین می‌یابد.

با مجموعه‌ای چون V ویك عمل دوتایی $+$ شروع می‌کنیم. سپس تابعی چون $m: \mathbb{R} \times V \to V$ را لازم داریم که برای سهولت‌امر $m(a, v)$ را به‌طور ساده به‌صورت av می‌نویسیم. V را یك فضای برداری روی $\mathbb{R}$ می‌نامیم اگر:

(ف‌ب ۱) V تحت $+$ گروهی جابه‌جایی باشد،

(ف‌ب ۲) به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $v, w \in V$:

$$(a+b)v=av+bv,$$

$$a(bv)=(ab)v,$$

$$1v=v,$$

$$a(v+w)=av+aw.$$

$\mathbb{R}^n$ مثالی ازاین دستگاه‌است، ولی موارد جالب دیگری هم وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم V مجموعهٔ همهٔ توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد. پس $f \in V$ به‌این معنی است‌که $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. دوتابع $f, g \in V$ را می‌توانیم با هم جمع کنیم و $f+g \in V$ را با تعریف:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \text{به‌ازای هر } x \in \mathbb{R},$$

به‌دست آوریم. مثلاً اگر $f(x)=x^3+x^2$ و $g(x)=3x+2$، آنگاه

$(f+g)(x)=x^3+x^2+3x+2$. ضرب اعضای V در $a\in\mathbb{R}$ توسط:

$$(af)(x)=a(f(x))\quad \text{به‌ازای هر } x \text{ در } \mathbb{R},$$

تعریف می‌شود. مثلاً، اگر $f(x)=x^3+x^2$ و $a=-3$، آنگاه

$$(af)(x)=-3(x^3+x^2).$$

بنا به‌تعریف، V فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ است. دراین مثال اعضای V تابع هستند.

مثالهای بسیار غیرمنتظره‌ای ازفضاهای برداری هم وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم می‌خواهیم جوابی چون $y=f(x)$ ازمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{dx^2}+95\frac{dy}{dx}+1066y=0$$

را به دست آوریم. (دراینجا فرض می‌کنیم با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا هستیم.) آنگاه به‌ازای توابع مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. واعداد حقیقی $a, b\in\mathbb{R}$، داریم:

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))=a\frac{df(x)}{dx}+b\frac{dg(x)}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(af(x)+bg(x))=a\frac{d^2f(x)}{dx^2}+b\frac{d^2g(x)}{dx^2}.$$

بنابراین:

$$\frac{d^2}{dx^2}(af(x)+bg(x))+95\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x))+1066(af(x)+bg(x))$$

$$=a\left\{\frac{d^2f(x)}{dx^2}+95\frac{df(x)}{dx}+1066f(x)\right\}$$

$$+b\left\{\frac{d^2g(x)}{dx^2}+95\frac{dg(x)}{dx}+1066g(x)\right\}.$$

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ هر دوجوابهایی ازاین معادلهٔ دیفرانسیل باشند، آنگاه هردوعبارت داخل کروشه برابر صفرند و درنتیجه $y=af(x)+bg(x)$ نیز یك جواب است.

فرض کنیم S مجموعهٔ توابع مشتق‌پذیری باشدکه جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل هستند. آنگاه (به‌ازای $a=b=1$)

$$f, g\in S\Rightarrow f+g\in S,$$

و به‌آسانی دیده می‌شود که S تحت $+$ گروهی جابه‌جایی است. به همین نحو (به ازای $b=0$)،

$$a\in\mathbb{R}\ ,\ f\in S\Rightarrow af\in S\cdot$$

بـا بررسی اصول موضوع (ف‌ب ۱) و (ف‌ب ۲)، می‌بینیم کـه مجموعـهٔ S متشکل از جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل فضایی برداری روی $\mathbb{R}$ است.

برای اینکه این شرح مختصر ازساختهای ریاضی درخواننده این تصور را به‌وجود نیاوردکه جبر جدید چیزی جزفهرست خشکی ازاصول موضوع نیست، باید به ذکر برخی ازنتایج برجستهٔ این روند بپردازیم. طی دوهزارسال، از زمـان یونان قدیم، ریاضیدانان سعی داشتند تنها با استفاده ازخط‌کش وپرگار زاویـه را تثلیث کنند. بـا تلفیق جالبی از نظریهٔ فضاهای برداری و نظریهٔ میدانها نشان داده شدکه زاویهٔ $60°$ (وبسیاری دیگر) را نمی‌توان بدین‌نحو تثلیث کرد. (برای جزئیات بیشتر، به کلافام[1] [۲]، یا استیوارت[2] [۱۶] رجوع کنید). درقرن شانزدهم ریاضیدانان می‌توانستند هرمعادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

را با فرمولی چون

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حل کنند، وفرمولهای جبری پیچیده‌تری برای حل هرمعادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+b=0$$

وهرمعادلهٔ درجهٔ چهارم

$$ax^4+bx^4+cx^2+dx+e=0$$

هم عرضه نمایند. جستجو برای فرمولی جبری برای حل معادلات درجهٔ پنجم

$$ax^5+bx^3+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

خیلی بیشتر از دوقرن ادامـه یافت. درقرن نوزدهم بـا استفاده ازنظریهٔ میدانها ونظریـهٔ گروهها رشتهٔ شگفت‌آوری ازنتایج نشان دادکه‌هیچ فرمول جبری برای‌حل معادلات‌درجهٔ پنجم وجود ندارد. (رجوع شود به استیوارت [۱۶] یا آرتین[3] [۱]).

تعمیمهای گوناگونی ازمفهوم فضاهای بـرداری روی $\mathbb{R}$ هم امکان‌پذیر است. مثلاً اگر درتعریف فضاهای برداری به‌جای $\mathbb{R}$ میدانی چون F را درنظر بگیریم، آنگاه یك فضای برداری روی F به دست می‌آوریم. واگر بـه‌جای آن حلقه‌ای چون R را درنظر

1. Clapham 2. Stewart 3. Artin

بگیریم، آنگاه مفهوم مدول روی R بـه دست می آید. مطالعهٔ این دستگاههای گوناگون و کاربردهایشان موضوع مورد بحث درجبر جدید است.

راه آینده

مواد درسی دیگر ریاضیات محض در دانشگاههـای امـروز عبارتند ازآنالیز، هندسه، و توپولوژی. همهٔ این دروس برمبنای آنچه که توصیف کردیم ساخته می‌شوند. آنالیز اساساً مطالعهٔ صوری حد، مشتق، و انتگرال‌است برپایهٔ اصول موضوع اعداد حقیقی. ابتدا توابع $f: D \to \mathbf{R}$، کـه در آن $D \subseteq \mathbf{R}$، درنظر گـرفته می‌شود، سپس می‌پردازند بـه توابع $f: D \to \mathbf{R}^m$ با شرط $D \subseteq \mathbf{R}^n$. آنالیز مختلط، توابع مشتق‌پذیر $f: D \to \mathbf{C}$ راکه در آن $D \subseteq \mathbf{C}$ مورد مطالعه قرار می‌دهـد. درقرن اخیر هندسه بـه وسیلهٔ ساختهای جبری تسخیرشد، البته زبان هندسی همچنان محفوظ مانده‌است تا ویژگی موردانتظار ازموضوع سلب نشود. منشأ تـوپولوژی را می‌توان درمفهوم «فضای متریك» جستجوکـرد. این فضا به‌بیان ساده، مجموعه‌ای است چون M با تابعی مانند $d: M \times M \to \mathbf{R}$ به طوری‌که $d(x, y)$ رفتاری شبیه بـه «تابع فاصله‌ای» بین x و y داشته باشد. همهٔ خواصی‌که d باید داشته باشد عبارتند از:

(یك) به‌ازای هر $x, y \in M$، $d(x, y) \geqslant 0$،

(دو) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$،

(سه) به‌ازای هر $x, y \in M$، $d(x, y) = d(y, x)$،

(چهار) به‌ازای هر $x, y, z \in M$، $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

مثلاً در $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، یـا $\mathbf{H}$، می‌توانیم $d(x, y) = |x - y|$ را تعریف کنیم و در این صورت اصول موضوع (یك)ـ(چهار) ارضا می‌شونـد؛ ولی موارد بسیارکلی‌تری از فضاهای متریك هم وجود دارند. دراین‌کتاب نه هدف ماست ونه تمایلمان‌که این امور را به تفصیل مورد بحث قـرار دهیم؛ این پروژه‌ای نیست‌کـه دریك درس دورهٔ لیسانس، یا حتی در دورهٔ بعد ازآن، به‌پایان برسد. همچنین هدف ما این نیست‌کـه دانشجویان صرفاً دستگاههای جبری را به حافظه بسپارند: وقتی بعداً به طور دقیق مورد مطالعه قرار بگیرند، این منظور هم عملی خواهد شد.

دربسیاری ازکاربردهایی‌کـه ساختهای جبری مناسب باشند می‌توان بـه تعبیر این ایده‌های ریاضی پـرداخت؛ درحقیقت اغلب خود کاربردها مفیدترین ساختی راکه بایـد مورد مطالعه قـرار بگیرد تحمیل می‌کنند؛ این کاربردها در زمینه‌هـای: فیزیك، مهندسی، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، آمـار، کامپیوتر، کاربردهای جدیدی درعلوم اجتماعی، در روانشناسی، وغیره می‌باشند. هدف ازاین حاشیه‌پردازی مختصر درمباحث وسیع ریاضیات جدید این است‌که نشان دهیم چگونـه ایده‌های عرضه شده دراین‌کتاب مبنایی برای همهٔ ریاضیات هستند. اکنون برروی سکوی پـرتاب ایستاده‌ایم، وآمادهٔ جهش بـه حوزه‌های بالاتر اندیشهٔ ریاضیات هستیم.

تمرین

۱. اگر $z_1, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط باشند، ثابت کنید:

$$|z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

۲. فرض کنید ω عدد مختلط تعریف شده به وسیلهٔ $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ باشد. ثابت کنید $\omega^3=1$ و $1+\omega+\omega^2=0$.

۳. ثابت کنید $\{1, \omega, \omega^2\}$ تحت ضرب یک گروه است.

۴. مفهوم یکریختی $\theta: G \to H$ بین گروههای G و H را (با مقایسه با تعاریف قبلی) تعریف کنید. ثابت کنید که گروه $\{1, \omega, \omega^2\}$ با گروه $\mathbf{Z}_3$ تحت جمع یکریخت است.

۵. به‌ازای چهارگانهایی چون p و q نشان دهید که:

(الف) $\overline{p+q}=\bar{p}+\bar{q}$،

(ب) $\overline{pq}=\bar{p}\bar{q}$،

(پ) $\bar{\bar{q}}=q$،

(ت) $q=\bar{q} \iff q \in \mathbf{R}$.

۶. به ازای $a, b \in \mathbf{H}$، نشان دهید $(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2$. با مثال نشان دهید که این رابطه را نمی‌توان به طور کلی با $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ عوض کرد. اگر $a \in \mathbf{H}$ و $b \in \mathbf{R}$، ثابت کنید که $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

معادلهٔ $x^2+2x+1=0$ را در $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{H}$ حل کنید. (فرض کنید $x=y-1$، و y را به دست آورید.)

با جایگزین کردن $x=y+1$، معادلهٔ $x^2-2x+2=0$ را در $\mathbf{R}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{H}$ حل کنید.

۷. معادلهٔ $x(1+\mathrm{j})+\mathrm{k}=2+\mathrm{i}$ را به‌ازای چهارگان x حل کنید.

۸. معادلهٔ $\mathrm{i}x\mathrm{j}+\mathrm{k}=3+2\mathrm{j}$ را به‌ازای چهارگان x حل کنید.

۹. مطلوب است $x, y \in \mathbf{H}$ به طوری که $3\mathrm{i}x-2\mathrm{j}y=-1$ و $xk+y=0$.

۱۰. چهارگانهای مختلط $\mathbf{H}_C$ را به صورت چهارتایی‌هایی چون (a_1, a_2, a_3, a_4) از اعداد مختلط، با همان قواعد جمع وضرب اعداد حقیقی، تعریف می‌کنیم. آیا $\mathbf{H}_C$ یک حلقهٔ بخشی است؟

۱۱. ثابت کنید که اعداد مختلط به‌تعبیر زیر کامل‌کشی هستند:

اگر (a_n) دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که به‌ازای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$، $\varepsilon > 0$، Nی در $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $m, n > N$، $|a_m - a_n| < \varepsilon$، آنگاه (a_n) در $\mathbb{C}$ به حدی میل می‌کند.

(راهنمایی: نشان دهید، $x_n + iy_n \to x + iy \iff x_n \to x \;\&\; y_n \to y$.)

۱۲. در $\mathbb{R}^3$ عملی دوتایی چون $\wedge$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, b, c) \wedge (d, e, f) = (bf - ce,\ cd - af,\ ae - bd).$$

ثابت کنید به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$x \wedge y + y \wedge x = 0,$$

$$(x \wedge y) \wedge z + (y \wedge z) \wedge x + (z \wedge x) \wedge y = 0.$$

آیا $\wedge$ جابه‌جایی است؟ شرکت‌پذیر است؟

۱۲

عدد اصلی

«بینهایت چیست؟» وقتی این سؤال را اخیراً از برخی از دانشجویان سال اول دانشگاه پرسیدیم، همه براین‌جواب اتفاق نظر داشتند که «چیزی‌است بزرگتر ازهرعدد طبیعی». این جواب به‌تعبیری درست است؛ یکی‌ازدستاوردهای نظریهٔ مجموعه‌ها این است که می‌توانیم معنی روشنی برای مفهوم بینهایت ارائه دهیم. نه‌تنها یك بینهایت، بلکه بسیاری، سلسله‌ای وسیع از بینهایت‌ها، پیدا می‌کنیم. می‌توانیم به‌سؤالی چون «چند عدد گویا وجود دارد؟» پاسخی شگفت‌آوربدهیم: «به‌همان تعداد اعداد طبیعی». مفیدترین نوع سؤال دراین‌جواب مصداق پیدا می‌کند. به‌جای اینکه بپرسیم درمجموعهٔ مفروضی «چند» عضو وجود دارد، مفیدتر است دو مجموعه را با هم مقایسه‌کنیم و بپرسیم آیا تعداد اعضای این‌دو برابرند. این امر را می‌توانیم چنین‌توصیف کنیم که هرگاه تابعی دوسویی چون $f:A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد، آنگاه «تعداد اعضای دو مجموعهٔ A و B برابرند».

به‌جای‌اینکه باسلسلهٔ کامل بینهایت‌ها شروع کنیم، با آن بینهایتی آغازمی‌کنیم که بعداً معلوم خواهدشد که کوچکترین آنهاست. مجموعهٔ استانده‌ای که برای‌امر مقایسه‌برمی‌گزینیم مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است. بهتر است به‌جای $\mathbb{N}$، $\mathbb{N}_0$ را به‌کار ببریم، صرفاً به این دلیل که هر دوسویی $f:\mathbb{N} \longrightarrow B$، اعضای B را به‌صورت یك دنباله بیان می‌کند؛ با استفاده از این دو سویی $f(1)$ را می‌توانیم عضو اول B، $f(2)$ را عضو دوم، والی آخر بنامیم. با این روند، روشی برای شمارش B به‌دست می‌آوریم. البته، اگر با استفاده از این دوسویی‌عضوها را یکی پس‌ازدیگری بخوانیم، «$\ldots, f(2), f(1)$»، عملاً هیچگاه

به‌انتهای آن نمی‌رسیم، ولی یقیناً می‌دانیم که اگر عضوی چون $b \in B$ به‌ما داده شود، آنگاه به‌ازای nی از $\mathbf{N}$، $b = f(n)$، لذا سرانجام پس از زمان معینی به‌آن عضو خاص می‌رسیم.

یادآوری می‌کنیم که در فصل ۸ داشتیم $\mathbf{N}(0) = \varnothing$، و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$\mathbf{N}(n) = \{m \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant n\}.$$

می‌گوییم کـه مجموعه‌ای چون X متناهی است اگر به‌ازای $n \in \mathbf{N}$ی، یك دوسویی چون $f: \mathbf{N}(n) \to X$ وجود داشته باشد. می‌گوییم که X شمارش‌پذیر است اگر یـا X متناهی باشد یا یك دوسویی مانند $f: \mathbf{N} \to X$ وجود داشته باشد. اگر یك دوسویی $f: \mathbf{N}(n) \to X$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌توانیم بگوییم که X، n عضو دارد. این همان روش معمولی شمارش است. اگر یك دوسویی $f: \mathbf{N} \to X$ وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم که X، $\aleph_0$ عضو دارد. علامت $\aleph$ اولین حرف الفبای زبان عبری است و «آلف»[1] نامیده می‌شود، و $\aleph_0$ اولین مثال از یك مفهوم جدید عدد است که برای بیان بزرگی مجموعـه‌ای نامتناهی به‌کار می‌رود. وقتی می‌گوییم کـه مجموعهٔ X دارای $\aleph_0$ عضواست، صرفاً منظورمان این است که تابعی دوسویی بین $\mathbf{N}$ و X وجود دارد، و این دقیقاً مانند این است کـه بگوییم «تعداد اعضای (عدد اصلی) X و $\mathbf{N}$ برابرند». قبل از اینکـه اعداد اصلی را به‌طور کلی مورد بحث قرار دهیم، نگاهی دقیقتر به‌مفهوم شمارش‌پذیری می‌اندازیم.

مثال ۱. $\mathbf{N}_0$ شمارش‌پـذیراست. تابـع $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}_0$ را $f(n) = n - 1$ تعریف می‌کنیم، آنگاه f دوسویی است. این اولین خاصیت جالب این‌روش «شمارش مجموعه‌های نامتناهی» است. $\mathbf{N}$ یك زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbf{N}_0$ است، پس به طور شهودی باید تعداد کمتری عضو داشته باشد، ولی به‌معنی وجود یك تابع دوسویی بین مجموعه‌ها، آنها هم‌اندازه‌اند. از نظر تاریخی، گالیله[2] در ۱۶۳۸ با ارائهٔ تناظری یك به یك بین اعداد طبیعی و مربع اعداد طبیعی، مثالی روشنتر عرضه کرد:

مثال ۲. (گالیله). تناظری یك به‌یك بین اعداد طبیعی و مربعات کامل وجود دارد:

۱	۲	۳	۴	...	n	...
↓	↓	↓	↓		↓	
۱	۴	۹	۱۶	...	n^2	...

به‌بیان نظریهٔ جدید مجموعه‌ها، اگر $S = \{n^2 \in \mathbf{N} \mid n \in \mathbf{N}\}$، تابع $f: \mathbf{N} \to S$ با تعریف $f(n) = n^2$ دوسویی است.

بیش از دوقرن، این مطلب ظاهراً متناقض، هرکوششی‌جهت ارائه معنی دقیقی‌برای بینهایت را دچـار اشکال کرده بود. تا جایی کـه لایبنیتز پیشنهادکرد بهتـر است تنهـا مجموعه‌های متناهی را درنظر بگیریم، زیرا تناقض از نامتناهی بودن $\mathbf{N}$ به‌وجود می‌آید.

---

1. aleph 2. Galileo

تحلیل او برای رهایی از این مشکل این بود که اگر تنها مجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، مثلاً اعداد کوچکتر از صد را، آنگاه تناظر یك به‌یکی بین اعداد طبیعی کوچکتر از صد و مربعات کامل کوچکتر از صد وجود ندارد. جواب کانتور[1] به‌این پارادوکس در دههٔ ۱۸۷۰، از این هم جالبتر است. او نشان داد که اگر «به‌همان تعداد» به‌این معنی باشد که تابعی دوسویی بین دو مجموعه وجود دارد، آنگاه هر مجموعهٔ نامتناهی دارای «همان تعداد» عضو است که زیرمجموعهٔ سره‌ای از آن! در اینجا کلمهٔ «نامتناهی» دارای این تعبیر تکنیکی است که B نامتناهی است اگر به‌ازای هیچ nی از $\mathbf{N}_0$ تابعی دوسویی چون $f:\mathbf{N}(n) \to B$ وجود نداشته باشد.

قضیهٔ ۱ (کانتور). اگر مجموعه‌ای چون B نامتناهی باشد، آنگاه زیرمجموعهٔ سره‌ای چون $A \neq B$ و تابعی دوسویی چون $f:B \to A$ وجود دارند.

اثبات. ابتدا یك زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیری چون X از B را برمی‌گزینیم. از آنجا که هیچ تابع دوسویی بین $\mathbf{N}(0)$ و B وجود ندارد، B غیرتهی است و عضوی در B وجود دارد که آن را x_1 می‌نامیم. به‌روش استقرا تابعی چون $g:\mathbf{N} \to B$ را چنین تعریف می‌کنیم که $g(1)=x_1$ و اگر عضوهای متمایز x_1، x_2، ...، x_n را پیدا کرده باشیم، آنگاه چون $g:\mathbf{N}(n) \to B$، نمی‌تواند دوسویی باشد، عضو دیگری هم باید وجود داشته باشد، که آن را $x_{n+1} \in B$ می‌نامیم، و این عضو با x_1، ...، x_n فرق دارد؛ $g(n+1)=x_{n+1}$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم

$$X=\{x_n \in B \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

می‌نویسیم $A=B-\{x_1\}$، و $f:B \to A$ را با

$$f(x_n)=x_{n+1} \quad \text{به‌ازای } x_n \in X,$$

و

$$f(b)=b \quad \text{به‌ازای } b \notin X,$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه f یك دوسویی است. □

شگفت‌آورتر این است که با استفاده از مثال گالیله می‌توانیم زیرمجموعه‌ای چون C پیدا کنیم که $B-C$ نامتناهی باشد و با این وجود تابعی دوسویی چون $f:B \to C$ هم وجود داشته باشد. یك زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر X از B را همچون در اثبات فوق انتخاب و فرض می‌کنیم

$$C=B-\{x_n \in X \mid n \text{ مربع کامل نباشد}\}$$

---

1. Cantor

و $f:B\to C$ را با:

$$f(x_n)=x_{n+1} \quad \text{به‌ازای } x_n\in X,$$
$$f(b)=b \quad \text{به‌ازای } b\notin X,$$

تعریف می‌کنیم. اگر با یك مجموعهٔ نامتناهی B آغاز کنیم، می‌توانیم یك زیرمجموعهٔ نامتناهی (شمارش‌پذیر) از آن برداریم و باقیمانده هنوز هم زیر مجموعه‌ای چون C با «همان تعداد اعضای» B باشد!

راه حل کانتور برای مسئلهٔ نامتناهی، معرفی مفهوم عدد اصلی بود. فعلاً فرض کنیم که به‌ازای هرمجموعهٔ X، مفهومی به‌نام عدد اصلی با این خاصیت وجود دارد که اگر تابعی دوسویی چون $f:X\to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه عددهای اصلی X و Y برابرند، و اگر هیچ تابع دوسویی وجود نداشته باشد، آنگاه عددهای اصلیشان متفاوتند. درمورد مجموعه‌های متناهی، نامزد مناسبی برای عدد اصلی در دست داریم. اگر یك دوسویی چون $f:\mathbb{N}(n)\to X$ مفروض باشد، می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی X، n است. به‌همین نحو، اگردوسویی $f:\mathbb{N}\to X$ مفروض باشد، می‌توانیم بگوییم که عدد اصلی X، $\aleph_0$ است. برای مجموعه‌های نامتناهی‌دیگرممکن است لازم باشد نمادهای دیگری برای‌اعداد اصلیشان ابداع شوند. به‌طورکلی، عدد اصلی X را با $|X|$ نمایش می‌دهیم، با این تفاهم که اگریك دوسویی‌چون $f:X\to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه $|X|=|Y|$ و $|X|$ و $|Y|$ دونماد متفاوت برای نمایش یك عدد اصلی‌هستند). اگر تابعی‌یك به‌یك چون $f:X\to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌گوییم که $|Y|\leqslant|X|$، وطبق معمول $|Y|<|X|$ را به‌این معنی تعریف می‌کنیم که $|Y|\leqslant|X|$ و $|Y|\neq|X|$.

به‌طورکلی، اگر X زیر مجموعه‌ای از Y باشد، آنگاه تابع شمول $i:X\to Y$، $i(x)=x$، یك به‌یك است، پس‌داریم:

$$X\subseteq Y\Rightarrow|X|\leqslant|Y|.$$

قضیهٔ ۱ بیان می‌کند که به‌ازای هرمجموعهٔ نامتناهی B، زیرمجموعهٔ سره‌ای چون A از آن وجود دارد که $|A|=|B|$. پس به‌ازای مجموعه‌های نامتناهی،

$$X\subsetneqq Y\Rightarrow|X|<|Y|.$$

این‌دوگانگی‌اقامه شده توسط مثال گالیله بیشترجنبهٔ روانی دارد تا جنبهٔ ریاضی. درتوسیع دستگاه اعداد طبیعی و مفهوم شمارش که اعداد اصلی نامتناهی را نیز شامل‌شود، دستگاه بزرگترممکن است همهٔ خواص دستگاه‌کوچکتررا نداشته باشد. آشنایی با دستگاه‌کوچکتر موجب می‌شود که خواص معینی‌را انتظارداشته باشیم و وقتی همه‌چیز، آن‌طورکه احساس می‌کنیم، با هم نمی‌خواندگیج می‌شویم. اضطراب وقتی به‌وجود می‌آید که اصل اعداد حقیقی‌درمورد مثبت بودن مربع هرعدد حقیقی‌توسط مربعات اعداد مختلط نقض می‌گردد. این مشکل وقتی مرتفع شدکه تشخیص دادیم اعداد مختلط را نمی‌توانیم به‌همان نحو

مرتب کنیم که زیرمجموعه‌اش اعداد حقیقی را. تناقض ظاهری گالیله را نیز به‌همین نحو رفع می‌کنیم، که می‌بینیم وقتی «عدد اصلی یکسان» را برحسب یك تابع دوسویی بین مجموعه‌ها تعبیر می‌کنیم، آنگاه شمول سرهٔ A در B به‌تنهایی مانع برابری اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی A و B نمی‌شود.

حال بازمی‌گردیم به‌مفهوم شمارش‌پذیری. اولاً، اگر B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، نظیر اثبات قضیهٔ ۱، می‌توانیم یك زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر چون $X \subseteq B$ انتخاب کنیم. این امر به‌این معنی است که $\aleph_0 = |X| \leqslant |B|$، پس $\aleph_0$ کوچکترین عدد اصلی نامتناهی است. باکمال تعجب عدد اصلی بسیاری ازمجموعه‌های آشنا که ظاهراً بسیار بزرگتر از $\mathbb{N}$ هستند برابر $\aleph_0$ است.

مثال ۳. اعداد صحیح شمارش‌پذیرند. تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ را با:

$$f(2n) = n \text{ و } f(2n-1) = 1-n \text{ ،} n \in \mathbb{N} \text{ به‌ازای}$$

تعریف می‌کنیم. آنگاه دوسویی زیر به‌دست می‌آید:

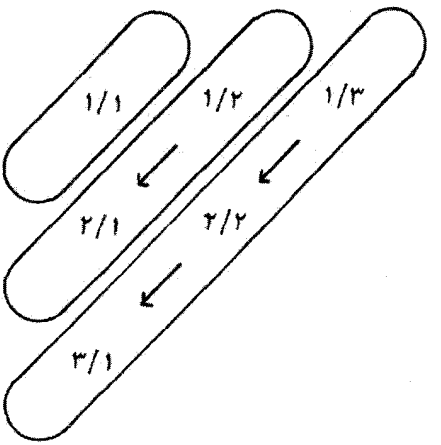
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
۰	۱	−۱	۲	−۲	۳	−۳	...

ملاحظه می‌کنیم با وجودی که f دوسویی است، ترتیب را حفظ نمی‌کند (به‌این معنی که $m < n$ ایجاب نمی‌کند که $f(m) < f(n)$، مثلاً $f(۳) > f(۲)$). وقتی می‌خواهیم توابعی دوسویی بین مجموعه‌های مرتب تعریف کنیم، ممکن است مجبور باشیم این عمل را به‌طور بسیار نامنظمی انجام دهیم؛ به‌مثال زیرتوجه می‌کنیم.

مثال ۴. اعداد گویا شمارش‌پذیرند. این امر را درچند مرحله انجام می‌دهیم، ابتدا اعداد گویای مثبت را می‌شماریم. هرعدد گویای مثبت برابر با p/q است، که p و q اعداد طبیعی هستند. یك روش شمارش اعداد گویا این است که آنها را به‌صورت ردیف بنویسیم:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{۱}{۱} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \cdots \\
\frac{۲}{۱} & \frac{۲}{۲} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۴} & \cdots \\
\frac{۳}{۱} & \frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۳} & \frac{۳}{۴} & \cdots \\
\frac{۴}{۱} & \frac{۴}{۲} & \frac{۴}{۳} & \frac{۴}{۴} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}$$

حال آنها را در امتداد «قطرها» می‌خوانیم، اول ۱/۱ ، بعد ۱/۲، ۲/۱، آنگاه ۱/۳، ۲/۲، ۳/۱، والی آخر:



به‌این‌نحو رشته‌ای از اعداد به‌صورت $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, \ldots$ به‌دست می‌آید. در این فهرست اعداد تکراری هم وجود دارند، زیرا $1/1 = 2/2$ و بعداً نیز اعداد $2/4 = 3/6 = \ldots = 1/2$، $3/3$، $4/4$، و غیره به‌دست می‌آیند. به‌همین نحو، هرعضوفهرست را به‌ترتیب می‌نویسیم واگرعضوی‌را قبلاً نوشته‌ایم آن‌را حذف می‌کنیم، آنگاه‌این فهرست به‌صورت $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, \ldots$ درمی‌آید. فرض‌کنیم nمین عددگویا در فهرست باقیمانده، a_n باشد، آنگاه تابع f از اعداد طبیعی بـه اعداد گویای مثبت با تعریف $f(n) = a_n$ دوسویی است. ولی هرعددگویا یا مثبت، یا صفر، ویا منفی‌است، لذا فهرست $0, a_1, -a_1, a_2, -a_2, \ldots, a_n, -a_n, \ldots$ هرعددگویا را دقیقاً یکبار شامل می‌شود و تابع $g: \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ با تعریف:

$$g(1) = 0,\ g(2n) = a_n,\ g(2n+1) = -a_n,\quad n \in \mathbf{N}$$

همان‌طور که می‌خواستیم دوسویی است.

لازم به‌تذکر است که‌گرچه فرمول صریحی برای $g(n)$ عرضه نکردیم، ولی‌دستورالعمل صریحی برای آن ارائه نمودیم. چند جملهٔ اول عبارتند از:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
۰	۱	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۲	-2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۳	-3	...

و خواننده خود قادر است تا هرکجاکـه بخواهد این فهرست را ادامـه دهد. بعداً قضیهٔ

بسیار مؤثرتری (قضیهٔ شرودر[1]ـ برنشتاین[2]) را عرضه می‌کنیم که با کمک آن می‌توانیم، بدون ساختن هیچ تابع دوسویی صریحی، برابری عدد اصلی دومجموعه را نشان دهیم. با استفاده از آن قضیه، می‌توان مثال آخر را بسیار تمیزتر بررسی کرد.

دلیل این امر که هم «متناهی» وهم «نامتناهی شمارش‌پذیر» را «شمارش‌پذیر» دانستیم وجود قضیهٔ زیر است.

قضیه۲. هرزیر مجموعه از مجموعه‌ای شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

اثبات. اگر $f:\mathbb{N}\to A$ دوسویی باشد و $B\subseteq A$، آنگاه یا B متناهی است، یا می‌توان تابع $g:\mathbb{N}\to B$ را بنا به:

$g(1)$ کوچکترین mی است که $f(m)\in B$،

پس از پیدا کردن $g(1)$، ...، $g(n)$، آنگاه

$g(n+1)$ کوچکترین mی است که $f(m)\in B-\{g(1),\ldots,g(n)\}$،

تعریف کرد. به‌طور غیرصوری، این تعریف منجر می‌شود به‌اینکه اعضای A را به صورت فهرست

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

بنویسیم، و در آن اعضایی راکه در B نیستند حذف کنیم، و اعضایی راکه در B هستند به‌همان ترتیب باقی گذاریم. □

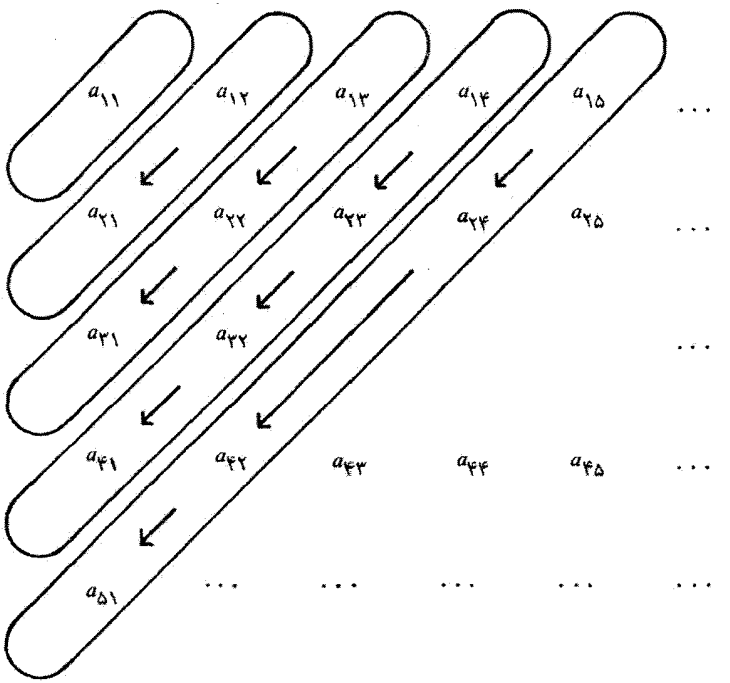
واقعیت قابل توجه در مورد مجموعه‌های شمارش‌پذیر این است که با استفاده از آنها می‌توانیم مجموعه‌هایی را بسازیم که بسیار بزرگتر به‌نظر می‌آیند، ولی بازهم شمارش‌پذیر هستند، با این مضمون دقیق که:

قضیه۳. اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های شمارش‌پذیر خود شمارش پذیر است.

اثبات. اگردسته‌ای شمارش‌پذیرازمجموعه‌ها مفروض‌باشد، می‌توانیم $\mathbb{N}$ رابه‌عنوان مجموعهٔ اندیس به‌کار ببریم و این دسته از مجموعه‌ها را به‌صورت $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ بنویسیم. (اگرتنها تعدادی متناهی A_1، ...، A_k وجود داشته باشند، به‌ازای $n>k$ می‌نویسیم $A_n=\emptyset$.) از آنجاکه هر A_nی شمارش پذیر است، اعضای A_n را می‌توانیم به‌صورت فهرستی چون $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_m}, \ldots$ بنویسیم، که اگر A_n متناهی باشد این فهرست پایان می‌پذیرد، و اگر A_n نامتناهی شمارش‌پذیرباشد، این فهرست به‌صورت دنباله‌ای

1. Schröder 2. Bernstein

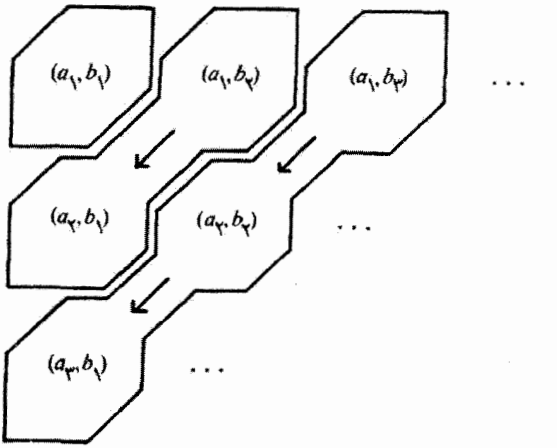
نامتناهی است. حال اعضای $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ را در آرایش مستطیلی جدول‌بندی می‌کنیم و آنها را نظیر مثال ۴ در امتداد قطرها می‌خوانیم:



ممکن‌است بین اعداد آرایش فاصله بیفتد زیرا برخی‌ازمجموعه‌ها متناهی هستند (همچون در سطرسوم آرایش‌فوق) یا به‌این علت‌که ممکن است تنها تعدادی متناهی مجموعه وجود داشته باشد. ممکن است، وقتی‌دومجموعهٔ A_n و A_m اعضای مشترکی‌دارند، برخی‌ازاعداد آرایش تکرار بشوند، مثلاً عضوی‌که درسطر nم است در سطر mم نیز بیاید. فاصله‌ها را درنظر نمی‌گیریم، و عضوهایی راکه قبلاً هم درفهرست آمده‌اند حذف می‌کنیم. پس فهرست حاصل یا متناهی است، یا دنباله‌ای نامتناهی و بدون جملهٔ تکراری. این مطلب نشان می‌دهدکه $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ شمارش‌پذیر است. □

قضیهٔ۴. حاصلضرب دکارتی دومجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

اثبات. اگر A و B شمارش‌پذیر باشند، اعضای A را به‌صورت دنبالهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (که باپایان است اگر A متناهی باشد) می‌نویسیم. اعضای B را هم به‌صورت $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ می‌نویسیم. حال‌اعضای $A\times B$ را به‌صورت آرایش مستطیلی می‌نویسیم و آنها را در امتداد قطرها می‌خوانیم:



اگر A یا B متناهی باشد، فاصله‌هایی وجود خواهد داشت که باید از رویشان بگذریم؛ اگر هردو متناهی باشند، آنگاه $A \times B$ نیز متناهی است. اگر هردو نامتناهی باشند، آنگاه نوشتن دوسویی صریح $f: \mathbb{N} \to A \times B$ چندان مشکل نیست. یك عضو درقطراول داریم، دو عضو در قطر دوم، و به‌طور کلی n عضو در قطر nم. پس در n قطر اول $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ عضو وجود دارد. rمین‌عضوقطر بعدی (a_r, b_{n+2-r}) است، پس فرمول صریح دوسویی $f: \mathbb{N} \to A \times B$ چنین است:

به‌ازای $m=\frac{1}{2}n(n+1)+r$، $(1 \leqslant r \leqslant n+1)$، $f(m)=(a_r, b_{n+2-r})$. □

به‌عنوان مثالی ازکاربرد قضیهٔ ۴، داریم:

مثال۵. در صفحه، مجموعهٔ نقاط با مختصات گویا، شمارش‌پذیر است.

در این مرحله ازکار، خواننده‌ای راکه ممکن است تصورکند هر مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر است می‌بخشیم، ولی با درنظرگرفتن اعداد حقیقی می‌بینیم که این تصور نادرست است.

مثال۶. اعداد حقیقی شمارش‌پذیر نیستند. این مطلب را با برهان خلف اثبات می‌کنیم، ونشان می‌دهیم که هیچ تابعی چون $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ نمی‌تواند پوشا باشد، پس هیچ دوسویی $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ وجود ندارد. فرض‌کنیم تابعی چون $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ داده شده باشد، هر $f(m) \in \mathbb{R}$ را به‌صورت بسط اعشاری

$$f(m)=a_m \, , a_{m1} \, a_{m2} \cdots a_{mn} \cdots \quad , a_{mn} \in \mathbb{Z}, \; a_{mn} \in \mathbb{N}_0, \; 0 \leqslant a_{mn} \leqslant 9$$

می‌نویسیم؛ در اینجا به‌خاطر قطعیت، اگربسط پایان داشته باشد، آن را طوری که هست

می‌نویسیم و در انتهایش دنباله‌ای از صفر قرار می‌دهیم و هیچ‌گاه بسط را با دنباله‌ای از نه به‌پایان نمی‌رسانیم. حال یك عدد حقیقی متفاوت با همهٔ $f(m)$ها می‌نویسیم.

فرض کنیم

$$\beta = ۰ ، b_۱ b_۲ \dots b_n \dots$$

که در آن

$$b_n = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a_{nn} = ۰ ، \\ ۰ & \text{اگر } a_{nn} \neq ۰ ، \end{cases}$$

آنگاه β متفاوت با $f(n)$ است زیرا در رقم nم تفاوت دارند. توجه کنید از ابهامی احتمالی که ممکن بود از یك دنبالهٔ نامتناهی متشکل از نه موجود در بسط ناشی شود با قرار ندادن چنین رقمی در β اجتناب کرده‌ایم.

فرض کنیم $\aleph$ عدد اصلی $\mathbb{R}$ باشد. چون $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ پس $\aleph_۰ \leqslant \aleph$، ومثال ۶ نشان می‌دهد که $\aleph \neq \aleph_۰$، لذا سرانجام عددی اصلی پیدا کردیم که اکیداً بزرگتر از $\aleph_۰$ است. در حقیقت به‌ازای هر عدد اصلی، یك عدد اصلی اکیداً بزرگتر از آن هم وجود دارد. این عدد اصلی باید به‌مجموعه‌ای چون A منسوب باشد. حال نشان می‌دهیم که عدد اصلی مجموعهٔ توانی A اکیداً بزرگتر از عدد اصلی خود A است:

قضیهٔ ۵. اگر A یك مجموعه باشد، آنگاه $|\mathbb{P}(A)| > |A|$.

اثبات. بدیهی است که تابع $f: A \to \mathbb{P}(A)$ با تعریف $f(a) = \{a\}$ یك به‌یك است، پس $|A| \leqslant |\mathbb{P}(A)|$. لذا باید ثابت کنیم $|A| \neq |\mathbb{P}(A)|$. کافی است نشان دهیم که هیچ تابعی چون $f: A \to \mathbb{P}(A)$ نمی‌تواند پوشا باشد. به‌ازای هر چنین تابعی و به‌ازای هر $a \in A$، داریم $f(a) \in \mathbb{P}(A)$، پس $f(a)$ زیرمجموعه‌ای از A است. این سؤال را مطرح می‌کنیم که «آیا a متعلق به $f(a)$ هست؟». جواب همواره یا «آری» است یا «نه»، و ما اعضایی را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آنها جواب «نه» باشد و بدین‌ترتیب مجموعهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

حال ادعا می‌کنیم که توسط تابع f، B با هیچ عضوی از A پوشیده نمی‌شود، زیرا اگر B به ازای عضوی چون $a \in A$ برابر با $f(a)$ باشد، سؤال «آیا a متعلق به B است؟» به تناقض منجر می‌شود:

$$a \in B \Rightarrow a \notin f(a)$$

$$a \notin B \Rightarrow a \in f(a).$$

پس B با f پوشیده نمی‌شود و f پوشا نیست؛ و مسلماً نمی‌تواند دوسویی باشد. □

قضیهٔ ۵ ما را به‌سلسله‌ای‌از نامتناهی‌ها رهنمون می‌کند. با $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ شروع می‌کنیم. سپس $|\mathbb{P}(\mathbb{N})|$ اکیداً بزرگتر است از $\aleph_0$، و بعد $|\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{N}))|$، والی‌آخر.

قضیهٔ شرودر- برنشتاین

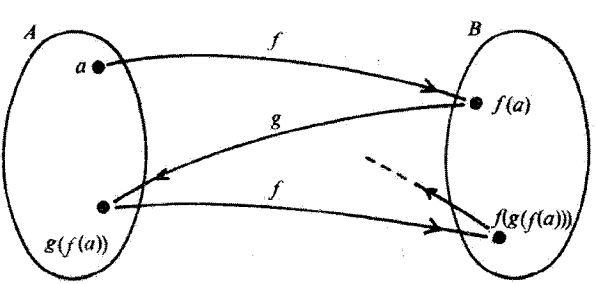
سؤالی بدیهی که می‌تواند در مورد رابطهٔ $\leqslant$ بین اعداد اصلی مطرح شود این است که:

اگر $|B| \leqslant |A|$ و $|A| \leqslant |B|$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $|A| = |B|$؟

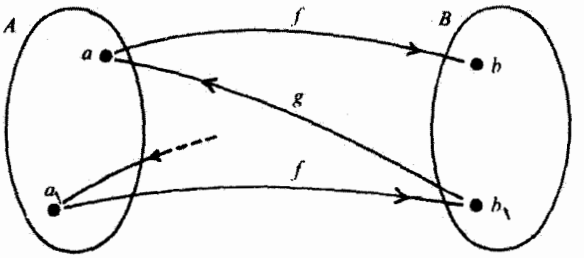
جواب این سؤال مثبت ومحتوای این حکم همان قضیهٔ شرودر- برنشتاین است. اثبات آن پیچیده‌تر از آن است که درنگاه اول از چنین قضیهٔ ظاهراً ساده‌ای برمی‌آید. مسئلهٔ اصلی این‌است: $|B| \leqslant |A|$ بیان می‌کند که تابعی یك به‌یك چون $f: A \to B$ وجود دارد و $|A| \leqslant |B|$ هم‌یك تابع یك به‌یك درجهت عکس‌مانند $g: B \to A$ دراختیارما می‌گذارد، ولی تنها مشکل‌این است که لزوماً این توابع یك به‌یك به‌وجهی با هم در رابطه نیستند. و ما باید با استفاده از آنها به‌طریقی تابعی دوسویی بین A و B بسازیم.

قضیهٔ ۶ (شرودر- برنشتاین). به ازای هردو مجموعهٔ A و B، $|A| \leqslant |B|$ و $|B| \leqslant |A|$ ایجاب می‌کنند که $|A| = |B|$.

اثبات. توابع یك به‌یك $f: A \to B$ و $g: B \to A$ در دست‌اند. می‌توانیم با استفاده از f از A به B برسیم ویا با g از B به A. با تکرار این روند، وبا این رفت وبرگشتها می‌توانیم اعضای $f(a), g(f(a)), f(g(f(a))), \ldots$ را به‌دست آوریم. کلید اثبات این‌است که بکوشیم چنین‌زنجیری‌را واردونه ردیابی کنیم. با $b \in B$ شروع می‌کنیم ومی‌بینیم



که‌آیا عضوی چون a از A وجود دارد که $f(a) = b$؛ اگر چنین aیی وجود داشته باشد، یکتاست. سپس می‌بینیم که آیا عضوی چون b_1 در B وجود دارد که $g(b_1) = a$، و سپس $a_1 \in A$ی که $f(a_1) = b_1$؛ به‌این‌منظور که زنجیری به‌صورت $b, a, b_1, a_1, \ldots, b_n, a_n$، بسازیم که $g(b_r) = a_r$ و $f(a_r) = b_{r+1}$، در واردونه ردیابی کردن زنجیری به‌این نحو،



سه چیز می‌تواند اتفاق بیفتد:

(یك) به a_Nی از A برسیم و توقف کنیم زیرا هیچ b^*ای در B وجود نداردکه $g(b^*)=a_N$،

(دو) به b_Nی از B برسیم و توقف کنیم زیرا هیچ a^*ای در A وجود نداردکه $f(a^*)=b_N$،

(سه) روند همواره ادامه داشته باشد.

این امر B را به‌سه مجموعه افراز می‌کند:

(۱) B_A، زیرمجموعهٔ اعضای B که همچون در (یك) جدش از A منشأ می‌گیرد.

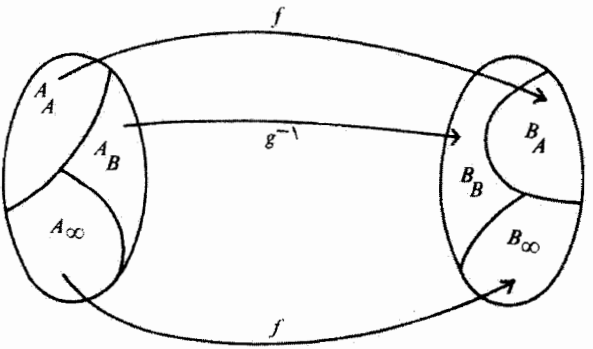
(۲) B_B، زیرمجموعهٔ اعضای B که همچون در (دو) جدش از B منشأ می‌گیرد.

(۳) B_∞، زیرمجموعهٔ اعضای B کـه همچون در (سه) جدش الی غیرالنهایه قابل ردیابی است.

(ملاحظه می‌کنیدکه B_A، B_B، و B_∞ مجزا ازهم هستند و اجتماعشان B است، پس حقیقتاً افرازی را به‌دست می‌دهند.) به‌همین نحو A را می‌توانیم به‌مجموعه‌هایی چون A_A، A_B، A_∞ افرازکنیم کـه به ترتیب جد هریك یا از A منشأ می‌گیرد یا از B، یا الی غیرالنهایه به‌عقب برمی‌گردد.

به‌آسانی‌دیده می‌شودکه تحدید f بر A_A یك دوسویی چون $f:A_A \to B_A$ است؛ تحدید g بر B_B هم یك دوسویی چون $g:B_B \to A_B$ را به‌دست می‌دهد و تحدید f و g هردو دوسویی‌هایی مانند $f:A_\infty \to B_\infty$ و $g:B_\infty \to A_\infty$ را به‌دست می‌دهند. با استفاده از دوسویی اول و یك دوسویی از سومی، می‌توانیم یك دوسویی چون $F:A \to B$ بـه صورت زیر بسازیم:

$$F(a)=\begin{cases} f(a) & \text{اگر } a\in A_A\text{،} \\ g^{-1}(a) & \text{اگر } a\in A_B\text{،} \\ f(a) & \text{اگر } a\in A_\infty\text{،} \end{cases}$$



این امر اثبات قضیه راکامل می‌کند. □

به‌عنوان مثالی ازکاربرد این قضیه، حکم شمارش‌پذیر بودن اعدادگویا را به روش دیگری هم اثبات می‌کنیم. تابع شمول $i: \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ نشان می‌دهد که $|\mathbf{N}| \leqslant |\mathbf{Q}|$، و از آنجاکه هر عددگویا را می‌توان به‌طور یکتا به‌ساده‌ترین صورت $(-1)^n p/q$ نوشت‌که درآن n، p، q در $\mathbf{N}$ هستند، بنا به یکتایی تجزیه به عوامل، تابع $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$، $f((-1)^n p/q) = 2^n 3^p 5^q$، یك به‌یك است، پس $|\mathbf{Q}| \leqslant |\mathbf{N}|$.

مثالی جالبتر این است که نشان می‌دهیم $|\mathbf{P}(\mathbf{N})| = \aleph$. تابعی یك به‌یك چون $f: \mathbf{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$ با

$$f(A) = 0{,}a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

راکه درآن

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \notin A \text{،} \\ 1 & \text{اگر } n \in A \text{،} \end{cases}$$

می‌توان به‌دست‌آورد. به‌ازای هر زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq \mathbf{N}$، این تابع بسط اعشاری یکتایی‌را به‌دست می‌دهد و f یك به‌یك است. یافتن‌تابعی‌یك به‌یك چون $g: \mathbf{R} \to \mathbf{P}(\mathbf{N})$ به‌مهارت بیشتری نیازدارد. به‌جای نوشتن‌اعداد حقیقی به‌صورت دهدهی،آن را به‌صورت دودویی بیان می‌کنیم، به‌این معنی‌که آن را به‌عنوان حدکسرهای به‌صورت

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n}{2^n}$$

که در آن a_0 عددی صحیح است و a_n به‌ازای $n \geqslant 1$ برابر ۰ یا ۱ . می‌نویسیم. اگر عباراتی‌راکه با بینهایت ۱ ختم می‌شوند (همتای دودویی مسئلهٔ دهدهی شامل دنباله‌ای نامتناهی از ۹) مستثنی کنیم، آنگاه چنین بسط دودویی یکتاست. حال عدد صحیح a_0 را در مبنای دوتایی به‌صورت

$$a_{\circ}=(-1)^{m}b_{k}\cdots b_{2}b_{1}$$

که در آن m و ارقام b_1، b_2، ...، b_k همه ۰ یا ۱ هستند، می‌نویسیم؛ آنگاه به‌ازای هر عدد حقیقی x بسط دودویی یکتایی به‌صورت

$$x=(-1)^{m}\,b_{k}\cdots b_{2}b_{1}\circ a_{1}a_{2}\cdots a_{n}\cdots$$

داریم، که در آن m و همهٔ ارقام b_1، ...، b_k، ...، a_1، ...، a_n، ...، برابر ۰ یا ۱ هستند. برای سهولت امر، در این حالت به‌ازای $n>k$، می‌نویسیم $b_n=\circ$. حال جملات را به‌صورت دنباله‌ای چون $m, a_1, b_2, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ درنظر می‌گیریم. این دنباله، دنباله‌ای از ۰ و ۱ است و طبق قاعدهٔ زیر زیرمجموعه‌ای یکتا چون A از $\mathbb{N}$ را تعریف می‌کند:

«$r\in A$ اگر و فقط اگر rمین جملهٔ دنباله ۱ باشد»

به‌این‌نحو تابعی چون $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌شود که $g(x)$ زیرمجموعهٔ Aی تعیین شده با این روش است. این تابع یك به‌یك است، و قضیهٔ شرودر- برنشتاین نشان می‌دهد که $|\mathbb{R}|=|\mathbb{P}(\mathbb{N})|$.

حساب اعداد اصلی

همان‌گونه که می‌توانیم اعداد اصلی متناهی را با هم جمع کنیم، درهم ضرب کنیم، و به‌توان برسانیم، می‌توانیم با تقلید از فرایندهای مجموعه بنیاد مربوط، عملهای متناظر در مورد اعداد اصلی نامتناهی را نیز تعریف کنیم. برخی، ولی نه همهٔ، خواص حساب معمولی در مورد اعداد اصلی نیز برقرارند و بسیار آموزنده است که بررسی کنیم کدام خواص برقرار هستند. ابتدا تعاریف:

جمع. اگر α و β دوعدد اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی)، دومجموعهٔ مجزا از هم A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که $|A|=\alpha$ و $|B|=\beta$. $\alpha+\beta$ را عدد اصلی $|A\cup B|$ تعریف می‌کنیم.

ضرب. اگر $|A|=\alpha$ و $|B|=\beta$، آنگاه $\alpha\beta=|A\times B|$.

توان. اگر $|A|=\alpha$ و $|B|=\beta$، آنگاه $\alpha^{\beta}=|A^{B}|$، که در آن A^B مجموعهٔ همهٔ توابع از B به A است.

خواننده باید کمی تأمل کند و نشان دهد که وقتی مجموعه‌های مربوط متناهی باشند آنگاه

---

۱. این عمل همواره امکان‌پذیر است؛ اگر A و B مجزا نباشند، آنها را با $A'=A\times\{\circ\}$ و $B'=B\times\{1\}$ جایگزین می‌کنیم. دوسویی‌های بدیهی نشان می‌دهند که $|A|=|A'|$ و $|B|=|B'|$. به‌علاوه، A' و B' مجزا هستند زیرا اگر $x\in A'\cap B'$ آنگاه $x=(a,\circ)=(b,1)$ لذا $1=\circ$، که ممکن نیست.

این تعاریف با حساب معمولی جور درمی‌آیند. به‌خصوص، وقتی $|A|=m$ و $|B|=n$، آنگاه در تعریف تابعی چون $f:B\to A$، هرعضو $b\in B$، m حق انتخاب به‌عنوان نگاره دارد، و روی هم m^n تابع حاصل می‌شود. جمع و ضرب در حالت متناهی بسیار آسان هستند.

توجه کنید که مجموعه‌های مورد نظر در تعریف جمع باید مجزا باشند، ولی این امر برای دو عمل دیگر ضرور نیست. دلیل این مطلب روشن است: اگر $|A|=m$، $|B|=n$، و $A\cap B\neq\varnothing$، آنگاه $|A\cup B|<m+n$. مهمترین واقعیتی که در مورد این تعاریف باید بررسی شود خوش‌تعریف بودن آنهاست. اگر با اعداد اصلی α و β شروع کنیم باید مجموعه‌های A و B را چنان انتخاب کنیم که $|A|=\alpha$ و $|B|=\beta$: باید نشان دهیم که اگر مجموعه‌های متفاوتی چون A' و B' را به‌کار گیریم، آنگاه درهرمورد عدد اصلی حاصل همانند عدد اصلی قبلی است. مثلاً در مورد ضرب، اگر $|A'|=|A|$ و $|B'|=|B|$، آنگاه دوسویی‌هایی چون $f:A\to A'$ و $g:B\to B'$ وجود دارند که دوسویی $h:A\times B\to A'\times B'$ با تعریف

$$h(a,b)=(f(a),g(b))$$

را القا می‌کنند. پس $|A\times B|=|A'\times B'|$، و حاصلضرب اعداد اصلی خوش‌تعریف است. در مورد جمع و توان اعداد اصلی اثباتها شبیه به‌اثبات فوق هستند.

اگرخواص این‌عملهای مربوط به‌حساب را مورد بررسی قراردهیم، پی می‌بریم که بسیاری از خواص اعداد متناهی برای اعداد اصلی در حالت عام هم برقرارند:

قضیهٔ ۷. اگر α، β، و γ اعدادی اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی)، آنگاه:

(یك) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$،

(دو) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$،

(سه) $\alpha+0=\alpha$،

(چهار) $\alpha\beta=\beta\alpha$،

(پنج) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$،

(شش) $1\alpha=\alpha$،

(هفت) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$،

(هشت) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$،

(نه) $\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^{\beta})^{\gamma}$،

(ده) $(\alpha\beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$.

اثبات. فرض کنیم A، B، و C مجموعه‌هایی (مجزا) به‌ترتیب با اعداد اصلی α، β، و γ باشند. 0 عدد اصلی $\varnothing$ و 1 عدد اصلی هرمجموعهٔ تك عضوی مثلاً $\{0\}$ است.

(یك)–(سه) بدیهی هستند: زیرا $A\cup B=B\cup A$، $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

و $A\cup\varnothing=A$. (چهار)–(شش) از دوسویی‌های بدیهی $f:A\times B\to B\times A$ با تعریف $f((a,b))=(b,a)$، $g:(A\times B)\times C\to A\times(B\times C)$ با تعریف

$$g(((a,b),c))=(a,(b,c))$$

و $h:\{\circ\}\times A\to A$ با تعریف $h((\circ,a))=a$، نتیجه می‌شوند. (هفت) از برابری $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ نتیجه می‌شود.

اگر سه حکم آخر مشکلتر به‌نظرمی‌آیند، تنها به‌این علت است‌که خواننده آشنایی کمتری با مجموعهٔ توابع A^B از B به A دارد. تنها کافی‌است دوسویی‌های مناسبی راطرح‌ریزی کنیم.

(هشت) تابع $f:A^{B\cup C}\to A^B\times A^C$ را چنین تعریف می‌کنیم که با تابعی چون $\phi:B\cup C\to A$ آغاز می‌نماییم، و $\phi_1:B\to A$ را تحدید ϕ به B و $\phi_2:C\to A$ را تحدید ϕ به C می‌گیریم، و بعد می‌نویسیم $f(\phi)=(\phi_1,\phi_2)$. این‌تابع f دوسویی‌است.

(نه) تابع $g:A^{B\times C}\to(A^B)^C$ را چنین تعریف می‌کنیم که با تابعی چون $\phi:B\times C\to A$ شروع، و بعد تابع $g(\phi):C\to A^B$ را با $[g(\phi)](c):B\to A$ تعریف می‌کنیم که هر b از B را به

$$([g(\phi)](c))(b)=\phi((b,c)).$$

می‌نگارد. از آنجا که‌این‌تابع نامأنوس‌تراست، بدنیست نشان دهیم که g یك دوسویی‌است. g یك به‌یك‌است، زیرا اگر به‌ازای دوتابع ϕ و ψ از $B\times C$ به A، $g(\phi)=g(\psi)$، آنگاه

$$([g(\phi)](c))(b)=([g(\psi)](c))(b)\text{، } c\in C \text{ و هر } b\in B \text{ به‌ازای هر}$$

پس؛ بنابه تعریف،

$$\phi((b,c))=\psi((b,c))\text{، } c\in C \text{ و هر } b\in B \text{ به‌ازای هر}$$

که به‌این معنی است‌که $\phi=\psi$.

برای اینکه نشان دهیم g پوشاست، با تابعی چون $\theta\in(A^B)^C$، یعنی $\theta:C\to A^B$، آغاز، و بعد $\phi:B\times C\to A$ را با:

$$\phi(b,c)=[\theta(c)](b)\text{، } c\in C \text{ وهر } b\in B \text{ به‌ازای هر}$$

تعریف می‌کنیم. همان‌طورکه می‌خواستیم، داریم $g(\phi)=\theta$.

(ده) آخرین تساوی بین اعداد اصلی از دوسویی $h:(A\times B)^C\to A^C\times B^C$ نتیجه می‌شودکه با نوشتن هر $\phi:C\to A\times B$ برحسب

$$\phi(c)=(\phi_1(c),\phi_2(c))\text{، } c\in C \text{ به‌ازای}$$

وسپس با درج $h(\phi)=(\phi_1,\phi_2)$ به‌دست می‌آید. بررسی جزئیات به‌خواننده واگذار می‌شود. □

اکنون با اعداداصلی، چند محاسبهٔ صریح انجام می‌دهیم. به‌عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ ۳، داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی متناهی n، $n+\aleph_0=\aleph_0+n=\aleph_0$، و

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

این مطلب نشان می‌دهدکه تعریف حاصل تفریق اعـداد اصلی نامتناهی امکان‌پذیر نیست، زیرا $\aleph_0-\aleph_0$برابرچه باید باشد؟ بنابرنتایج فوق این‌تفاضل‌می‌تواند هرعدد اصلی‌متناهی باشد یا خود $\aleph_0$، پس حاصل تفریق را نمی‌توان به‌طور یکتا تعریف کرد تا

$$\aleph_0-\aleph_0=\alpha \Longleftrightarrow \aleph_0=\aleph_0+\alpha.$$

از قضیهٔ ۴ به‌آسانی نتیجه می‌شود که:

به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $n\aleph_0=\aleph_0 n=\aleph_0$، و

$$\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$$

محاسبهٔ $0\aleph_0$ جالب است. این مقدار برابر صفر است. در حقیقت داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی β، $0\beta=0$.

این مطلب به‌این دلیل است‌که:

به‌ازای هرمجموعهٔ B، $A=\varnothing \Rightarrow A\times B=\varnothing$،

زیرا اگر A عضوی نداشته باشد، آنگاه هیچ زوج مرتبی چون (a, b) هم وجود ندارد که درآن $a\in A$ و $b\in B$. واین حاکی‌است‌که، برحسب اعداد اصلی، صفر برابر بینهایت، بدون توجه به‌اندازهٔ عدد اصلی بینهایت، صفر است.

محاسبهٔ α^0 و α^1 به‌ازای هرعدد اصلی α نیـز آموزنده است. بنـا به‌تعریف، اگر $|A|=\alpha$، آنگاه α^0 عدد اصلی مجموعهٔ توابع از $\varnothing$ به A است. پندار احتمالی شماکـه هیچ تابعی از $\varnothing$ به A وجود ندارد قابل اغماض است، ولی تعریف مجموعـه بنیاد تابعی چون $f:\varnothing\to A$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\varnothing\times A$ تنها یك تابع را به‌دست می‌دهد، و آن زیرمجموعهٔ تهی ازمجموعهٔ $\varnothing\times A$ است. پس $\alpha^0=1$. از آنجاکه $|\{0\}|=1$، α^1، عدد اصلی مجموعهٔ توابع از $\{0\}$ به A است. هرتابع $f:\{0\}\to A$ به‌طور یکتا با عضو $f(0)\in A$ مشخص می‌شـود، پس تابعـی دوسویی چـون $g: A^{\{0\}}\to A$ بـا تعریف $g(f)=f(0)$ وجود داردکه نشان می‌دهد $|A^{\{0\}}|=|A|$، یـا $\alpha^1=\alpha$. با استفاده از قضیهٔ ۷ (سه) و استقرا، داریم

$$(\aleph_0)^0=1,\ \text{و به‌ازای هر } n\in\mathbb{N},\ (\aleph_0)^n=\aleph_0.$$

اگر به‌ازای هرعدد اصلی چون α، 2^α را محاسبه‌کنیـم، برحسب مجموعهٔ توانی، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آوریم. فرض‌کنیم $|A|=\alpha$، آنگاه، از آنجاکه $|\{0, 1\}|=2$، داریم:

$$|\{۰, ۱\}^A| = ۲^\alpha.$$

ولی هر تابعی چون $\phi: A \to \{۰, ۱\}$ دقیقاً متناظر زیرمجموعه‌ای از A است، به‌صورت:

$$\{a \in A | \phi(a) = ۱\}.$$

تابعی چون $f: \{۰, ۱\}^A \to \mathbb{P}(A)$ را با $f(\phi) = \{a \in A | \phi(a) = ۱\}$ تعریف می‌کنیم، آنگاه f دوسویی است، و لذا $|\mathbb{P}(A)| = ۲^\alpha$. بنا به‌قضیهٔ ۵ داریم:

به‌ازای هرعدد اصلی α، $۲^\alpha > \alpha$.

ترتیب اعداد اصلی

دراین فصل تاکنون در مواردگوناگون چندین مطلب دربارهٔ ترتیب اعداد اصلی اثبات کرده‌ایم. اکنون فرصت خوبی است که این نتایج را جمع‌آوری کنیم و با اثبات احکام باقیمانده فهرست نتایج را جامعتر بنماییم:

قضیهٔ ۸. اگر α، β، γ، و δ اعدادی اصلی باشند (متناهی یا نامتناهی) آنگاه:

(یك) $\alpha \leqslant \beta, \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$،

(دو) $\alpha \leqslant \beta, \beta \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$،

(سه) $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$،

(چهار) $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\delta$،

(پنج) $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha^\gamma \leqslant \beta^\delta$.

اثبات. مجموعه‌هایی‌چون A، B، C، وD با اعداد اصلی α، β، γ، وδ را انتخاب می‌کنیم.

(یك) اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ یك به‌یك باشند، آنگاه $gf: A \to C$ هم یك به‌یك است.

(دو) این همان قضیهٔ شرودر-برنشتاین است.

(سه) اگر $f: A \to B$ و $g: C \to D$ دوسویی‌هایی با شرایط $A \cap B = \varnothing$، و $C \cap D = \varnothing$ باشند، تابع $h: A \cup C \to B \cup D$ را با:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{به‌ازای } x \in A، \\ g(x) & \text{به‌ازای } x \in C، \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون $A \cap B = \varnothing$، این تابع خوش‌تعریف است، و چون $B \cap D = \varnothing$، از این واقعیت که f و g یك به‌یك هستند نتیجه می‌گیریم که h هم یك به‌یك است.

(چهار) اگر $f: A \to B$ و $g: C \to D$ یك به‌یك باشند، تابع $p: A \times C \to B \times D$ را با:

$$p((a, c))=(f(a),\ g(c))\text{، }c\in C\text{ و هر }a\in A\text{ به‌ازای هر}$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که p یك به‌یك است (زیرا اگر $p((a_1, c_1))=p((a_2, c_2))$، آنگاه $(f(a_1),\ g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$، پس $f(a_1)=f(a_2)$ و $g(c_1)=g(c_2)$، و از یك به‌یك بودن f و g نتیجه می‌گیریم که $a_1=a_2$ و $c_1=c_2$).

(پنج) با در نظر گرفتن $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ این مطلب بهتر دیده می‌شود. (اگر $f:A\to B$ و $g:C\to D$ یك به‌یك باشند، آنگاه در برهان زیر به‌جای A، $f(A)\subseteq B$، و به‌جای C، $g(C)\subseteq D$ را در نظر می‌گیریم.) به‌ازای زیرمجموعه‌های $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، برای تعریف $\mu: A^C\to B^D$ کافی است نشان دهیم که تابعی چون $\phi: C\to A$ را چگونه می‌توان به‌تابعی چون $\mu(\phi): D\to B$ توسعه داد. آسانترین راه انجام این امر این است که عضوی چون $b\in B$ را انتخاب، (هرعضوی این‌کار را انجام می‌دهد؛ مورد استثنایی $B=\varnothing$ با برهانی جداگانه حکم پنج را به‌آسانی نتیجه می‌دهد) وسپس $\mu(\phi)\in B^D$ را با:

$$[\mu(\phi)](d)=\begin{cases}\phi(d) & \text{به‌ازای } d\in C\text{،}\\ b & \text{به‌ازای } d\in D-C\text{،}\end{cases}$$

تعریف کنیم. آنگاه $\mu: A^C\to B^D$ یك به‌یك است زیرا $\mu(\phi_1)=\mu(\phi_2)$ نتیجه می‌دهد که[۱]:

$$[\mu(\phi_1)](d)=[\mu(\phi_2)](d)\text{، به‌ازای هر } d\in D\text{،}$$

به‌خصوص، این امر به‌این معنی است که:

$$\phi_1(d)=\phi_2(d)\text{، به‌ازای هر } d\in C$$

ولذا $\phi_1=\phi_2$. □

با توجه به آخرین قضیه، خواننده ملاحظه می‌کند که از فهرست خواص قابل انتظار در مورد رابطهٔ ترتیبی، خاصیت جالبی از قلم افتاده است. حکم نکردیم که هردو عدد اصلی با هم قابل‌مقایسه هستند، یعنی اگر α و β دوعدد اصلی باشند، آنگاه یا $\alpha\leqslant\beta$ یا $\beta\leqslant\alpha$. این حکم به‌این منجر می‌شود که مجموعه‌هایی چون A و B به‌ترتیب با اعداد اصلی α و β را انتخاب کنیم و نشان دهیم که یا تابع یك به‌یکی چون $f:A\to B$ وجود دارد، یا $g:B\to A$ (یا هردو). برای ساختن چنین تابع یك به‌یکی، یا باید اطلاعاتی در مورد مجموعه‌های A و B داشته باشیم، یا روش کلی ساختن تابع یك به‌یك مناسبی را بدانیم. اگر مجموعه‌های مشخصی مفروض باشند، می‌توانیم با استفاده از هوش و زیرکی خود به‌طرز ویژه‌ای کوشش کنیم تابعی یك به‌یك از یکی به‌دیگری بسازیم. روشی کلی که به‌ازای همهٔ مجموعه‌ها مؤثر باشد نیازمند صراحت بیشتری درمورد منظورمان از «مجموعه» است. این امر مرزهای نظریهٔ مجموعه‌ها را در فشار می‌گذارد. اگر محدودیتهای مشخصی را برای

---

۱. تابع $\mu(\phi): D\to B$ معمولاً یك به‌یك نیست؛ این تابع را با تابع $\mu: A^C\to B^D$ اشتباه نگیرید.

اصطلاح «مجموعه» قایل نشویم نمی‌توانیم دربارهٔ مقایسهٔ دوتا از آنها هم صحبت کنیم. نظریهٔ مجموعه‌ها به‌گیاه زنده و بزرگی تبدیل شده است؛ برای بارورکردن آن باید ریشه‌های محکمتری به‌مبانی آن افزود.

تمرین

۱. فرض کنید X مجموعهٔ نقاط (x, y, z) در $\mathbb{R}^3$ با شرط $x, y, z \in \mathbb{Q}$ باشد. آیا X شمارش‌پذیر است؟

۲. فرض کنید S مجموعهٔ کره‌های در $\mathbb{R}^3$ باشد که مراکزشان مختصات گویا دارند و شعاعشان اعدادی گویا هستند. نشان دهید که S شمارش‌پذیر است.

۳. فرض کنید $[0, 1[$ مجموعهٔ اعداد حقیقی x با شرط $0 \leqslant x < 1$ باشد. با نوشتن هر عضو این مجموعه به‌صورت یك بسط اعشاری، ثابت کنید که $[0, 1[$ شمارش‌ناپذیر است.

۴. کدام یك از مجموعه‌های زیر شمارش‌پذیر است؟ (هرمورد را اثبات یا رد کنید.)

(الف) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ اول باشد$\}$،

(ب) $\{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$،

(پ) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 10^{10^{10}}\}$،

(ت) $\mathbb{C}$،

(ث) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2^a 3^b$، $a, b \in \mathbb{N}$ چون به‌ازای اعضایی$\}$.

۵. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ برابر است با

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

فاصلهٔ باز برابراست با $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$، وفاصله‌های نیم‌بازبرابرند با

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}.$$

ثابت کنید به‌ازای $a < b$ و $c < d$، تابع $f:[a, b] \to [c, d]$ با تعریف:

$$f(x) = \frac{(b-x)c}{b-a} + \frac{(x-a)d}{b-a}$$

دوسویی است. نتیجه بگیرید که هردو فاصلهٔ بسته، اعداد اصلی برابر دارند.

همچنین ثابت کنید که اعداد اصلی $[a, b]$، $[a, b[$، $]a, b[$، $[a, b]$ همه با هم

برابرند. (راهنمایی: با انتخاب d, c با شرط $a < c < d < b$، و سپس با استفاده از قضیهٔ شرودر- برنشتاین نشان دهیدکه عدد اصلی $[a, b]$ با اعداد اصلی‌سه فاصلهٔ دیگر برابر است.)

۶. ثابت‌کنیدکه عدداصلی‌هرفاصلهٔ بسته، هرفاصلهٔ باز، و هرفاصلهٔ نیم‌بازبرابربا $\aleph$ است.

۷. ثابت‌کنید بین هردوعدد حقیقی متمایزتعداد شمارش‌پذیری عددگویا و تعدادشمارش- ناپذیری عددگنگ وجود دارند.

۸. تابع دوسویی‌صریحی‌از $[۰, ۱]$ به $]۰, ۱[$ بسازید. (اگربه‌طرق دیگری موفق نشدید، از ساختار شرودر-برنشتاین روی توابع یك به‌یك $]۰, ۱[\to [۰, ۱]$ با تعریف $f:[۰, ۱] \to]۰, ۱[$، و $f(x) = \frac{۱}{۲}x$ با تعریف $g:]۰, ۱[\to [۰, ۱]$، $g(x) = x$، استفاده‌کنید.)

۹. اگر $A_۱$ و $A_۲$ دومجموعهٔ دلخواه باشند، ثابت‌کنید:

$$|A_۱| + |A_۲| = |A_۱ \cup A_۲| + |A_۱ \cap A_۲|.$$

این مطلب را برای n مجموعهٔ $A_۱$، ...، A_n تعمیم دهید.

۱۰. مثالهای نقیضی پیداکنیدکه درهر مورد نشان دهدگزاره‌های‌کلی زیر به‌ازای اعداد اصلی α، β، و γ نادرست هستند:

(الف) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$،

(ب) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$،

(پ) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^۲ < \beta^۲$،

(ت) $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta$.

۱۱. (الف) تابع $f:[۰, ۱[\times [۰, ۱[\to [۰, ۱[$ را با

$$f((۰{,}a_۱a_۲ \cdots a_n \cdots, ۰{,}b_۱b_۲ \cdots b_n \cdots)) = ۰{,}a_۱b_۱a_۲b_۲ \cdots a_nb_n \cdots$$

تعریف‌کنید. و نتیجه بگیریدکه $\aleph = \aleph^۲$.

(ب) با استفاده از $\aleph = ۲^{\aleph_۰}$، وخواص‌حساب اعداد اصلی، نتیجهٔ (الف) را به‌نحو بهتری اثبات‌کنید.

(پ) با استفاده از $\aleph\aleph \leqslant \aleph_۰\aleph \leqslant \aleph$، یا به‌روشی دیگر، $\aleph_۰\aleph$ را پیداکنید.

(ت) به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، $n\aleph$ چیست؟

(ث) ثابت‌کنیدکه $\aleph = \aleph^{\aleph_۰}$ و $۲^\aleph = \aleph^\aleph$.

(ج) مطلوب است $\aleph_۰^\aleph$.

۱۲. اگر عدد اصلی‌نامتناهی α مفروض باشد، می‌توان نشان دادکه عددی اصلی چون β

وجود دارد که $\alpha = \aleph_0 \beta$. با استفاده از این واقعیت نشان دهید که $\aleph_0 \alpha = \alpha$.

۱۳. (اثباتی که با آن، بدون حتی مشخص کردن یکی، کانتور نشان داد که اعداد متعالی هم وجود دارند!)

عددی حقیقی را جبری می‌نامیم اگر جواب یك معادلهٔ چند جمله‌ای چون

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

با ضرایب صحیح باشد. اگر چنین نباشد، آن عدد را متعالی[1] می‌نامیم.

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ چند جمله‌ایهای با ضرایب صحیح شمارش‌پذیر است.

(ب) نشان دهید که مجموعهٔ اعداد جبری شمارش‌پذیر است.

(پ) نشان دهید برخی از اعداد حقیقی باید متعالی باشند.

(ت) چند عدد متعالی وجود دارد؟

---

۱. اعداد متعالی را اعداد غیرجبری هم می‌گویند.ـــم.

قسمت IV

تحکیم مبانی

فصلهای ۱۱ و ۱۲ نشان دادند که مطالب عرضه شده چگونه می‌توانند بـه مباحث اصلی ریاضیات، به قلمروهایی بالاتر و بالاتر، بینجامند. ولی فصل آخر این کتاب ما را درجهت عکس، به عمق مطالب، راهنمایی می‌کند.

زیرا حال که چنین ساختمان زیبایی را ساخته‌ایم عاقلانه‌است به‌بررسی مجدد زمینی که بنا روی آن قـرار دارد بپردازیم. کاری که انجام داده‌ایم این بود کـه به‌جای دستگاه بسیار پیچیدهٔ مشهودات دربـارهٔ اعداد، دستگاه نسبتاً ساده‌تر مشهودات دربارهٔ مجموعه‌ها را قرار دادیم. اساس مجموعـه بنیاد هنوز هم شهودی، وغیرصوری است. اگر خانـه‌ای یك طبقه ساخته بودیم، این موضوع احتمالاً اهمیت چندانی نداشت؛ ولی یك آسمان‌خراش ساخته‌ایم (آسمان‌خراشی که می‌تواند به ارتفاع بسیار بالاتری نیز توسعه یابد)، و اکنون زمان آن رسیده است که زیربنا را کمی عمیق‌تر بررسی کنیم و ببینیم آیا سنگینی این بنا را می‌تواند تحمل کند. یا، به‌اصطلاح کشاورزان، باید مطمئن شویم کـه ریشه‌ها قدرت تحمل گیاه کاملاً رشد یافته را دارند. ولذا باید خاك را اصلاح کنیم، وکود و بذری بـا کیفیت بهتر به‌کار ببریم.

هدف مـا صرفاً برشمردن کارهایی است که می‌تواند انجام بگیرد، ونه در واقع انجام دادن آنها؛ لذا به‌طوری غیرصوری دربارهٔ امکان پیداکردن اصول موضوعی برای نظریهٔ مجموعه‌ها بحث خواهیم کرد.

ممکن است چنین به‌نظر آید که بحث ما دایره‌ای کامل را طی کرده است: وما درست به‌نقطه‌ای که آغاز کرده بودیم بازگشته‌ایم، و دلواپس همان مطالب قبلی هستیم. در واقع

چنین نیست: ما به‌طور مارپیچ حرکت کرده‌ایم، به‌همان نقطهٔ اولیه بازگشته‌ایم ولی در سطحی بالاتر. اکنون مسائل موجود، وحل آنها را خیلی بهتر ازقبل می‌شناسیم. مطالبی را که تاکنون مورد بحث قرار داده‌ایم تقریباً برای همهٔ دروس ریاضی دانشگاهی کاملاً کافی هستند. ولی نباید این‌قدر هم ساده‌اندیش باشیم که تصورکنیم به پاسخ کامل ونهایی دست یافته، یا به سرحدکمال رسیده‌ایم.

۱۳

اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها

تاکنون کار ما متمرکز بود حول محور به دست‌آوردن دستگاهی صوری برای حساب براساس نظریهٔ مجموعه‌ها. این تحلیل باید درك عمیقی از دستگاههای گوناگون اعداد به‌ما داده باشدکه‌کارشان چگونه است،وموقعیتشان دربین اشیاء کجاست. همچنین باید قوهٔ انتقاد و درك خواننده از قوانین دقیق را قوت بخشیده باشد. ممکن است این قوا چنان قوی شده باشندکه خواننده بتواند فقدان یك عامل اساسی را ببیند. ما همهٔ مطالب را به‌صورت اصول موضوعی درآورده‌ایم مگر یك مطلب قابل‌توجه را: خود نظریهٔ مجموعه‌ها.

با توجه به‌زحماتی‌که درمورد جزئیات ساخت دستگاههای اعداد متحمل شده‌ایم، جای تأسف فراوان خواهد بود اگر مبنایی‌که روی آن کارکرده‌ایم معیوب ازآب درآید وقادر به‌تحمل سنگینی ساختمان عظیمی‌که روی آن بنا شده است نباشد. درتحلیل نهایی، بناکردن نظریهٔ صوری اعداد روی‌نظریهٔ طبیعی، شهودی‌وغیرصوری مجموعه‌هارضایتبخش‌تر ازاین نیست‌که با نظریهٔ طبیعی، شهودی وغیرصوری خود اعداد آغازکنیم!

با این وجود، هنوزهم می‌توانیم با بازگشتن به‌نقطهٔ آغاز و نیز اصول موضوعه‌ای کردن نظریهٔ مجموعه‌ها ازاین انتقاد واقعاً مخرب رهایی یابیم. (در واقع، بهتر بودکه از ابتدا نظریهٔ مجموعه‌ها را برپایه‌ای اصولی بنا می‌کردیم، ولی‌کاری‌که از واقعیت این‌قدر دور است وهیچگونه آگاهی ازضرورت انجامش وجود ندارد، مشکلات ذهنی فراوانی ایجاد می‌نماید!) ما نه خیلی عمیق وارد جزئیات می‌شویم (خوانندگان مشتاق می‌توانند

به‌کتاب مندلسن[1] [۱۰] رجوع کنند)، ونه با روشی خیلی صوری آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. هدف ما صرفاً: روشن کردن فرضیات ناخودآگاهی است که در مورد مجموعه‌ها پذیرفته می‌شوند، حذف کردن برخی از فرضیات ظاهرالصلاحی است که منجر به‌پارادوکس می‌گردند، وارائهٔ فهرستی از اصول موضوع است که رضایتبخش به‌نظر می‌آیند.

ازنظر تاریخی، برخی از ریاضیدانان امید بیشتری داشتند. دراوایل قرن اخیر عده‌ای‌ازآنان، به‌سرکردگی دیوید هیلبرت[2]، مبادرت به‌نوعی ردیابی آرتوری برای‌حقیقت نمودند: ردیابی پایه‌ای محکم و ثابت برای ریاضیات، وضمانتی که حقایق ریاضیات را مطلق جلوه دهد. دراین جهان ناپایدار ونامطمئن، تعجب‌آور نیست که عاقبت‌الامر همهٔ این امیدها به یأس تبدیل شود.

برخی ازمشکلات

مشکلات نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها دونوع هستند. اول وجود پارادوکسها: نتایج ظاهراً متناقضی که ازمنطق ظاهراً بی‌نقص بسه دست می‌آیند. دوم وجود مشکلات کاملاً تکنیکی: آیا اعداداصلی نامتناهی همیشه قابل مقایسه‌اند؟ آیا عددی‌اصلی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود دارد؟

جهت ایجاد انگیزه، دوپارادوکس را درنظر می‌گیریم. اولی‌که منسوب به برتراند راسل[3] است و درفصل ۳ به‌آن اشاره شد. اگر

$$S=\{x|x\notin x\},$$

آنگاه آیا $S\in S$ یا $S\notin S$؟ هریك ازاین دومستقیماً دیگری را نتیجه می‌دهد!

برای پارادوکس دوم، فرض‌کنیم U مجموعهٔ همهٔ اشیاء، مثلاً تعریف شده توسط

$$U=\{x|x=x\}$$

باشد. حال به‌ازای هرمجموعهٔ X داریم $X\subseteq U$ به‌خصوص مجموعهٔ توانی $\mathbb{P}(U)\subseteq U$. حال، با توجه به‌اعداد اصلی، داریم:

$$|U|\geqslant|\mathbb{P}(U)|.$$

ولی بنا به‌قضیهٔ ۵ ازفصل ۱۲، داریم.

$$|U|<|\mathbb{P}(U)|.$$

این یك تناقض است: اشکال درچیست؟

پاسخهای بسیاری قابل تصورند، مثلاً:

پاسخ شترمرغ. مشکلات را نادیده بگیرید، شاید برطرف شوند.

---

1. Mendelson 2. David Hilbert 3. Bertrand Russell

پاسخ بدبین. پارادوکسها حاکی از نقایص اجتناب‌ناپذیر ریاضیات هستند. ریاضیات را رها کنید و رشتهٔ مفیدتری چون بافندگی و یا جامعه‌شناسی را برگزینید.

پاسخ خوش‌بین. استدلالها را دوباره بیازمایید، منشاء مشکلات را بیابید، وسعی کنید پارادوکسها را به دور بریزید وهرچه را ارزش نگهداری دارد نجات دهید.

اگر موافق شترمرغ هستید: همین‌جا مطالعه را متوقف کنید. اگر موافق بدبین هستید: این کتاب را بسوزانید. واگرموافق خوش‌بین هستید: به مطالعه ادامه دهید...

مجموعه وکلاس

درچند بخش بعد یك پاسخ ممکن به‌این مسئله موسوم بـه نظریهٔ مجموعه‌های فون‌نویمان-برنیز[1]-گودل[2]، را موردبحث قرارمی‌دهیم. این راه حل ازمشاهدهٔ این مطلب ناشی می‌شود که یك منبع خوش‌ظاهرمشکل‌ساز همان‌آزادی تشکیل مجموعه‌های عجیب، وبسیاربزرگ، (همچون دومجموعهٔ S و U فوق‌الذکر) است. ظاهراً، همهٔ پارادوکسهای شناخته شده از این‌گونه راهها «رخنه» می‌کنند. بنابـراین بین دومفهوم فرق قایل می‌شویم. کلاس، کـه می‌توان آن را دسته‌ای دلخواه (چیزی کـه تاکنون بـه‌طور طبیعی «مجموعه» نامیده شده است) پنداشت، و مجموعه، کـه نوعی کلاس معتبر است. بـا این‌ترتیب توانایی تعریف مخلوقات عجیب یـا بزرگ را تنها به‌کلاس محدود می‌کنیم. ایـده این است: وجزئیات تقریباً به‌صورت زیر.

کلاسها به‌عنوان اشیایی ابتدایی وتعریف نشده، همراه با رابطه‌ای چون $\in$ (متناظر مفهوم شهودی عضویت) ونفی‌آن $\notin$ در نظرگرفته می‌شوند. اگر X و Y دوکلاس باشند لازم است یکی از دوحالت

$$X \in Y, \quad X \notin Y$$

برقرار باشد. برابری کلاسها $X = Y$ را با

$$(\forall Z)(Z \in X \Longleftrightarrow Z \in Y)$$

تعریف می‌کنیم. کلاسی چون X را یك مجموعه می‌خوانیم اگر به‌ازای کلاسی چون Y، داشته باشیم $X \in Y$. تعریف قاطع همین است: مجموعـه‌ها اشیایی هستندکـه می‌توانند اعضای اشیایی دیگر باشند. این تعریف با احساس شهودیمان‌که مجموعه‌ها اشیایی هستند که اشیاء دیگری عضوآن هستند متفاوت است؛ وهمین تفاوت است‌که تعریف مجموعه‌های بزرگ وعجیب را مشکل می‌سازد. برای‌اینکه این تعریف مؤثر واقع شود، توافق می‌کنیم که عبارتی نظیر

$$\{x | P(x)\}$$

---

1. Bernays 2. Gödel

به معنی «کلاس همهٔ مجموعه‌های x که به‌ازای آن $P(x)$ صادق است» باشد. مجبوریم این محدودیت را قایل شویم، زیرا به هرحال تنها مجموعه‌ها می‌توانند اعضای کلاسها باشند؛ این امر پارادوکسها را سد می‌کند.

مثلاً کلاس راسل را درنظر می‌گیریم

$$S=\{X|X\notin X\}.$$

با تعبیر جدید، این، کلاس همهٔ مجموعه‌های X است که $X\notin X$. حال برهان معمول راکه به‌تناقض منجر می‌شد مرور می‌کنیم، ومی‌بینیم چه اتفاقی می‌افتد. فرض کنیم $S\in S$. آنگاه S عضو شیئی است، لذا مجموعه است، پس $S\notin S$، که تناقض است. حال فرض کنیم $S\notin S$. اگر S مجموعه باشد، آنگاه خاصیت تعریف کنندهٔ $X\notin X$ را ارضا می‌کند، ولذا بنابه‌تعریف $S\in S$. این نیز یك تناقض است. حال این امکان می‌ماندکه S مجموعه نباشد. دراین حالت نمی‌توانیم استنتاج کنیم که $S\in S$: اعضای S باید مجموعه باشند وعضو خودشان هم نباشند.

نتیجهٔ حاصل ازاین مطلب این است که پارادوکس به دست نمی‌آید: تنها چیزی که به دست می‌آید اثبات این مطلب است که S مجموعه نیست. کلاسهایی که مجموعه نباشند کلاسهای واقعی نامیده می‌شوند؛ هم‌اکنون ثابت کردیم که چنین کلاسهایی وجود دارند. به همین‌نحو می‌توانیم ثابت کنیم که U هم یك کلاس واقعی‌است، وبازهم پارادوکسی وجود ندارد.

خود اصول موضوع

اکثر اصول موضوع موردنیاز از قبل مشخص هستند، زیرا تنها کاری راکه انجام می‌دهند این‌است که اشیایی راکه می‌خواهیم حتماً مجموعه باشند، مجموعه می‌سازند. برای سهولت دربیان این اصول، فرض می‌کنیم نمادگذاری متداول نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌طریق واضح، برای کلاسها هم تجهیز شده باشند. مثلاً تعریف می‌کنیم که

$$\varnothing=\{x|x\neq x\}$$

$$\{x,\ y\}=\{u|y=u\ \text{یا}\ x=u\}$$

و الی آخر.

ازاین به‌بعد قرار می‌گذاریم که حروف کوچك x، y، z، . . . مجموعه‌هایی را نمایش دهند، وحروف بزرگ X، Y، Z، . . . کلاسهایی را، که ممکن است مجموعه باشند یا نباشند.

(م ۱) توسیع‌پذیری. $X=Y\iff(\forall Z)(X\in Z\iff Y\in Z)$.

(برابری کلاسها را با «داشتن اعضای یکسان» تعریف کرده‌ایم. این اصل موضوع صرفاً تکنیکی بیان می‌کندکه کلاسهای برابر، به اشیاء یکسان تعلق دارند.)

(م ۲) مجموعهٔ تهی. $\varnothing$ یك مجموعه است.

(م ۳) زوج. به‌ازای همهٔ مجموعه‌های x و y، $\{x, y\}$ یك مجموعه است.

حال می‌توانیم مجموعه‌های تك‌عضوی را با $\{x\}=\{x, x\}$ تعریف کنیم، و در این صورت زوجهای مرتب را با استفاده از تعریف کوراتوفسکی $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ تعریف می‌کنیم، و به‌همین ترتیب توابع و روابط را همچون قبل.

(م ۴) عضویت. $\in$ یك رابطه است، یعنی، کلاسی چون M متشکل از زوجهای مرتب (x, y) وجود دارد که $(x, y)\in M \iff x\in y$.

(م ۵) اشتراك. اگر X, Y دو کلاس باشند، $X\cap Y$ یك کلاس است.

(م ۶) متمم. اگر X یك کلاس باشد، متمم آن X^c هم وجود دارد و یك کلاس است.

(م ۷) دامنه. اگر X کلاسی از زوجهای مرتب باشد، کلاسی چون Z وجود دارد که به ازای یك v، $u\in Z \iff (u, v)\in X$.

ازاینها جالبتر اصل موضوعی است برای تعریف یك کلاس با خاصیتی از اعضایش، نظیر همان $\{x|P(x)\}$. دراینجا یك اصل کلی را بیان می‌کنیم: درصورت تمایل می‌توان این اصل را از تعداد کمی اصول موضوع خاصتر ازهمان نوع هم به دست آورد.

(م ۸) وجود کلاس. فرض کنیم $\phi(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m)$ گزاره نمای مرکبی باشد که در آن تنها متغیرهای مجموعه‌ای، سوردار ظاهر بشوند. آنگاه کلاسی چون Z وجود دارد که:

$$(x_1, \cdots, x_n)\in Z \iff \phi(x_1, \cdots, x_n, Y_1, \cdots, Y_n).$$

می‌نویسیم

$$Z=\{(x_1, \cdots, x_n)|\phi(x_1, \cdots, x_n, Y_1, \cdots, Y_n)\}.$$

ملاحظه کنید که در اینجا xها مجموعه هستند. به‌خصوص، اعضای کلاس

$$Z=\{x|P(x)\}$$

مجموعه‌هایی چون x هستند که به‌ازای آنها $\mathbb{P}(x)$ صادق است. این اصل، همان‌طور که درفوق ملاحظه کردیم، ما را از پارادوکس مصون می‌دارد.

(م ۹) اجتماع. اجتماع مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها یك مجموعه است.

(م ۱۰) مجموعهٔ توانی. اگر x مجموعه باشد، $\mathbb{P}(x)$ نیز مجموعه است.

(م ۱۱) زیرمجموعه. اگر x یك مجموعه و X یك کلاس باشد، آنگاه $X\cap x$ یك مجموعه است.

درپایان، اصل موضوعی وجود دارد که قدری کلی‌تر از اصل موضوع زیر است:

(م ۱۲) جایگزینی. اگر دامنهٔ تابعی چون f یك مجموعه باشد، آنگاه نگاره‌اش هم یك مجموعه است.

این اصول تقریباً برای همهٔ دستگاههایی که با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه

شدند کافی هستند. ضمناً، همهٔ آنها، حتی اگر خود را تنها به مجموعه‌های متناهی هم محدود کنیم، برقرار می‌باشند. بنابراین اصلی لازم داریم که مبین وجود مجموعه‌های نامتناهی باشد، زیرا در غیر این صورت نمی‌توانیم هیچ‌یك از دستگاههای اعداد مورد علاقهٔ خودمان را بسازیم. بنابراین اصل موضوع دیگری را که در فصل ۸ معرفی کردیم اضافه می‌نماییم (ابتکار فون نویمان):

(م ۱۳) اصل موضوع بینهایت. مجموعه‌ای چون x وجود دارد که $\varnothing \in x$، و هرگاه $y \in x$ آنگاه $y \cup \{y\} \in x$.

با استفاده از تعریف فون‌نویمان برای اعداد طبیعی، این اصل موضوع به‌این حکم بدل می‌شود که اعداد طبیعی یك مجموعه تشکیل می‌دهند. کاملاً بدیهی است که بدون پذیرش چنین حکمی، نظریهٔ مجموعه‌ها نمی‌تواند چندان مفید باشد.

سیزده اصلی را که برشمردیم تقریباً برای همهٔ کارهای قبلیمان کافی هستند؛ البته اثبات جزئیات (طبق معمول) قدری پیچیده و کسالت‌آور است. با این وجود، برخی از مسائل مربوط به‌فصل اعداد اصلی نیاز به‌اصول موضوع ظریفتر دیگری هم دارند.

اصل موضوع انتخاب

در قضیهٔ ۱ از فصل ۱۲ از استدلالی استفاده کردیم که عضوی چون x_1 از یك مجموعهٔ B انتخاب شد، سپس x_2 از $B - \{x_1\}$، ...، و به‌طور کلی عضوی چون x_{n+1} از $B - \{x_1, \ldots, x_n\}$. اگرچه این استدلال مانند یك استدلال بازگشتی به نظر می‌رسد، ولی در قضیهٔ ۲ فصل ۸ نمی‌گنجد، زیرا x_{n+1} به‌دلخواه انتخاب می‌شود و نه برحسب تابع مشخص از قبل تعیین شده‌ای. اجمالاً اینکه، این روش ازما می‌خواهد «بینهایت انتخاب دلخواه» انجام بدهیم. می‌توان ثابت کرد (البته نه به‌آسانی) که فهرست اصول موضوع ارائه شده تا اینجا برای توجیه این مطلب کافی نیست. بنابراین اصل موضوع دیگری را هم بیان می‌کنیم:

(م ۱۴) اصل موضوع انتخاب. اگر $\{x_\alpha\}_{\alpha \in a}$ خانوادهٔ اندیس شده‌ای ازمجموعه‌ها (با مجموعهٔ اندیسی چون a) باشد آنگاه تابعی چون f وجود دارد که:

$$f : a \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in a} x_\alpha$$

و

$$\text{به‌ازای هر } \alpha \in a, \quad f(\alpha) \in x_\alpha.$$

به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر $\alpha \in a$، f عضوی از x_α را «برمی‌گزیند». کلاً درك شهودی این اصل دشوار، ولی امروزه علت بیانش قابل فهم است. نه صادق بودنش اصول (م ۱)–(م ۱۳) را نقض می‌کند و نه کاذب بودنش (همان‌طور که نه صادق بودن و نه کاذب بودن قانون جابه‌جایی، متناقض اصول موضوع تعریف گروه است: هم گروههای جابه‌جایی وجود دارند و هم گروههای غیرجابه‌جایی). واقعیت اول را کورت گودل درسال ۱۹۴۰ اثبات

کرد، و واقعیت دوم را (مسئله‌ای که مدتها لاینحل بود) پال کهن[1] در ۱۹۶۳. ازاین‌رو در ریاضیات معمول است که درصورت استفاده ازاصل موضوع انتخاب به‌آن اشاره شود، حال آنکه به‌طور معمول ازاصول موضوع عادی (م ۱)–(م ۱۳) ذکری به میان نیاید.

با پذیرفتن اصل موضوع انتخاب می‌توانیم یك سر سست بحث را محکم کنیم. این اصل نتیجه می‌دهد که به‌ازای هر دومجموعهٔ x و y، یا داریم $|x| \leqslant |y|$ یا $|y| \leqslant |x|$. (برای اثبات آن به صفحهٔ ۱۹۸ کتاب مندلسن [۱۰] رجوع شود.)

فرض پیوستار که هیچ عدد اصلی نامتناهی بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ وجود ندارد نیز همین‌طور است: نه صادق بودنش (م ۱)–(م ۱۳)، یا حتی (م ۱)–(م ۱۴)، را نقض می‌کند و نه کاذب بودنش. اثبات این حقایق نیز کار گودل وکهن است. شاید شگفت‌آور باشد که جواب مسئله‌ای به این صراحت این‌قدر نامشخص باشد؛ ولی نشان می‌دهد که این مسائل چه‌اندازه ظریف هستند.

گاه‌گاه اصول موضوع دیگری هم پیشنهاد شده‌اند؛ و امروزه بسیاری از روابط موجود بین آنها هم کاملاً قابل درك‌اند. وما خواننده را به کتابهای تخصصی‌تری ارجاع می‌دهیم.

سازگاری

حال، آخرین مسئله را که باید با آن مواجه شویم مورد بحث قرار می‌دهیم. پس از پذیرفتن اصول موضوع، چطور می‌دانیم که هیچ پارادوکسی رخ نمی‌دهد؟ یقیناً چنین به‌نظر می‌رسد که از آنها اجتناب کرده‌ایم (مثلاً، تاکنون هیچ‌کس نتوانسته است حتی یك پارادوکس هم پیدا کند)، ولی چطور می‌توانیم مطمئن باشیم که هیچ تناقضی ازنظر مخفی نمانده است؟ دراین زمان جوابی قطعی ونهایی برای این مطلب وجود دارد. متأسفانه، جواب این است: هرگز نمی‌توانیم مطمئن باشیم.

برای توضیح این مطلب باید به عصر دیوید هیلبرت بازگردیم. دستگاهی از اصول موضوع را سازگار می‌خوانیم اگر به تناقض منجر نشود. هیلبرت می‌خواست ثابت کند که اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار هستند.

اثبات این‌مطلب برای برخی از دستگاههای اصول موضوع آسان است. اگر بتوانیم الگویی برای آن اصول پیدا کنیم؛ یعنی، دستگاهی پیدا کنیم که این اصول را ارضا کند، آنگاه این اصول باید سازگار باشند (درغیر این صورت الگو نمی‌تواند وجود داشته باشد). اشکال این است که استفاده ازچه موادی را برای ساختن الگو مجاز بدانیم؟ عموماً براین نکته اتفاق‌نظر دارند که ازیك الگوی متناهی نباید صرفنظر کرد، زیرا هرحکم درمورد آن‌را، اصولاً در زمانی محدود می‌توان بررسی کرد. اما، به‌عنوان مثال، اصل موضوع بینهایت به‌این معنی است که نمی‌توان یك الگوی متناهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها پیدا کرد. ایدهٔ هیلبرت این بود که چیزی با قیدکمتر هم کافی است. وی آن چیز را فرایند

1. Cohen

تصمیم می‌خواند. این، به اصطلاح، یك برنامهٔ کامپیوتری متناهی است که وقتی با فرمولی از نظریهٔ مجموعه‌ها تغذیه شود، فرایندی را به‌کار می‌برد و تصمیم می‌گیرد که آن فرمول صادق است یا نه (نظیر روش جدول درستی برای قضیه‌ها). اگر بتوانیم چنین برنامه‌ای را پیدا کنیم، و ثابت نماییم که همیشه مؤثر است، آنگاه می‌توانیم به‌آن معادلهٔ

$$0 \neq 0$$

را بخورانیم و ببینیم پاسخ چیست. اگر جواب «صادق» باشد آنگاه اصول موضوع باید ناسازگار باشند، زیرا می‌توانیم نشان دهیم که هر تناقضی حکم فوق را ایجاب می‌کند (با کمك تناقض از استدلالی خالی استفاده کنید: دریك دستگاه ناسازگار هرحکمی صادق است!). برای مدتی چنین تصور می‌شد که ایدهٔ هیلبرت ممکن است مؤثر باشد.

آنگاه کورت گودل، با اثبات دوقضیه، همهٔ امیدها را برباد داد. قضیهٔ اول اینکه در نظریهٔ مجموعه‌ها قضیه‌های صادقی وجود دارند که نه اثباتی برای آنها وجود دارد و نه تکذیبی. دوم اینکه: اگر نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار هم باشد، هیچ فرایند تصمیمی وجود ندارد که سازگاری آن را اثبات کند.

اثبات قضیه‌های گودل بسیار فنی هستند: رئوس این اثباتها درصفحات ۲۹۴–۲۹۵ کتاب استیوارت [۱۵] داده شده‌اند. ولی این قضیه‌ها امید هیلبرت برای اثبات سازگاری کامل را به‌یأس مبدل می‌سازند.

آیا، با این همه، این به این معنی است که جستجو برای منطقی دقیقتر در ریاضیات عبث است؟ اگر قرار باشد که سرانجام کل مطلب درهوا معلق بماند، به‌نظر دربدو امر هم به زحمتش نمی‌ارزد. این مؤکداً نتیجه‌ای نیست که باید اتخاذ شود. بدون جستجوی صحیحی برای دقت، هرگز قضیه‌های گودل حاصل نمی‌شدند. کاری را که این قضیه‌ها انجام می‌دهند آشکارساختن مسائل معینی است که جزء لاینفك خود روش اصل موضوعی هستند. آنها روش اصل موضوعی را باطل جلوه نمی‌دهند: برعکس، روش اصل موضوعی چارچوب مناسبی برای کل ریاضیات جدید، و الهامی برای توسعهٔ ایده‌های نو، ارائه می‌دهد. ولی با توجه به‌قضیه‌های گودل می‌توانیم ازاین خیال باطل که هرچیزی بی‌نقص است اجتناب کنیم، و محدودیتها و همچنین توانایی‌های روش اصل موضوعی را بهتر درك نماییم.

تمرین

۱. نشان دهید از اصل موضوع انتخاب نتیجه می‌شود که اگر $f : A \to B$ پوشا باشد، آنگاه $|A| \geqslant |B|$. برعکس، براساس اصول موضوع دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها، ثابت کنید که حکم دوم، اصل موضوع انتخاب را ایجاب می‌کند.

۲. اگر دسته‌ای از مجموعه‌ها چون $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ اندیس‌شده با مجموعه‌ای مانند A مفروض باشد،

حاصلضرب دکارتی آنها با مجموعهٔ همهٔ توابعی چون $f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ که $f(\alpha) \in X_\alpha$ تعریف می‌شود. نشان دهید که به‌ازای $A = \{1, 2, \ldots, n\}$، این تعریف متناظر تعریف معمولی $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ است.

ثابت کنید که اصل موضوع انتخاب معادل این حکم است که هرحاصلضرب دکارتی مجموعه‌های غیرتهی، خود غیرتهی است.

۳. نشان دهید که دراثبات قضیهٔ ۱ ازفصل ۱۲ نوعی انتخاب به‌کار می‌رود. آن‌انتخاب را برحسب تابعی ازیك مجموعه از زیرمجموعه‌های B به B بیان کنید. آیا دراین مورد لازم است که همهٔ زیرمجموعه‌های B، درانتخاب شرکت داده شوند؟

۴. گمان گلدباخ (تمرین ۱۳ درآخر فصل ۸) راکه بیان می‌کند هرعدد صحیح زوج مجموع دوعدد اول است، مجدداً مورد بررسی قرار دهید. تعداد دلخواهی از حالات این گمان را بررسی کنید وببینید آیا هیچ الگویی برای اعداد اولی که ظاهر می‌شوند وجود دارد. خود را متقاعد کنید که گمان گلدباخ می‌تواند صادق باشد ولی اثباتی که همهٔ موارد را دربرگیرد وجود ندارد. ازطرف دیگر، همیشه این امکان وجود دارد که گمان گلدباخ به‌ازای عدد صحیح بسیار بزرگی که هنوز ما آن را پیدا نکرده‌ایم، کاذب باشد.

۵. اگر گزاره‌نمای معتبری چون $P(n)$ به‌ازای هر n در $\mathbb{N}$، چنان باشد که برای هر $P(n)$ طبق مندرجات درفصل ۶ اثباتی با تعدادی متناهی سطر وجود داشته باشد، آیا عاقلانه است انتظار داشته باشیم که اثباتی به همین معنی برای

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

هم وجود داشته باشد؟

۶. پیشگفتار ومقدمهٔ هریك ازچهارقسمتی که کتاب را تشکیل می‌دهند مطالعه کنید. حال تمرینهای انتهای فصل یك را مرور کنید. اگر هنوز هم حلهای مکتوبی را که برای بار اول، فصل یك را می‌خواندید دارید، چه خوب. اگر این کتاب به مقصود خود رسیده باشد، نظرتان درمورد بسیاری ازاین مباحث عوض شده وبه‌کمال رسیده است. اکنون در موقعیتی هستید که نوع تفکر مورد استفاده در ریاضیات پیشرفته‌تر را بهتر درك می‌کنید، ضمناً ایده‌هایی، درمورد نوع مسائل موجود درمبانی ریاضیات که ارزش مطالعهٔ بیشتری دارند، هم به دست آورده‌اید.

منابع

فهرستی از کتابهای برگزیده که برای مطالعهٔ بیشتر مناسب اند (و از جمله کتابهایی که در داخل متن مورد ارجاع قرار گرفته‌اند) در زیر آمده است. کتابهایی که مطالعهٔ آنها به‌معلومات ریاضی اضافی نیاز دارد، با علامت ستاره مشخص شده‌اند.

WE list below a selection of books suitable for further reading (and including those referred to in the text). Those which require extra mathematical background are marked with an asterisk.

1.* ARTIN, E. (1959). *Galois theory*. Notre Dame, Indiana.
2. CLAPHAM, C. R. J. (1969). *Introduction to abstract algebra*. Routledge & Kegan Paul.
3. COXETER. H. S. M. (1961) *Introduction to geometry*. Wiley.
4. FOWLER, D. H. (1973). *Introducing real analysis*. Transworld Student Library.
5. GREEN, J. A. (1965). *Sets and groups*. Routledge & Kegan Paul.
6. —— (1958). *Sequences and series*. Routledge & Kegan Paul.
7. HALMOS, P. R. (1960). *Naive set theory*. Van Nostrand.
8. HILTON, P. J. and GRIFFITHS, H. B. (1970). *A comprehensive textbook of classical mathematics: a contemporary interpretation*. Van Nostrand Reinhold.
9. KLINE, M. (1969). *Mathematics in the modern world: readings from Scientific American*. Freeman.
10.* MENDELSON, E. (1964). *Introduction to mathematical logic*. Van Nostrand.
11. MUNKRES, J. R. (1964). *Elementary linear algebra*. Addison-Wesley.
12. NAGEL, E. and NEWMAN, J. R. (1958). *Gödel's proof*. Routledge & Kegan Paul.
13. SKEMP, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penguin.
14. SPIVAK, M. (1967). *Calculus*. Benjamin.
15. STEWART, I. N. (1975). *Concepts of modern mathematics*. Penguin.
16.* —— (1973). *Galois theory*. Chapman & Hall.

اسامی خاص

Artin, Emil	آرتین، امیل، ۲۵۴
Argand, Jean Robert	آرگان، ژان روبر، ۶–۲۳۵
Archimedes	ارشمیدس، ۲۷
Skemp, R. R.	اسکمپ، آر. آر، ۱۲
Stewart, Ian	استیوارت، ایان، ۲۵۴، ۲۹۰
Euclid	اقلیدس، ۱۵۳، ۱۸۴
Einstein, Albert	انیشتاین، آلبرت، ۲۵۰
Euler, Leonhard	اویلر، لئونهارد، ۲۳۵
Bernstein, Sergej Natanovic	برنشتاین، سرگی ناتانوویچ، ۲۶۹
Bernays, Paul	برنیز، پال، ۲۸۵
Peano, Guiseppe	پئانو، جوزپه، ۱۶۳
De Morgan, Augustus	دمورگان، اوگاستس، ۶۴
Russell, Bertrand	راسل، برتراند، ۲۸۴
Schröder, Ernst	شرودر، ارنست، ۲۶۹
Von Newmann, John	فون نویمان، جان، ۸۰–۱۷۷، ۲۸۵، ۲۸۸
Fibonacci, Leonardo	فیبوناتچی، لئوناردو، ۱۸۸
Pythagoras	فیثاغورث، ۲۱
Cantor, George	کانتور، گئورگ، ۲–۲۶۱

Cauchy, Augustin Louis	کشی، اوگوستن لویی، ۲۵۵
Clapham, C. R.	کلافام، سی. آر. ، ۲۵۴
Kuratowski, K.	کوراتوفسکی، ک، ۷۱، ۱۱۴، ۲۸۷
Cohen, Paul	کهن، پال، ۲۸۹
Galilei, Galileo	گالیله، گالیلیو، ۳–۲۶۰
Gauss, Carl Friedrich	گاوس، کارل فریدریش، ۲۳۶
Goldbach, Christian	گلدباخ، کریستین، ۱۹۱، ۲۹۱
Gödel, Kurt	گودل، کورت، ۲۸۵، ۹۰–۲۸۸
Leibniz, Gottfried Wilhelm	لایبنیتز، گوتفرید ویلهلم، ۱۱
Littlewood, J. E.	لیتل‌وود، جی. ای. ، ۷
Mendelson, Elliott	مندلسن، الیوت، ۲۸۴
Wessell, K.	وسل، ک، ۲۳۶
Venn, John	ون، جان ۵۹
Hamilton, William	همیلتون، ویلیام، ۲۳۳، ۲۳۶، ۷–۲۴۳
Hilbert, David	هیلبرت، دیوید، ۲۸۴، ۲۹۰

فهرست نمادها

معنی	صفحه	نمادها
مجموعهٔ توابع از B به A	۲۷۲	A^B
a و b توسط R در رابطه هستند	۷۷	aRb
ردهٔ هم‌ارزی x	۸۰، ۸۲	E_x
مجموعهٔ کسرها	۱۹	$\mathcal{F}$
مجموعهٔ چهارگانها	۲۴۵	$\mathbb{H}$
تابع همانی (روی A)	۱۰۱	i_A
حد دنبالهٔ (a_n) برابر l است	۳۵	$\lim a_n = l$
مجموعهٔ اعداد طبیعی	۱۹	$\mathcal{N}$
مجموعهٔ (صوری) اعداد طبیعی	۱۶۳	$\mathbb{N}$
مجموعهٔ (صوری) اعداد طبیعی با صفر	۱۶۳	$\mathbb{N}_0$
مجموعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا n	۱۷۶	$\mathbb{N}(n)$
مجموعهٔ توانی X	۶۵	$\mathbb{P}(X)$
مجموعهٔ اعداد گویا	۲۰	$\mathcal{Q}$
مجموعهٔ اعداد گویای غیرصفر	۱۱۴	$\mathcal{Q}^*$
مجموعهٔ (صوری) اعداد گویا	۱۹۵	$\mathbb{Q}$
مجموعهٔ اعداد حقیقی	۲۶	$\mathcal{R}$
مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت	۱۱۰	$\mathcal{R}$
مجموعهٔ (صوری) اعداد حقیقی	۱۹۵	$\mathbb{R}$
مجموعهٔ اعداد صحیح	۲۰	$\mathcal{Z}$
مجموعهٔ اعداد صحیح فرد	۷۹	$\mathcal{Z}_{\text{فرد}}$
مجموعهٔ اعداد صحیح زوج	۷۹	$\mathcal{Z}_{\text{زوج}}$

مجموعهٔ رده‌های همنهشتی به‌پیمانهٔ n	۸۶، ۲۱۶	$\mathbb{Z}_n$
مجموعهٔ (صوری) اعداد صحیح	۱۹۵، ۲۰۰	$\mathbb{Z}$
نمایش تابع فی	۱۶۵	φ
مجموعهٔ جامع	۵۵	Ω
آلف (حروف اول عبری)	۲۶۰	$\aleph$
آلف صفر	۲۶۰	$\aleph_0$
مجموعهٔ تهی (از حروف دانمارکی)	۱۴، ۵–۵۴	$\varnothing$
دنباله	۳۱	(a_n)
قدرمطلق x	۳۳، ۲۳۹، ۲۴۶	$\lvert x\rvert$
تعداد اعضای A	۶۷	$\lvert A\rvert$
عدد اصلی X	۲۶۲	$\lvert X\rvert$
S مجموعه‌ای است با اعضای ۱، ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، و ۶.	۴۹	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
مجموعهٔ xهایی که ...	۵۰	$\{x\mid \dots\}$
مجموعهٔ همهٔ xهایی از Y که ...	۵۱	$\{x\in Y\mid \dots\}$
زوج مرتب	۷۰، ۷۱	(x, y)
nتایی مرتب	۷۶	$(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$
حاصلضرب دکارتی A و B	۷۰	$A\times B$
تفاضل B از A	۳–۶۲	$A-B$
اجتماع A و B	۵۷	$A\cup B$
اشتراک A و B	۵۷	$A\cap B$
متمم B	۶۳	B^c
اجتماع خانوادهٔ اندیس‌دار ازمجموعه‌ها	۶۶، ۱۱۶	$\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$
اشتراک خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها	۶۶، ۱۱۶	$\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha$
x متعلق است به S	۱۹، ۴۸	$x\in S$
x متعلق نیست به S	۴۸	$x\notin S$
B زیرمجموعه‌ای است از A	۲۰، ۵۳	$B\subseteq A$
B زیرمجموعهٔ سره‌ای است از A	۵۳	$B\subsetneq A$
مجموعهٔ S برابر است با مجموعهٔ T	۴۸	$S=T$
مجموعهٔ S برابر نیست با مجموعهٔ T	۴۸	$S\neq T$
فاصلهٔ بسته	۲۷۸	$[a, b]$
a مقسوم‌علیهی است از b	۷۸	$a\mid b$
x همنهشت y است به‌پیمانهٔ n	۸۳، ۸۶	$x\equiv_n y$

نامساویها	۹۵–۸۷	$\leqslant, <, \geqslant, >$
f تابعی است از A به B	۹۵–۶	$f: A \to B$
(تابع) نگارهٔ X تحت f	۱۱۸	$\hat{f}(X)$
(تابع) نگارهٔ عکس Y تحت f	۱۱۸	$\tilde{f}(Y)$
ترکیب f با g	۱۰۷	$g \circ f$
وارون f	۱۱۱	f^{-1}
تحدید f به X	۱۱۲	$f\|_X$
مقدار f در x	۹۴	$f(x)$
برد f	۹۸	$f(A)$
چنین نیست که P	۱۲۳، ۱۲۹	$\neg P$
به‌ازای هر x	۱۲۶	$\forall x$
وجود دارد یك x	۱۲۶	$\exists x$
P یا Q	۱۳۱	$P \vee Q$
P و Q	۱۳۱	$P \& Q$
P یا Q (ولی نه هردو)	۱۳۳	$P \veebar Q$
اگر P آنگاه Q	۱۳۱	$P \Rightarrow Q$
P اگر و فقط اگر Q	۱۳۱	$P \Leftrightarrow Q$
S_1 معادل منطقی است با S_2	۱۳۹	$S_1 \equiv S_2$

واژه‌نامهٔ انگلیسی به‌فارسی

abelian group	گروه آبلی
absolute value [→ modulus]	قدرمطلق
addition	جمع
algorithm	الگوریتم
Archimedes' condition	شرط ارشمیدس
arithmetic	حساب
—modulo n	حساب به پیمانهٔ n
—of decimals	حساب اعداد اعشاری
associative	شرکت‌پذیر
automorphism	خودریختی
axiom	اصل موضوع
—of choice	اصل موضوع انتخاب
—of infinity	اصل موضوع بینهایت
—s of real numbers	اصول موضوع اعداد حقیقی
axiomatic system	دستگاه اصل موضوعی
bijection	دوسویی
binary operation	عمل دوتایی
bounded	کراندار
cardinal arithemetic	حساب اعداد اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cartesian product	حاصلضرب دکارتی

class	کلاس [← رده]
codomain	همدامنه
collection	دسته
commutative	جابه‌جایی
complement	متمم
complete ordered field	میدان مرتب کامل
completeness axiom	اصل کمال
complex number	عدد مختلط
complex quaternion	چهارگان مختلط
composition	ترکیب
compound	مرکب
concept formation	تشکل مفهوم
congruence	همنهشتی
—class	ردهٔ همنهشتی
—modulo n	همنهشتی به‌پیمانهٔ n
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
—of a complex number	مزدوج یك عدد مختلط
connective	رابط
consistency	سازگاری
contextual technique	تکنیك ضمنی
continuum hypothesis	فرض پیوستار
contradiction	تناقض
contrapositive	عکس نقیض
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
coprime	متباین
corollary	نتیجه
countable set	مجموعهٔ شمارش‌پذیر
counting	شمارش
decimal expansion	بسط اعشاری
decreasing	نزولی
deduction	استنتاج
definition	تعریف

difference	تفاضل
disjoint	مجزا
distributive	پخشی
divergent	واگرا
division	تقسیم [← بخش]
—algorithm	الگوریتم تقسیم
—ring	حلقهٔ بخشی
divisor [→ factor]	مقسوم‌علیه [← عامل]
domain	دامنه
Egyptian addition	جمع مصری
element [→ member]	عنصر [← عضو]
empty [→ null]	تهی [← پوچ]
—set	مجموعهٔ تهی
equation	معادله
equivalence	هم‌ارزی [← تعادل]
—class	ردهٔ هم‌ارزی
—relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Euclidean algorithm	الگوریتم اقلیدسی
existential quantifier	سور وجودی
extensionality	توسیع‌پذیری
factor [→ divisor]	عامل [← مقسوم‌علیه]
family	خانواده
field	میدان
finite	متناهی [← با پایان]
formal	صوری
formalization	صورتگرایی
fraction	کسر
function	تابع
—of several variables	تابع چند متغیره
general Principle of induction	اصل عمومی استقرا
graph	نمودار
greatest element	بزرگترین عضو
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین

group	گروه
highest [→ greatest]	بزرگترین
—common factor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك
hypercomplex number	عدد فوق‌مختلط
hypothesis	فرض
identity	همانی
—element	عضوهمانی
—function	تابع همانی
if and only if	اگر و فقط اگر
image [→ range]	نگاره [← برد]
implication	استلزام
inclusion	شمولی
—function	تابع شمولی
increasing	صعودی
index set	مجموعهٔ اندیس
indexed family of sets	خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها
induction	استقرا
—axiom	اصل موضوع استقرا
—hypothesis	فرض استقرا
inductive set	مجموعهٔ استقرایی
infinite	نامتناهی [← بی‌پایان]
injection [→ one to one]	تك‌گزین [← یك به‌یك]
integer	عدد صحیح
intersection	اشتراك
inverse	وارون
irrational number	عدد گنگ
isomorphism	یکریختی
least upper bound	کوچکترین کران بالا
lemma	لم
limit	حد
logical equivalence	معادل منطقی
lower bound	کران پایین

map [→ mapping]	نگاشت
mapping [→ map]	نگاشت
mathematical induction	استقرای ریاضی
member [→ element]	عضو [← عنصر]
membership	عضویت
model	الگو
modifier	ناقض
module	مدول
modulo	پیمانه
modulus [→ absolute value]	قدرمطلق [← پیمانه]
monoid	تکواره
n-tuple	nتایی
natural number	عدد طبیعی
negation	نقیض
null	پوچ [← تهی]
—set	مجموعهٔ تهی
number	عدد
—systems	دستگاههای اعداد
one to one [→ injection]	یك به‌یك
onto [→ surjection]	پوشا
order	ترتیب
—isomorphism	یکریختی ترتیبی
—relation	رابطهٔ ترتیبی
—ordered pair	زوج مرتب
partial order	ترتیب جزئی
partially ordered set	مجموعهٔ به‌طور جزئی مرتب
partition	افراز
place-value	ارزش مکانی
power set	مجموعهٔ توانی
predicate	گزاره‌نما [منطق]، خبر [فارسی]
prime	اول
—factorization	تجزیه به‌عوامل اول

—number	عدد اول
principle of duality	اصل دوگانی
proof	اثبات
—by induction	اثبات به‌روش استقرا
—by the contrapositive	اثبات با عکس نقیض
proper	سره [← واقعی]
—factor	عامل [مقسوم‌علیه] واقعی
—subset	زیرمجموعهٔ سره
proposition [→ theorem]	حکم [← قضیه]
quantifier	سور
quaternion	چهارگان
quotient	خارج قسمت
range [→ image]	برد [← نگاره]
rational	گویا
—function	تابع گویا
—number	عدد گویا
real	حقیقی
—line	خط حقیقی
—number	عدد حقیقی
recursion theorem	قضیهٔ بازگشتی
reflexive	انعکاسی
relation	رابطه
replacement axiom	اصل جایگزینی
restriction	تحدید
ring	حلقه
rule of inference	قاعدهٔ استنباط
schema	طرح
semigroup	نیم‌گروه
sequence	دنباله
set of sets	مجموعه‌ای از مجموعه‌ها
singleton	مجموعهٔ تک عضوی
statement	گزاره

strict	اکید
—order	ترتیب اکید
—relation	رابطهٔ ترتیبی اکید
subfield	زیرمیدان
subgroup	زیرگروه
subring	زیرحلقه
subset	زیرمجموعه
successor	تالی
—set	مجموعهٔ تالی
surjection [→ onto]	پوشا
symmetric	متقارن
—difference	تفاضل متقارن
tautology	توتولوژی
theorem [→ propsition]	قضیه
transcendental number	عدد متعالی [← عدد غیرجبری]
transitive	متعدی
triangle inequality	نامساوی مثلثی
trichotomy law	قانون سه‌گانگی
truth	ارزش [← درستی]
—function	تابع ارزش
—table	جدول ارزش
—value	ارزش درستی
uncounltable	شمارش ناپذیر
union	اجتماع
unity	یکه
universal set	مجموعهٔ جامع
universal quantifier	سورعمومی
universe of discourse	عالم سخن
upper bound	کران بالا
vacuous reasoning	برهان به‌انتفای مقدم
vector space	فضای برداری
venn diagram	دیاگرام ون

weak order relation	رابطهٔ ترتیبی ضعیف
well defined	خوش تعریف
well ordered	خوش ترتیب
well ordering principle	اصل خوش ترتیبی
zero divisor	مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آبلی	abelian
اثبات	proof
ــ با برهان خلف	proof by contradiction
ــ با عکس نقیض	proof by the contrapositive
ــ به‌روش استقرا	proof by induction
ارزش [← درستی]	truth
ــ درستی	truth value
ــ مکانی	place-value
استقرا	induction
ــ ی ریاضی	mathematical induction
استلزام	implication
استنتاج	deduction
اشتراك	intersection
اصل	principle
ــ خوش‌ترتیبی	well ordering principle
ــ دوگانی	principle of duality
ــ عمومی استقرا	general principle of induction
اصل موضوع	axiom
ــ استقرا	induction axiom
ــ انتخاب	axiom of choice
ــ بینهایت	axiom of infinity
ــ کمال	completeness axiom

axioms	اصول موضوع
axioms of real numbers	ـ اعداد حقیقی
peano axioms	ـ پئانو
decimal	اعشاری
partition	افراز
if and only if	اگر و فقط اگر
algorithm	الگوریتم
Euclidean algorithm	ـ اقلیدسی
division algorithm	ـ تقسیم
n-tuple	nتایی
index	اندیس
finite	با پایان [← متناهی]
recursion	بازگشتی
division	بخش [← تقسیم]
range [→ image]	برد [← نگاره]
vector	بردار
vacuous reasoning	برهان به‌انتفای مقدم
greatest [→ highest]	بزرگترین
greatest element	ـ عضو
greatest lower bound	ـ کران پایین
highest common factor	ـ مقسوم‌علیه مشترك
decimal expansion	بسط اعشاری
infinite	بی‌پایان [← نامتناهی]
distributive	پخشی
surjection [→ onto]	پوشا
modulo	پیمانه
function	تابع
truth function	ـ ارزش
function of several variables	ـ چند متغیره
inclusion function	ـ شمولی
rational function	ـ گویا
identity function	ـ همانی
successor	تالی

prime factorization	تجزیه به‌عوامل اول
restriction	تحدید
order	ترتیب
partial order	ــ جزئی
composition	ترکیب
concept formation	تشکل مفهوم
definition	تعریف
definition by induction	ــ به‌استقرا
difference	تفاضل
symetric difference	ــ متقارن
division	تقسیم [← بخش]
injection [→ one to one]	تك‌گزین [← یك به‌یك]
contextual technique	تکنیك ضمنی
monoid	تکواره
contradiction	تناقض
tautology	توتولوژی
extensionality	توسیع پذیری
empty [→ null]	تهی [← پوچ]
commutative	جابه‌جایی
truth table	جدول ارزش
egyptian addition	جمع مصری
quaternion	چهارگان
complex quaternion	ــ مختلط
product	حاصلضرب
cartesian product	ــ دکارتی
limit	حد
arithmetic	حساب
cardinal arithmetic	ــ اعداد اصلی
arithmetic of decimals	ــ اعداد اعشاری
arithmetic modulo n	ــ به‌پیمانهٔ n
ring	حلقه
division ring	ــ بخشی

quotient	خارج قسمت
family	خانواده
indexed family of sets	ـ اندیس‌دار از مجموعه‌ها
real line	خط حقیقی
automorphism	خودریختی
well ordered	خوش‌ترتیب
well defined	خوش‌تعریف
domain	دامنه
truth	درستی [← ارزش]
axiomatic system	دستگاه اصل موضوعی
number systems	دستگاههای اعداد
collection	دسته
sequence	دنباله
null sequence	ـ پوچ
binary	دوتایی
bijection	دوسویی
diagram	دیاگرام
venn diagram	ـ ون
connective	رابط
relation	رابطه
strict order relation	ـ ترتیبی
order relation	ـ اکید
weak order relation	ـ ضعیف
equivalence relation	ـ هم‌ارزی
equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
congruence class	ردهٔ همنهشتی
ordered pair	زوج مرتب
subring	زیرحلقه
subgroup	زیرگروه
subset	زیرمجموعه
subfield	زیرمیدان
consistency	سازگاری
quantifier	سور

universal quantifier	ـ عمومی
existential quantifier	ـ وجودی
archimedes' condition	شرط ارشمیدس
associative	شرکت‌پذیر
counting	شمارش
countable	ـ پذیر
uncountable	ـ ناپذیر
increasing	صعودی
formal	صوری
schema	طرح
universe of discourse	عالم سخن
factor	عامل [← مقسوم‌علیه]
number	عدد
cardinal number	ـ اصلی
prime number	ـ اول
real number	ـ حقیقی
integer number	ـ صحیح
natural number	ـ طبیعی
hyper complex number	ـ فوق مختلط
irrational number	ـ گنگ
rational number	ـ گویا
transcendental number	ـ متعالی
complex number	ـ مختلط
member [→ element]	عضو [← عنصر]
identity element	ـ همانی
membership	عضویت
contrapositive	عکس نقیض
binary operation	عمل دوتایی
element [→ member]	عنصر [← عضو]
hypothesis	فرض
induction hypothesis	ـ استقرا

continuum hypothesis	ـ پیوستار
vector space	فضای برداری
rule of inference	قاعدهٔ استنباط
trichotomy law	قانون سه‌گانگی
absolute value [→ modulus]	قدرمطلق [← پیمانه]
theorem [→ proposition]	قضیه
recursion theorem	ـ بازگشتی
lower bound	کران پایین
bounded	کراندار
fraction	کسر
class	کلاس [← رده]
completeness	کمال
least upper bound	کوچکترین کران بالا
group	گروه
statement	گزاره
predicate	گزاره‌نما [منطق]، خبر [فارسی]
rational	گویا
lemma	لم
coprime	متباین
transitive	متعدی
symetric	متقارن
complement	متمم
finite	متناهی [← با پایان]
set	مجموعه
set of sets	ـ ای از مجموعه‌ها
inductive set	ـ استقرایی
index set	ـ اندیس
partially ordered set	ـ به‌طور جزئی مرتب
successor set	ـ تالی
singleton set	ـ تك عضوی
power set	ـ توانی

empty set [→ null set]	ـ تهی
universal set	ـ جامع
countable set	ـ شمارش‌پذیر
module	مدول
compound	مرکب
conjugate	مزدوج
equivalence	معادل [← هم‌ارزی]
logical equivalence	ـ منطقی
equation	معادله
divisor [→ factor]	مقسوم‌علیه [← عامل]
zero divisor	ـ صفر
field	میدان
ordered field	ـ مرتب
complete ordered field	ـ کامل
modifier	ناقض
infinite	نامتناهی
triangle inequality	نامساوی مثلثی
corollary	نتیجه
decreasing	نزولی
negation	نقیض
image [→ range]	نگاره [← برد]
map [→ mapping]	نگاشت
semigroup	نیم‌گروه
inverse	وارون
divergent	واگرا
identity	همانی
codomain	همدامنه
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
congruent	همنهشت
congruence	همنهشتی
congruence modulo n	ـ به‌پیمانهٔ n

one to one	یك به‌یك
isomorphism	یکریختی
order isomorphism	ـ ترتیبی
unity	یکه

فهرست راهنما

آبلی [← جابه‌جایی]، ۲۴۸
گروه‌ـ، ۲۴۸
آرتین، ا، ۲۵۴، ۲۹۲
آرگان، ج. ر، ۶–۲۳۵

اثبات، ۱۴۲، ۱۵۰
ـ با برهان خلف، ۱۴۰، ۱۴۴
ـ با عکس نقیض، ۱۴۰، ۱۴۴
ـ به‌روش استقرا، ۱۶۱، ۱۶۴، ۱۸۰
اجتماع، ۵۶، ۱۱۶، ۲۸۷
ارزش، ۱۲۳
تابع‌ـ، ۱۲۴
جدول‌ـ، ۱۲۹
ـ درست، ۱۲۳
ـ درستی، ۱۲۳
ـ مکانی، ۱۸
ـ نادرست، ۱۲۳
ارشمیدس، شرط‌ـ، ۲۷
استقرا، ۱۶۱، ۱۶۴، ۱۸۰
اصل عمومی‌ـ، ۱۸۰
اصل موضوع‌ـ، ۱۶۴
تعریف به‌ـ، ۱۶۲
فرض‌ـ، ۱۶۴
مرحلهٔ‌ـ، ۱۶۴
استلزام، ۱۳۲
استنباط، قاعدهٔ‌ـ، ۱۴۱
استنتاج، ۱۴۰
استیوارت، ا، ۲۵۴، ۲۹۰
اسکمپ، آر.آر، ۱۲
اشتراک، ۵۶، ۵۷، ۱۱۶، ۲۸۷
اصل
ـ خوش‌ترتیبی، ۱۸۱
ـ دوگانی دمورگان، ۶۴
ـ عمومی استقرا، ۱۸۰
اصل موضوع، ۱۵۴
ـ استقرا، ۱۶۴
ـ انتخاب، ۲۸۸
ـ بینهایت، ۱۷۹، ۲۸۸
ـ کمال، ۳۶، ۱۹۵، ۲۱۰
ـ وجود اعداد طبیعی، ۱۶۳
اصول موضوع،
ـ اعداد حقیقی، ۴–۱۹۳
ـ پئانو، ۱۶۳
اعداد، ۱۷
دستگاههای‌ـ، ۱۷
ـ اصلی، ۶۲–۲۵۹

حساب‌ـ، ۲۷۲
ـ اعشاری، ۶ـ۲۲
حساب‌ـ، ۳۰
ـ حقیقی، ۲۱، ۲۸، ۱۹۳، ۲۰۴
اصول موضوع‌ـ، ۴ـ۱۹۳
دنبالهٔ‌ـ، ۳۱
ساختن‌ـ، ۲۰۴
ـ صحیح، ۱۹، ۱۹۹
ساختن‌ـ، ۱۹۹ـ۲۰۲
ـ طبیعی، ۱۷، ۱۶۱
ـ فوق مختلط، ۲۴۵
ـ فیبوناچی، ۱۸۸
ـ گویا، ۲۰، ۲۷، ۲۰۲
دنبالهٔ‌ـ، ۲۰۴
ساختن‌ـ، ۲۰۲
ـ مختلط، ۲۳۳
ساختن‌ـ، ۲۳۷
قدرمطلق‌ـ، ۲۳۹
اعشاری، بسط‌ـ، ۲۴ـ۲۷
افراز، ۸۲
اقلیدس، ۱۵۳، ۱۸۴
الگو، ۲۱۵
الگوریتم،
ـ اقلیدسی، ۱۸۴
ـ تقسیم، ۱۸۲
امتحان، سؤالات‌ـ، ۱۵۶
n‌تایی، ۱۱۳
اندیس، مجموعهٔ‌ـ، ۱۱۶
انیشتاین، آ، ۲۵۰
اویلر، ل، ۲۳۵

با پایان [← متناهی]، ۲۶۰
مجموعهٔ‌ـ، ۲۶۰
بازگشتی، قضیهٔ‌ـ، ۱۶۵
برابری مجموعه‌ها، ۴۸
برج هانوی، ۱۸۹
برد [← نگاره]، ۹۸
بردار، فضای ـی، ۲۴۹
برنشتاین، س.ن، ۲۶۹
برنیز، پ، ۲۸۵
بزرگترین،
ـ عضو، ۴۰
ـ کران پایین، ۴۱
ـ مقسوم‌علیه مشترک، ۱۸۳
بسط اعشاری، ۲۴ـ۲۷
بعضی، ۶ـ۱۲۵
بی‌پایان [← نامتناهی]،
مجموعهٔ‌ـ، ۲۶۱

پوشا، تابع‌ـ، ۱۰۰
پئانو، گ، ۱۶۳
اصل موضوع‌ـ، ۱۶۳

تابع، ۹۳، ۹۶
ـ ارزش، ۱۲۴
ـ چند متغیره، ۱۱۴
ـ شمولی، ۱۱۳
ـ گویا، ۲۱۸
ـ وارون، ۱۵۸
ـ همانی، ۱۵۱
تالی، ۱۶۲
تابع‌ـ، ۱۶۲
مجموعهٔ‌ـ، ۱۷۹
تجزیه به‌عوامل اول، ۱۸۵
تحدید
ـ یك تابع، ۱۱۲
ـ یك رابطه، ۷۹
ترتیب

ـ جزئی، ۸۹
رابطهٔ ـی، ۹ـ۸۷، ۱۹۴
ـ اکید، ۸۹
ـ ضعیف، ۸۷
یکریختی ـی، ۱۷۶، ۲۵۱، ۲۲۲
ترسیم عملی، ۲۳
ترکیب، ۱۰۶، ۱۱۵
ـ توابع، ۱۰۶
تشکل مفهوم، ۸
تعریف،
ـ به‌استقرا، ۱۶۴
خوش ـ، ۸۶
تفاضل
ـ متقارن، ۱۳۴
ـ مجموعه‌ای، ۶۲
تفکر ریاضی، ۷
تقسیم [← بخش]، ۱۸۲
الگوریتم ـ، ۱۸۲
تک‌گزین [یك به‌یك]، ۱۰۰
تکنیك ضمنی، ۱۵۳
تکواره، ۲۴۸
تناقض، ۱۳۹، ۱۴۴
توتولوژی، ۱۳۹
توسیع‌پذیری، ۲۸۶
تهی، مجموعهٔ ـ، ۵۴، ۱۷۷، ۲۸۷

جابه‌جایی، ۱۱۵
حلقهٔ ـ، ۲۴۹
گروه ـ، ۲۴۸
جایگزینی، ۲۸۷
جبری، عدد ـ، ۲۸۰
جدول ارزش، ۱۲۹
جمع مصری، ۱۸

چهارگان، ۲۴۳
ـ مختلط، ۲۵۶
مزدوج یك ـ، ۲۴۶

حاصلضرب دکارتی، ۷۰
حد، ـ یك دنباله، ۳۴ـ۳۶، ۲۲۶
حساب،
ـ اعداد اصلی، ۲۷۲
ـ اعداد اعشاری، ۳۰
ـ به‌پیمانهٔ n، ۸۳
حکم [← قضیه]، ۵ـ۱۵۴
حلقه، ۱۹۶، ۲۱۶، ۲۴۹
ـ با یکه، ۱۹۶
ـ بخشی، ۲۴۳
ـ جا به‌جایی، ۲۴۹
ـ مرتب، ۱۹۶
قدرمطلق در یك ـ، ۱۹۹

خارج قسمت، ۲۵
خانوادهٔ اندیس‌دار از مجموعه‌ها، ۱۶
خط حقیقی، ۲۴
خودریختی، ۲۱۹
خوش‌ترتیبی، ۱۸۱
خوش‌تعریف، ۸۶

دامنه، ۹۵، ۲۸۷
درستی [← ارزش]، ۱۲۳
دستگاه اصل موضوعی، ۱۵۴
دستگاههای اعداد، ۱۷
دمورگان، آ، ۶۴
اصل دوگانی ـ، ۶۴
قوانین ـ، ۶۴
دنباله، ۳۱، ۱۱۳
ـ اعداد حقیقی، ۳۱

ـ پوچ، ۲۰۷
ـ صعودی، ۳۶
ـ اعداد گویا، ۲۰۴
ـ کراندار، ۳۶
ـ کشی، ۲۰۵، ۶ـ۲۲۵
ـ نزولی، ۳۸
ـ واگرا، ۳۶
ـ همگرا، ۳۶، ۲۰۵، ۲۲۶
دوتایی، عمل ـ، ۱۱۴
دوسویی، تابع ـ، ۱۰۱
دیاگرام ون، ۵۹

رابط، ۱۳۱
رابطه، ۶۹، ۷۶
تحدید یك ـ، ۷۹
ـ ترتیبی، ۹ـ۸۷، ۱۹۴
ـ اکید، ۸۹
ـ ضعیف، ۸۷
ـ هم‌ارزی، ۷۹، ۸۱
راسل، ب، ۲۸۴
ردهٔ هم‌ارزی، ۸۲
ردهٔ همنهشتی، ۸۳

زمینهٔ شهودی، ۵
زوج مرتب، ۷۰، ۱۱۳، ۲۸۷
زیرحلقه، ۲۲۳
زیرمجموعه، ۵۳، ۲۸۷
ـ سره، ۵۳
زیرمیدان، ۲۲۳

ساختن اعداد
ـ حقیقی، ۲۰۴
ـ اعداد صحیح، ۱۹۹
ـ اعداد گویا، ۲۰۲
ـ اعداد مختلط، ۲۳۷
سازگاری، ۲۸۹
سؤالات امتحان، ۱۵۶
سور، ۱۲۶
ـ عمومی، ۱۲۶
ـ وجودی، ۱۲۶

شرط ارشمیدس، ۲۷
شرکت‌پذیر، ۱۶ـ۱۱۵
شرودر، ا، ۲۶۹
شمارش، ۱۷۶
ـ پذیر، ۲۶۰
ـ ناپذیر، ۲۶۰
شمولی، تابع ـ، ۱۱۳

صورتگرایی، ۴۵

طرح، ۱۰

عالم‌سخن [← مجموعهٔ جامع]، ۶۳
عامل [← مقسوم‌علیه]، ۱۸۳
عدد
ـ اصلی، ۶۲ـ۲۵۹
ـ اول، ۱۸۳
ـ حقیقی، ۲۱، ۲۶، ۱۹۳، ۲۰۴، ۲۱۵
ـ صحیح، ۱۹، ۱۹۹
ـ طبیعی، ۱۷، ۳ـ۱۶۲، ۲۸۸
ـ فوق‌مختلط [← چهارگان]، ۲۴۳
ـ گنگ، ۲۲، ۲۷
ـ گویا، ۲۰، ۲۷، ۲۰۲
ـ متعالی، ۲۸۰
ـ مختلط، ۲۳۳، ۲۳۷
قدرمطلق یك ـ، ۲۳۹
عضو [← عنصر]، ۴۸
ـ همانی، ۸ـ۲۴۷
عضویت، ۲۸۷

عکس نقیض، ۱۴۰، ۱۴۴
عمل دوتایی، ۱۱۴
عنصر [← عضو]، ۴۸

فرض
ـ استقرا، ۱۶۴
ـ پیوستار، ۲۸۹
فرمول گزاره‌ای، ۱۳۶
ـ مرکب، ۱۳۶
فضای برداری، ۲۴۹
فوق مختلط، عدد ـ، ۲۴۵
فون نویمان، ژ، ۸۰–۱۷۸، ۲۸۵، ۲۸۸
فیبوناتچی، ل، ۱۸۸
اعداد ـ، ۱۸۸

قاعدهٔ استنباط، ۱۴۱
قانون سه گانگی، ۸۹
قدرمطلق [← پیمانه]، ۳۲–۳۳، ۱۹۹، ۲۳۹
ـ دریك حلقهٔ مرتب، ۱۹۹
ـ یك چهارگان، ۲۴۶
ـ یك عدد مختلط، ۲۳۹
قضیه [← حکم]، ۵–۱۵۴
ـ بازگشتی، ۱۶۵
ـ شرودر-برنشتاین، ۲۶۹
قوانین دمورگان، ۶۴

میدان مرتب کامل، ۱۹۵، ۲۱۰، ۲۱۵
کانتور، ج، ۲–۲۶۱
کسر، ۱۹
کشی، آ، ۲۰۵
دنبالهٔ ـ، ۲۰۵، ۶–۲۲۵
کمال ـ، ۲۵۷
کران بالا، ۴۱، ۱۹۵
کوچکترین ـ، ۴۱
کران پایین، ۴۱
کراندار، ۳۶
دنبالهٔ ـ، ۳۶
مجموعهٔ ـ، ۴۰
کلاس، ۲۸۵
کلافام، سی. آر، ۲۵۴
کمال، ۳۶، ۱۹۵، ۲۱۰
ـ کشی، ۲۵۷
کوراتوفسکی، ک، ۷۱، ۱۱۴، ۲۸۷
کهن، پ، ۲۸۹

گالیله، گ، ۳–۲۶۰
گروه، ۲۴۷
ـ آبلی، ۲۴۸
گزاره، ۱۲۳
فرمول ـ‌ای، ۱۳۶
ـ مرکب، ۱۳۶
گزاره‌نما، ۵۱، ۱۲۴
ـ ی مرکب، ۱۳۶
فرمول ـ، ۱۳۶
گاوس، ک. ف، ۲۳۶
گلدباخ، ک، ۱۹۱، ۲۹۱
گمان ـ، ۱۹۱، ۲۹۱
گودل، ک، ۲۸۵، ۹۰–۲۸۸
لایبنیتز، گ، و، ۱۱
لم، ۱۵۵
لیتل‌وود، ج. ا، ۷

مبانی، ۱
متباین، ۱۸۳
متمم، ۶۲، ۲۸۷
مجموعه، ۴۷
ـ استقرایی، ۱۷۹
ـ اندیس، ۱۱۶
ـ ای از مجموعه‌ها، ۶۵
ـ به‌طور جزئی مرتب، ۸۹

ـ توانی، ۶۵، ۲۶۸، ۲۸۷
ـ تهی، ۵۴، ۱۷۷، ۲۸۷
ـ جامع، ۵۵، ۶۳
خانوادهٔ اندیس‌دار از ـها، ۱۱۶
ـ شمارش‌پذیر، ۲۶۰
زیر ـ، ۵۳، ۲۸۷
ـ متناهی، ۲۶۰
ـ نامتناهی، ۲۶۱
مدول، ۲۵۵
مرحلهٔ استقرا، ۱۶۴
مزدوج،
ـ یك چهارگان، ۲۴۶
ـ یك عدد مختلط، ۲۳۹
معادل منطقی، ۱۳۷
مقسوم‌علیه [← عامل]، ۱۸۳
ـ صفر، ۱۹۲
ـ مشترك، ۱۸۳
بزرگترین ـ، ۱۸۳
ـ واقعی، ۱۸۳
مندلسن، ا، ۲۸۴
منطق ریاضی، ۱۲۱
منطقاً معادل، ۱۳۷
میدان، ۱۹۳، ۲۱۶، ۲۴۹
زیر ـ، ۲۲۳
ـ مرتب، ۱۹۴، ۲۱۶
ـ کامل، ۱۹۵، ۲۱۰، ۲۱۵

نادرست، ۱۲۳
ناقض، ۱۲۹
نامتناهی، مجموعهٔ ـ، ۲۶۱
نامساوی مثلثی، ۳۳
نتیجه، ۱۵۵
نزولی، دنبالهٔ ـ، ۳۸
نظریهٔ مجموعه‌های
فون نویمان-برنیز-گودل، ۲۸۵
نقیض، ۱۲۹
نگاره، ۹۸
نگاشت، ۹۶
نمودار، ۱۵۱
نیم‌گروه، ۲۴۷

وارون
ـ چپ، ۱۰۸
ـ راست، ۱۰۸
تابع ـ، ۱۰۸
عضو ـ، ۲۴۸
واگرا، دنبالهٔ ـ، ۳۶
وسل، ك، ۲۳۶
ون، دیاگرام ـ، ۵۹

هر [← همه]، ۶-۱۲۵
همانی،
تابع ـ، ۱۰۱
عضو ـ، ۸-۲۴۷
همدامنه، ۹۵
همگرایی، ۳۴-۳۵، ۲۰۵، ۲۲۶
همنهشتی، ۸۳
همه [← هر]، ۶-۱۲۵
همیلتون، و، ۲۳۳، ۲۳۶، ۷-۲۴۳
هیلبرت، د، ۲۸۴، ۲۹۰

یك به‌یك، ۱۰۰
یکریختی، ۱۷۶، ۲۰۱، ۲۳۱
ـ ترتیبی، ۱۷۶، ۲۰۱، ۲۲۲
یکه، ۱۹۶